

CBPF

**Centro Brasileiro de
Pesquisas Físicas**

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

A Radiação de Corpo Negro em Espaços-Tempos com Dimensões Extras

Ramaton Ramos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, como requisito final à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Sérgio Barbosa Duarte

Coorientador: Henrique Boschi Filho

Rio de Janeiro, 6 de outubro de 2016

Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus, criador dos céus e da terra, por seu amor incondicional, pelas promessas sobre minha vida, por colocar meus pés sobre a rocha, firmando meus passos. Aos meus pais Marcos Craveiro e Monica Ferreira, agradeço por cuidarem da vida que lhes foi confiada antes mesmo de nascer, educando-me e nutrindo-me em corpo e espírito.

Agradeço ao companheirismo e apoio constante de minha esposa Thaíse, a vida à qual Deus me uniu com bênçãos sem medidas. Agradeço aos meus amigos na presença dos quais encontro grande satisfação, dentre os quais destaco meu irmão Ravi, meu amigo para toda vida.

Agradeço aos meus orientadores Henrique Boschi Filho, José Helayël Neto e Sérgio Barbosa Duarte pela bondade e paciência com que conduziram meus passos acadêmicos ao longo dos últimos anos. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) agradeço pela bolsa de estudos.

Agradeço aos professores de língua portuguesa Albertina Diniz e Valter Costa por refinarem minha percepção, ao professor Jorge Rezende por me revelar os conceitos físicos germinais, e ao professor José Maurício de quem nunca assisti aulas mas com quem aprendi lições valiosas.

Tive muitos professores, reconheço porém somente a um mestre, Cristo Jesus! Dedico esta obra àquela a quem ele muito inspirou e que, por sua vez, muito me inspira. Seu nome é Maria da Penha Ferreira Tristão, minha vó e a pessoa mais firme e disposta que conheço.

Resumo

Inspirado por desdobramentos teóricos recentes, a Radiação de Corpo Negro, cuja descrição devido a Planck introduziu as primeiras considerações quânticas, é analisada na condição de equilíbrio termodinâmico em cenários com diferentes dimensões.

As Leis de Radiação de Corpo Negro são deduzidas para os espaços-tempos toroidais $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i}$ baseado nos trabalhos de Nordström, Kaluza e Klein e para os espaços anti-de Sitter AdS_5 alusivo ao modelo de Randall-Sundrum e $\text{AdS}_5 \times \mathcal{S}^5$ alusivo à Correspondência AdS/CFT. A altas energias as expressões das Leis de Stefan-Boltzmann e de Wien contemplam toda a extensão dimensional da variedade.

Certas emissões astrofísicas não são descritas pela Radiação de Corpo Negro usual, com modelos de ajuste espectral baseados em leis de potência compatíveis com a distribuição energética de fótons em mais dimensões. A solução exata para a equação de onda na métrica plana de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker é deduzida. A Radiação de Corpo Negro é brevemente discutida na métrica de Schwarzschild.

A distribuição energética de fótons emitidos por erupções de raios gama e a detecção espectral de fótons produzidos por colisões relativísticas em aceleradores são apresentadas como meio de verificar a concordância entre tais medições e os resultados teóricos.

Keywords: blackbody radiation; toroidal space; compact extra dimensions; anti-de Sitter space; Randall-Sundrum model; AdS/CFT correspondence; astrophysical photon emission; FLRW metric; Schwarzschild metric.

Abstract

Inspired by recent theoretical developments, the blackbody radiation, whose description due to Planck introduced the first quantum considerations, is analyzed in thermodynamic equilibrium in scenarios with different dimensions.

The blackbody radiation laws are derived for the toroidal spacetimes $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i}$ based on Nordström, Kaluza and Klein works and for the anti-de Sitter spaces AdS_5 alluding to the Randall-Sundrum model and $\text{AdS}_5 \times \mathcal{S}^5$ allusive to the AdS/CFT correspondence. The Stefan-Boltzmann and Wien laws high-energy expressions include the manifolds full dimensional extent.

Certain astrophysical emissions are not described by the usual blackbody radiation, with spectral fit models based on power laws compatible with the energy distribution of photons in more dimensions. The wave equation exact solution in the flat Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric is deduced. The blackbody radiation is briefly discussed in the Schwarzschild metric.

The photon energy distribution emitted by gamma-ray bursts and the photon spectral detection produced by relativistic collisions in accelerators are presented as means to verify the correlation between such measurements and the theoretical results.

Keywords: blackbody radiation; toroidal space; compact extra dimensions; anti-de Sitter space; Randall-Sundrum model; AdS/CFT correspondence; astrophysical photon emission; FLRW metric; Schwarzschild metric.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	A Radiação de Corpo Negro	2
1.3	Cenários com mais dimensões	4
2	O Corpo Negro em Cenários Toroidais	7
2.1	Cenário básico $\mathcal{M}^{1,d} \times \mathbb{T}^{D-d}$	7
2.1.1	Caso particular $d = 3$	12
2.1.2	Caso particular $D = 3$	14
2.2	Cenário estendido $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i}$	16
2.3	Comentários	18
3	O Corpo Negro em Cenários Anti-de Sitter	21
3.1	Modelo de Randall-Sundrum, AdS_5	21
3.2	Correspondência AdS/CFT, $\text{AdS}_5 \times \mathcal{S}^5$	24
3.3	Comentários	26
4	O Corpo Negro em Cenários Extraterrestres	29
4.1	Observações Astronômicas	29
4.2	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker plana	32
4.3	Notas sobre a métrica de Schwarzschild	34
5	Considerações Finais e Propostas	37
	Referências Bibliográficas	39

1

Introdução

1.1 Motivação

Propostas interessantes relacionadas a problemas em aberto em física de partículas, como a questão da hierarquia [1,2], e em cosmologia, como a matéria escura e a energia escura, envolvem espaços-tempos com dimensões diferentes das quatro empregadas na formulação corrente das teorias físicas.

Propostas de um modelo físico com dimensões extras foram lançadas na década de 1920 por Nordström, Kaluza e Klein [3–5] visando unificar a relatividade geral de Einstein com o eletromagnetismo de Maxwell, com uma quinta dimensão compactada sobre um círculo de dado raio enquanto as outras quatro dimensões são identificadas com o espaço-tempo empírico $\mathcal{M}^{1,3}$. Há cerca de uma década, diferentes modelos foram propostos mantendo as dimensões extras compactas [6,7] ou não-compactas [8,9], com suas previsões ainda por serem detectadas.

A teoria de cordas é atualmente a candidata mais promissora para unificar a gravitação com as demais interações fundamentais sob um espaço-tempo com $9+1$ dimensões, sendo também associada à teoria-M definida em $10+1$ dimensões. Tais dimensões extras são consideradas compactas com um parâmetro de compactificação supostamente da escala de Planck.

No contexto das formulações mais recentes de teorias físicas em espaços de dimensões além das usuais, encontramos também a Correspondência AdS/CFT, proposta por J. Maldacena [10], que relaciona em sua representação notável uma teoria gravitacional efetiva no espaço AdS₅ (via teoria de cordas tipo IIB) com

uma teoria de campos conforme Yang-Mills $N = 4$ supersimétrica em sua fronteira $\mathcal{M}^{1,3}$ em torno de cada um de seus pontos [11–14]. A dualidade expressa por esta correspondência é a maior implementação do Princípio Holográfico [15–20].

1.2 A Radiação de Corpo Negro

Precursora da teoria quântica, a Radiação de Corpo Negro é bem descrita pela Lei de Planck, que implica suas características radiativas. Um corpo negro (com ‘negro’ correspondendo à absorvância do objeto idealizada à unidade vide leis de Kirchhoff, e não ao aspecto visual do mesmo) é caracterizado pelo seu rico espectro de energia, capaz de excitar todas as frequências da luz por termalização. Notas atuais sobre o assunto são encontradas em [21].

O interesse em Radiação de Corpo Negro vai desde a ionização de átomos de Rydberg [22] até a produção de materiais para fins militares [23, 24]. A abordagem padrão considera um pequeno orifício bidimensional conectando o interior de uma caixa isotérmica com seu exterior como uma superfície de corpo negro. A semelhança entre um corpo negro e uma ‘caixa negra’ é discutida em [25].

A questão é abordada a partir da equação de onda no espaço de Minkowski $\mathcal{M}^{1,3}$ para o campo eletromagnético $\mathbf{A}(x)$, com índices espaço-tempo implícitos, expressa por

$$\partial^\mu \partial_\mu \mathbf{A}(x) = 0 , \quad (1.1)$$

cujas soluções sob a forma de ondas planas é dada por

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{A} e^{ik^\mu x_\mu} , \quad (1.2)$$

em que \mathbf{A} figura como vetor polarização segundo o calibre de Coulomb e condições de contorno determinam as energias dos fótons por meio da relação de dispersão

$$\omega^2 = \vec{k}^2 c^2 . \quad (1.3)$$

A densidade de energia da radiação de corpo negro à temperatura T , de acordo com os dois possíveis estados de polarização de fótons com frequências ν_i e a prescrição estatística de Bose-Einstein, é dada por

$$\rho(T) = \frac{2}{V} \sum_i \frac{h\nu_i}{e^{h\nu_i/kT} - 1} , \quad (1.4)$$

em que V é o volume ocupado por $A(x)$ compreendido entre as superfícies em que se observam as condições de contorno.

A radiância $R(T)$, fluxo de energia por unidade de área, relaciona-se com $\rho(T)$ através de um fator propagativo, de modo que para o espaço-tempo empírico

$$R(T) = \frac{c}{4}\rho(T) . \quad (1.5)$$

No limite idealizado em que $V^{1/3} \gg hc/kT$ (conferir [26] para os correspondentes efeitos de tamanho finito) toma-se o somatório em Eq.(1.4) pela integral

$$R(T) = \int_0^\infty R(T, \nu) d\nu \quad (1.6)$$

cuja distribuição espectral é

$$R(T, \nu) = \frac{\Omega_3 h}{2c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} , \quad (1.7)$$

com $\Omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ representando o ângulo sólido total em \mathbb{R}^n .

A distribuição radiativa em função do comprimento de onda $R(T, \lambda)$, também conhecida como Lei de Planck, é tal que $R(T, \lambda)d\lambda = R(T, \nu)d\nu$. Logo

$$R(T, \lambda) = \frac{\Omega_3 hc^2}{2\lambda^5} (e^{hc/k\lambda T} - 1)^{-1} , \quad (1.8)$$

conduzindo via $dR(T, \lambda)/d\lambda = 0$ à relação entre a temperatura T do corpo negro e o comprimento de onda λ em que o mesmo irradia com maior intensidade

$$1 - e^{-hc/k\lambda T} = \frac{1}{5} \frac{hc}{k\lambda T} , \quad (1.9)$$

cuja solução corresponde à Lei do deslocamento de Wien

$$\lambda T = b_W = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{mK} . \quad (1.10)$$

Integrando Eq.(1.7) sobre todo o espectro de frequências conduz a

$$R(T) = \frac{2\pi c}{(hc)^3} (kT)^4 \int_0^\infty \frac{y^3}{e^y - 1} dy , \quad (1.11)$$

com a integral dada pela identidade

$$\int_0^\infty \frac{y^n}{e^y - 1} dy = \Gamma(n+1)\zeta(n+1) . \quad (1.12)$$

1.3. Cenários com mais dimensões | 4

A Lei de Stefan-Boltzmann, que relaciona a radiância do corpo negro à sua temperatura T , é então expressa por

$$R(T) = \sigma_B T^4 , \quad (1.13)$$

com

$$\sigma_B = \frac{2\pi^5 k c}{15} \left(\frac{k}{hc} \right)^3 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2} \text{K}^{-4} . \quad (1.14)$$

1.3 Cenários com mais dimensões

As características da radiação de corpo negro dependem do espaço-tempo a ser preenchida pelo campo eletromagnético, principalmente de sua dimensionalidade [27, 28]. O campo $A(x)$, considerado por simplicidade em primeira quantização, conforme princípio variacional sobre a ação eletromagnética na ausência de fontes $S_M = \int \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F^2 \right) d^4x$ para espaço-tempo de métrica g_{ab} ¹, satisfaz a equação

$$(-g)^{-\frac{1}{2}} \partial_a \left[(-g)^{\frac{1}{2}} g^{ab} \partial_b \right] A(x) = 0 , \quad (1.15)$$

com os índices a e b cobrindo toda a variedade.

Como a conexão entre *spin* e estatística não é alterada em espaços-tempos com mais dimensões [29], a expressão da densidade de energia referente a radiação de corpo negro é preservada. Contudo, dimensões extras acrescentam graus de liberdade à relação de dispersão dos fótons, contribuindo para a degenerescência de seus estados de energia.

As dimensões extras referentes aos cenários considerados definem uma mudança de regime radiativo marcada pela ativação de suas respectivas excitações energéticas e dos estados de polarização associados às mesmas. Por vezes, as dimensões ao longo das quais a radiação efetivamente se propaga contribuem com n dos N graus de liberdade conferidos pelo espaço-tempo à relação de dispersão, modificando a conexão geométrica entre a radiância $R(T)$ e a densidade de energia $\rho(T)$, por equipartição, por um fator $\sqrt{n/N}$.

¹com $g = \det(g_{ab})$

Seguindo a dedução das Leis de Stefan-Boltzmann e de Wien para a variedade compacta $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i}$ resultante das extensões dos trabalhos de Nordström, Kaluza e Klein no capítulo **2**, as mesmas são deduzidas para os interessantes espaços *brane* AdS_5 relativo ao modelo de Randall-Sundrum e $\text{AdS}_5 \times \mathcal{S}^5$ alusivo à Correspondência AdS/CFT no capítulo **3**.

No capítulo **4**, as emissões de certos objetos astrofísicos são comparadas com a radiação de corpo negro em espaços-tempos com dimensões extras. Esta também é discutida no cenário cosmológico das métricas planas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker e no cenário da métrica de Schwarzschild.

Duas propostas de detecção de fótons acompanham as considerações finais do capítulo **5**. As unidades $\hbar = c = k = 1$ são empregadas convenientemente ao final de determinadas seções.

2

O Corpo Negro em Cenários Toroidais

O desenvolvimento da teoria quântica num toro teve início com as tentativas de Nordström, Kaluza e Klein [3–5, 30] de definir uma quarta dimensão espacial compacta com o intuito de unificar as equações de Einstein e Maxwell, despertando o interesse em sistemas físicos em que efeitos de tamanho finito são importantes.

Neste sentido, as Leis de Radiação de Corpo Negro para a família de espaços-tempos $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i}$ são apresentadas neste capítulo, sendo ilustrados os casos $\mathcal{M}^{1,3} \times \mathbb{T}^{D-3}$ publicado em [31] e os casos $\mathcal{M}^{1,2} \times \mathbb{T}^1$ e $\mathcal{M}^{1,1} \times \mathbb{T}^2$.

2.1 Cenário básico $\mathcal{M}^{1,d} \times \mathbb{T}^{D-d}$

A métrica de $\mathcal{M}^{1,d} \times \mathbb{T}^{D-d}$ fornece para o campo $A(x)$ a equação de onda

$$[\partial^\mu \partial_\mu + \partial^j \partial_j] A(x) = 0 , \quad (2.1)$$

com $\mu = 0, \dots, d$ cobrindo o subespaço $\mathcal{M}^{1,d}$ de índices espaciais $i = 1, \dots, d$ enquanto $j = d + 1, \dots, D$ cobre o subespaço \mathbb{T}^{D-d} . À solução correspondente,

$$A(x) = \mathbf{A} e^{ik^\mu x_\mu} e^{ik^j x_j} , \quad (2.2)$$

são impostas condições tipo Dirichlet sobre as fronteiras espaciais $x_i = 0$ e $x_i = \ell$ de $A(x)$ em conjunto com condições periódicas referente ao comprimento $2a$ das dimensões toroidais compactas,

$$k_i = \frac{\pi}{\ell} n_i \quad k_j = \frac{\pi}{a} n_j , \quad (2.3)$$

2.1. Cenário básico $\mathcal{M}^{1,d} \times \mathbb{T}^{D-d} \mid 8$

com $n_i, n_j = 0, 1, \dots$. A relação de dispersão correspondente é então dada por

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{1}{4\ell^2} \sum_{i=1}^d n_i^2 + \frac{1}{4a^2} \sum_{j=d+1}^D n_j^2 . \quad (2.4)$$

O parâmetro a é supostamente da escala de Planck ($\sim 10^{-35}\text{m}$) enquanto ℓ é em princípio tão grande quanto se queira. Suas respectivas contribuições n_i e n_j aos modos de excitação ν não são necessariamente de mesma magnitude, permitindo destacar dentre os estados de energia aqueles que não apresentem excitações referentes às dimensões compactas, de modo que

$$\rho(T) = \frac{1}{V_d} \left[(d-1) \sum_{n_j=0} + (D-1) \sum_{n_j \neq 0} \right] \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} . \quad (2.5)$$

Os fatores $d-1$ e $D-1$ correspondem às polarizações de suas respectivas excitações, enquanto $V_d = \ell^d$ é a extensão ocupada por $\mathbf{A}(x)$ em \mathcal{M}^d , o subespaço ao longo do qual a radiação efetivamente se propaga. A conexão geométrica entre $R(T)$ e $\rho(T)$ dada em [27] pelo fator propagativo

$$\mathbf{c}_d \doteq \frac{c}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \quad (2.6)$$

é modificada para os termos em que $n_j \neq 0$ pelo fator $\sqrt{d/D}$, de modo que

$$R(T) = \frac{\mathbf{c}_d}{V_d} \left[(d-1) \sum_{n_j=0} + \sqrt{\frac{d}{D}} (D-1) \sum_{n_j \neq 0} \right] \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} . \quad (2.7)$$

Os termos em que $n_j = 0$ conduzem à expressão

$$R_d(T) \doteq \frac{\mathbf{c}_d(d-1)}{V_d} \sum_{n_j=0} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \cong \int_0^\infty R_d(T, \nu) d\nu , \quad (2.8)$$

com a correspondente distribuição espectral dada por

$$R_d(T, \nu) = \mathbf{c}_d(d-1) \left(\frac{\nu}{c}\right)^d \frac{\Omega_d h}{e^{h\nu/kT} - 1} . \quad (2.9)$$

Os termos em que $n_j \neq 0$ conduzem à expressão

$$R_D(T) \doteq \frac{\mathbf{c}_d(D-1)}{V_d} \sqrt{\frac{d}{D}} \sum_{n_j \neq 0} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \cong \int_0^\infty R_D(T, \nu) d\nu , \quad (2.10)$$

com a correspondente distribuição espectral dada por

$$R_D(T, \nu) = \mathbf{c}_d(D-1) \sqrt{\frac{d}{D}} \left(\frac{\nu}{c}\right)^D \frac{\Omega_D h}{e^{h\nu/kT} - 1} a^{D-d}. \quad (2.11)$$

As contribuições $R_d(T)$ e $R_D(T)$ à radiância são, via Eq.(1.12), dadas por

$$R_d(T) = \sigma_d T^{d+1} \quad R_D(T) = \sigma_D T^{D+1}, \quad (2.12)$$

com

$$\sigma_d = \mathbf{c}_d(d-1) \Omega_d \Gamma(d+1) \zeta(d+1) \left(\frac{k}{hc}\right)^d k \quad (2.13)$$

$$\sigma_D = \mathbf{c}_d \sqrt{\frac{d}{D}} (D-1) \Omega_D \Gamma(D+1) \zeta(D+1) \left(\frac{k}{hc}\right)^D a^{D-d} k. \quad (2.14)$$

A correspondente Lei de Stefan-Boltzmann é obtida ao agrupar as contribuições radiativas $R_d(T)$ e $R_D(T)$ referentes aos termos energéticos em que $n_j = 0$ e $n_j \neq 0$, de modo que

$$R(T) = \sigma_d T^{d+1} + \sigma_D T^{D+1} \quad (2.15)$$

é o fluxo de energia emitido por unidade de área do corpo negro.

Visto que $R(T, \lambda)d\lambda = [R_d(T, \nu) + R_D(T, \nu)]d\nu$, a distribuição radiativa $R(T, \lambda)$ correspondente é dada por

$$R(T, \lambda) = \mathbf{c}_d \left[\frac{\Omega_d(d-1)}{\lambda^{d+2}} + \sqrt{\frac{d}{D}} \frac{\Omega_D(D-1)a^{D-d}}{\lambda^{D+2}} \right] \frac{hc}{e^{hc/k\lambda T} - 1}, \quad (2.16)$$

de modo que a correspondente Lei do deslocamento de Wien, a relacionar a temperatura T do corpo negro ao comprimento de onda λ em que o mesmo irradia com maior intensidade, é expressa por

$$1 - e^{-hc/k\lambda T} = \frac{hc}{k\lambda T} \frac{1 + \varepsilon_{D,d}(\lambda)}{(d+2) + (D+2)\varepsilon_{D,d}(\lambda)}, \quad (2.17)$$

com a razão entre as componentes $n_j \neq 0$ e $n_j = 0$ do presente espectro radiativo expressa por

$$\varepsilon_{D,d}(\lambda) = \frac{D-1}{d-1} \frac{\Omega_D}{\Omega_d} \sqrt{\frac{d}{D}} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^{D-d}. \quad (2.18)$$

2.1. Cenário básico $\mathcal{M}^{1,d} \times \mathbb{T}^{D-d} \mid 10$

As Leis de Radiação de Corpo Negro referentes ao presente cenário são devidamente retratadas mediante o dimensionamento das variáveis físicas. Escalas naturais de comprimento e temperatura são prescritas com a absorção do parâmetro de compactificação a nas variáveis $\tilde{\lambda}$ e \tilde{T} dadas por

$$\tilde{\lambda} \doteq \frac{\lambda}{a} \qquad \tilde{T} \doteq \frac{kaT}{hc} . \quad (2.19)$$

A Lei de Stefan-Boltzmann dimensionada expressa por $\tilde{R}(\tilde{T})$ é tal que

$$\tilde{R}(\tilde{T}) \doteq \tilde{\sigma}_d \tilde{T}^{d+1} + \tilde{\sigma}_D \tilde{T}^{D+1} , \quad (2.20)$$

com

$$\tilde{\sigma}_d = (d-1)\Omega_d \Gamma(d+1)\zeta(d+1) \quad (2.21)$$

$$\tilde{\sigma}_D = \sqrt{\frac{d}{D}} (D-1)\Omega_D \Gamma(D+1)\zeta(D+1) . \quad (2.22)$$

A baixas temperaturas a Lei de Stefan-Boltzmann se limita ao subespaço de Minkowski enquanto a temperaturas suficientemente altas as dimensões toroidais são igualmente absorvidas no processo radiativo, de modo que

$$\tilde{T} \ll 1 \rightarrow \tilde{R}(\tilde{T}) \cong \tilde{\sigma}_d \tilde{T}^{d+1} \qquad \tilde{T} \gg 1 \rightarrow \tilde{R}(\tilde{T}) \cong \tilde{\sigma}_D \tilde{T}^{D+1} . \quad (2.23)$$

A Lei de Wien devidamente dimensionada é expressa por

$$1 - e^{-1/\tilde{\lambda}\tilde{T}} = \frac{1}{\tilde{\lambda}\tilde{T}} \frac{1 + \tilde{\varepsilon}_{D,d}(\tilde{\lambda})}{(d+2) + (D+2)\tilde{\varepsilon}_{D,d}(\tilde{\lambda})} , \quad (2.24)$$

com

$$\tilde{\varepsilon}_{D,d}(\tilde{\lambda}) = \frac{D-1}{d-1} \frac{\Omega_D}{\Omega_d} \sqrt{\frac{d}{D}} \tilde{\lambda}^{-(D-d)} . \quad (2.25)$$

Os máximos de intensidade do espectro radiativo a grandes e a pequenos comprimentos de onda remetem, em seus respectivos limites, a relações entre \tilde{T} e $\tilde{\lambda}$ em que tais máximos se verificam dadas por

$$\tilde{\lambda} \gg 1 \rightarrow 1 - e^{-1/\tilde{\lambda}\tilde{T}} \cong \frac{1}{d+2} \frac{1}{\tilde{\lambda}\tilde{T}} \quad (2.26)$$

$$\tilde{\lambda} \ll 1 \rightarrow 1 - e^{-1/\tilde{\lambda}\tilde{T}} \cong \frac{1}{D+2} \frac{1}{\tilde{\lambda}\tilde{T}} . \quad (2.27)$$

Em tais limites observa-se que

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}\tilde{T}} = n + W_0(-ne^{-n}), \quad (2.28)$$

com $n = d + 2$ a baixas energias e $n = D + 2$ a altas energias. O ramo principal da função de Lambert $W_0(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-l)^{l-1}}{l!} x^l$ tem seu raio de convergência satisfeito para os valores admissíveis a d e D . Como $W_0(x) \approx x$ para $x \ll 1$, verifica-se que

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}\tilde{T}} \approx n(1 - e^{-n}). \quad (2.29)$$

Para cada valor de d há um limiar para D a partir do qual o espectro radiativo $R(T, \lambda)$ apresenta, devido ao ímpeto com que as excitações energéticas compactas se manifestam, dois máximos (separados por um mínimo) de intensidade ao longo da mudança de regime, em que $\tilde{\varepsilon}_{D,d}(\tilde{\lambda}) \approx 1$.

Sobre a distribuição radiativa dimensionada $\tilde{R}(\tilde{T}, \tilde{\lambda})$, dada por

$$\tilde{R}(\tilde{T}, \tilde{\lambda}) = \left[\frac{\Omega_d(d-1)}{\tilde{\lambda}^{d+2}} + \sqrt{\frac{d}{D}} \frac{\Omega_D(D-1)}{\tilde{\lambda}^{D+2}} \right] (e^{1/\tilde{\lambda}\tilde{T}} - 1)^{-1}, \quad (2.30)$$

as condições de mínimo local de intensidade

$$\left. \frac{\partial \tilde{R}(\tilde{T}, \tilde{\lambda})}{\partial \tilde{\lambda}} \right|_{\tilde{\varepsilon}=1} = 0 \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{R}(\tilde{T}, \tilde{\lambda})}{\partial \tilde{\lambda}^2} \right|_{\tilde{\varepsilon}=1} > 0 \quad (2.31)$$

são satisfeitas contanto que

$$(D-d)^2 - 2(D+d+4) + e^{-1/\tilde{\lambda}\tilde{T}}(D+d+4)^2 > 0. \quad (2.32)$$

Como $1/\tilde{\lambda}\tilde{T} \approx (D+d+4)/2$ para a mudança de regime, o termo contendo a exponencial pode ser desprezado e a relação entre d e D para os quais a mudança de regime radiativo revela dois máximos de intensidade é expressa por

$$D \gtrsim (d+1) + \sqrt{4d+9}, \quad (2.33)$$

com seus referentes comprimentos de onda λ_d e λ_D , vide Eq.(2.29), tais que

$$\frac{\lambda_D}{\lambda_d} \approx \frac{d+2}{D+2}. \quad (2.34)$$

2.1.1 Caso particular $d = 3$

Tendo em vista a identificação empírica do espaço-tempo local como $\mathcal{M}^{1,3}$ e as perspectivas dimensionais contempladas por recentes teorias, o cenário $\mathcal{M}^{1,3} \times \mathbb{T}^{D-3}$ é colocado como ponto de contato entre ambos panoramas.

Medições precisas da radiação de corpo negro realizadas em laboratório [32–35] registram desvios do espectro radiativo $R(T, \lambda)$ em relação à Lei de Planck da ordem de 1% para $\lambda^* = 2,5 \cdot 10^{-7}\text{m}$ a $T \approx 3000\text{K}$.

A associação de tais discrepâncias a supostas dimensões extras pela função $\varepsilon_{D,3}(\lambda)$ confere limites experimentais sobre o parâmetro de compactificação das mesmas. Como $\varepsilon_{D,3}(\lambda^*) \propto (a/\lambda^*)^{D-3}$, verifica-se que $a \lesssim 10^{-7}\text{m}$.

A correspondente Lei de Stefan-Boltzmann é comparada à sua expressão usual em Fig.(2.1) para os primeiros valores de D , a distinção entre estas se dá a $\tilde{T} \sim 0.5$.

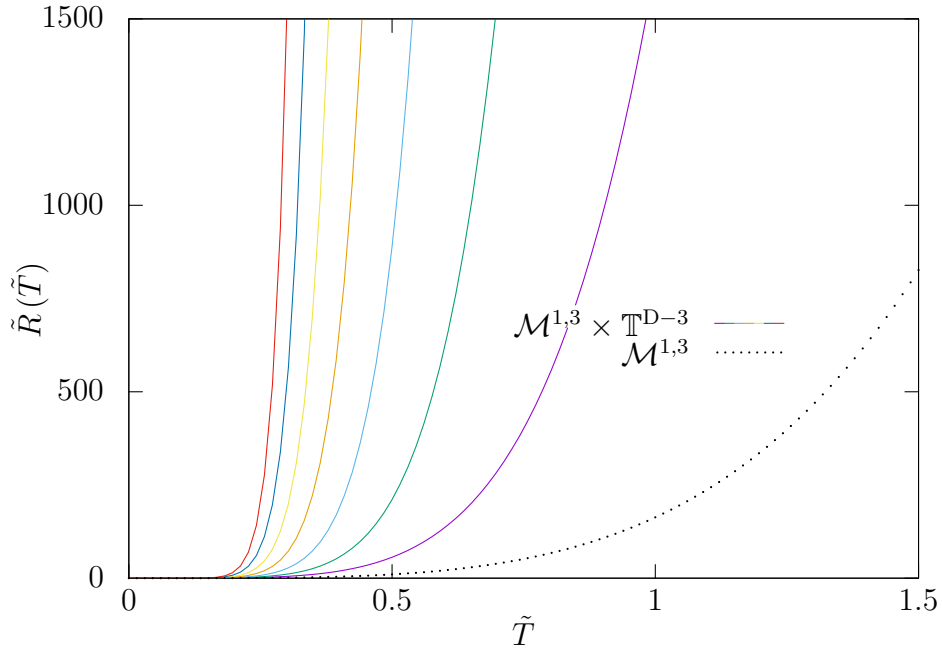


Figura 2.1: Comparação entre a Lei de Stefan-Boltzmann em $\mathcal{M}^{1,3} \times \mathbb{T}^{D-3}$ para $D = 4, \dots, 10$ (linhas) e sua expressão ordinária (pontos). Quanto mais dimensões menor a temperatura em que ocorre a mudança de regime.

A correspondente Lei de Wien é confrontada com sua expressão usual em Fig.(2.2) para os primeiros valores de D , a distinção entre estas se dá a $\tilde{\lambda} \sim 2$.

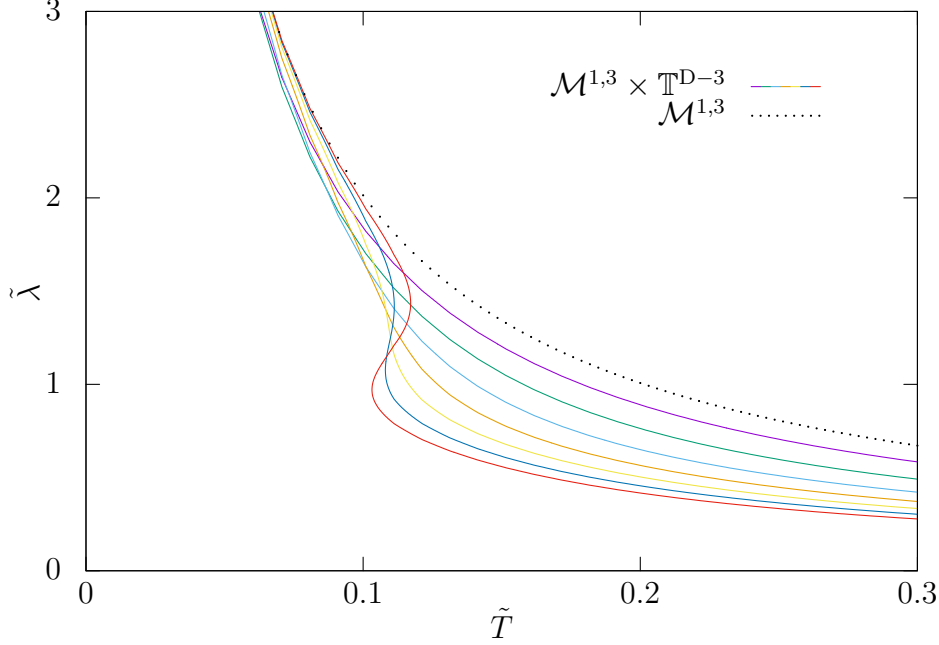


Figura 2.2: Comparação entre a Lei de Wien em $\mathcal{M}^{1,3} \times \mathbb{T}^{D-3}$ para $D = 4, \dots, 10$ (linhas) e sua expressão ordinária (pontos). Quanto mais dimensões mais abrupta a mudança de regime, com dois máximos de intensidade para $D \geq 9$.

No regime de baixas energias, em que

$$\tilde{T} \ll 1 \rightarrow R(T) \cong \sigma_3 T^4 \quad (2.35)$$

$$\tilde{\lambda} \gg 1 \rightarrow 1 - e^{-hc/k\lambda T} \cong \frac{1}{5} \frac{hc}{k\lambda T}, \quad (2.36)$$

observa-se que a constante radiativa σ_3 é idêntica à constante de Boltzmann σ_B expressa em Eq.(1.14) e que $hc/k\lambda T \approx 5(1 - e^{-5})$ vai de encontro à constante de Wien b_W expressa em Eq.(1.10).

Logo, as Leis de Radiação de Corpo Negro para o espaço-tempo $\mathcal{M}^{1,3} \times \mathbb{T}^{D-3}$ concordam com as conhecidas leis de radiação referentes ao espaço-tempo empírico $\mathcal{M}^{1,3}$ no limite de baixas energias.

2.1.2 Caso particular $D = 3$

O conceito de compactificação não está restrito à discussão de dimensões extras. Cenários interessantes de baixa dimensionalidade são obtidos a partir do espaço de Minkowski $\mathcal{M}^{1,3}$ por meio de arranjos físicos planares ou axiais, em que o campo eletromagnético $\mathbf{A}(x)$ se encontra dimensionalmente confinado aos espaços efetivos $\mathcal{M}^{1,2} \times \mathbb{T}^1$ e $\mathcal{M}^{1,1} \times \mathbb{T}^2$.

Em tais cenários, cada fóton preserva seus dois estados usuais de polarização, enquanto o fator propagativo \mathbf{c} é sensível às dimensões ‘compactadas’. As correspondentes Leis de Radiação de Corpo Negro são devidamente comparadas às suas expressões ordinárias em Fig.(2.3) e Fig.(2.4).

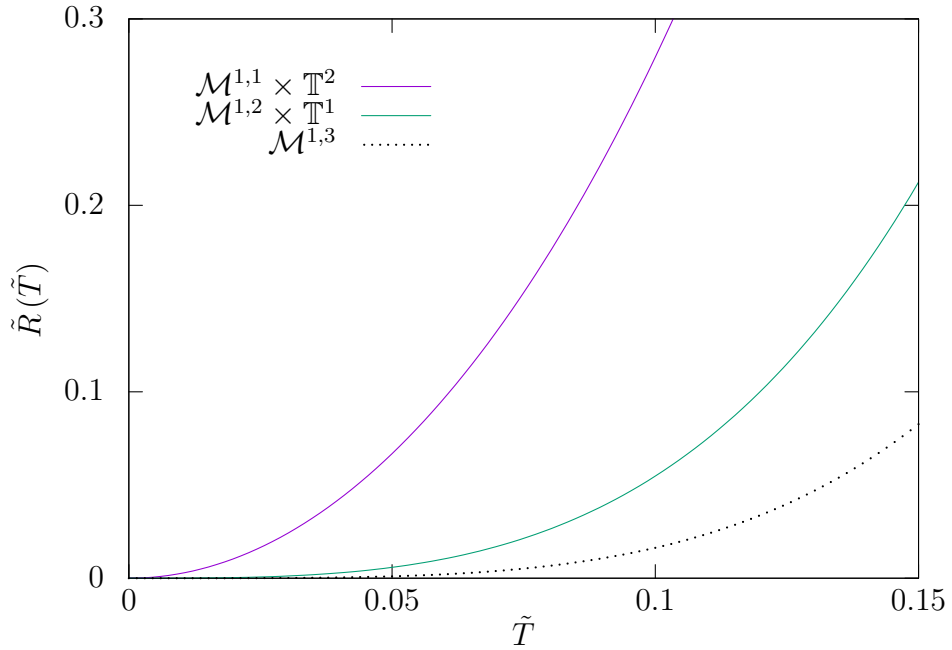


Figura 2.3: Comparação entre a Lei de Stefan-Boltzmann referente aos cenários axial e planar (linhas) e sua expressão usual (pontos) a baixas temperaturas.

A configuração planar $\mathcal{M}^{1,2} \times \mathbb{T}^1$, fisicamente obtida por placas paralelas de separação a , apresenta como Lei de Stefan-Boltzmann a relação

$$R(T) = \sigma_p T^3 + \sigma_B T^4 \quad \sigma_p = 4kc \left(\frac{k}{hc} \right)^2 \Gamma(3)\zeta(3) a^{-1}, \quad (2.37)$$

enquanto sua correspondente Lei de Wien é expressa por

$$1 - e^{-hc/k\lambda T} = \frac{hc}{k\lambda T} \frac{1 + \varepsilon_p(\lambda)}{5 + 4\varepsilon_p(\lambda)} \quad \varepsilon_p(\lambda) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{a}. \quad (2.38)$$

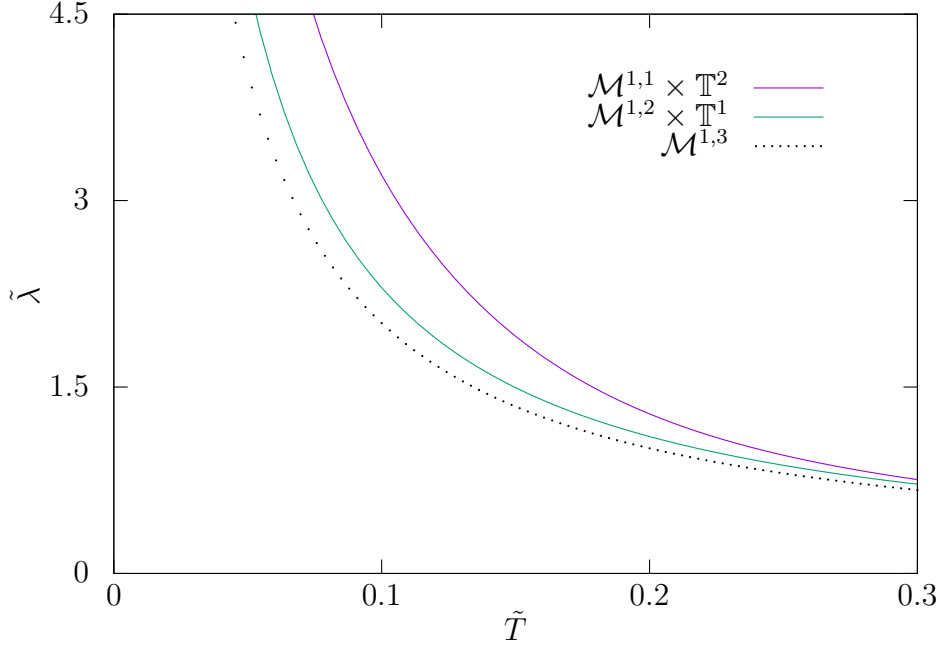


Figura 2.4: Comparação entre a Lei de Wien referente aos cenários axial e planar (linhas) e sua expressão usual (pontos) a baixas temperaturas.

A configuração axial $\mathcal{M}^{1,1} \times \mathbb{T}^2$, semelhante a um guia de ondas quadrado de lado a , apresenta como Lei de Stefan-Boltzmann a relação

$$R(T) = \sigma_a T^2 + \sigma_B T^4 \quad \sigma_a = \frac{4k^2}{h} \Gamma(2) \zeta(2) a^{-2}, \quad (2.39)$$

enquanto a correspondente Lei de Wien é expressa por

$$1 - e^{-hc/k\lambda T} = \frac{hc}{k\lambda T} \frac{1 + \varepsilon_a(\lambda)}{5 + 3\varepsilon_a(\lambda)} \quad \varepsilon_a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2. \quad (2.40)$$

O limite de altas energias das Leis de Radiação de Corpo Negro para os espaços efetivos $\mathcal{M}^{1,2} \times \mathbb{T}^1$ e $\mathcal{M}^{1,1} \times \mathbb{T}^2$ remete às conhecidas leis de radiação referentes ao espaço-tempo $\mathcal{M}^{1,3}$ a partir do qual os mesmos foram obtidos. A baixas energias, a compacidade inerente a tais arranjos físicos modifica as Leis de Stefan-Boltzmann e de Wien usuais, sendo em princípio suscetível à verificação experimental.

2.2 Cenário estendido $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i}$

O cenário toroidal mais abrangente consiste do produto entre o espaço de Minkowski $\mathcal{M}^{1,d}$ e n espaços toroidais \mathbb{T}^{d_i} , cada qual com d_i dimensões de parâmetro de compactificação a_i . Tais condições de periodicidade, em conjunto com as condições de contorno referentes ao comprimento $\ell \equiv a_0$ ao longo das $d \equiv d_0$ dimensões espaciais de $\mathcal{M}^{1,d}$ preenchidas por $A(x)$, fornecem para relação de dispersão de fótons no espaço-tempo $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i}$ a expressão

$$\frac{\nu_n^2}{c^2} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\vec{n}_i}{2a_i} \right)^2, \quad (2.41)$$

em que $\vec{n}_i \in \mathbb{N}^{d_i}$. A condição explícita $a_i \ll a_{i-1}$ implica regimes de energia para a Radiação de Corpo Negro adequados ao propósito em mente, a partir do que se define

$$R(T) = \frac{c_d}{V_d} \sum_{i=0}^n \left[\sqrt{\frac{d}{D_i}} (D_i - 1) \sum_{\nu_i=0}^{\infty} \frac{h\nu_i}{e^{h\nu_i/kT} - 1} \right], \quad (2.42)$$

com ν_i proveniente de uma relação de dispersão parcial e $D_i = \sum_{j=0}^i d_j$.

A Lei de Stefan-Boltzmann correspondente é expressa por

$$R(T) = \frac{c_d}{V_d} kT \sum_{i=0}^n \left[\tilde{\sigma}_{D_i} \prod_{j=0}^i \left(\frac{k}{hc} a_j T \right)^{d_j} \right], \quad (2.43)$$

com $\tilde{\sigma}_{D_i}$ dado por Eq.(2.22), enquanto a Lei de Wien correspondente é tal que

$$1 - e^{-hc/k\lambda T} = -\frac{hc}{k\lambda T} \frac{\Lambda(\lambda)/\lambda}{\Lambda'(\lambda)}, \quad (2.44)$$

com

$$\Lambda(\lambda) = \lambda^{-2} \sum_{i=0}^n \left[\sqrt{\frac{d}{D_i}} (D_i - 1) \Omega_{D_i} \prod_{j=0}^i \left(\frac{a_j}{\lambda} \right)^{d_j} \right]. \quad (2.45)$$

No regime de baixas energias o termo $i = 0$ em Eq.(2.43) e Eq.(2.45) se distingue dos demais, com a Radiação de Corpo Negro efetivamente circunscrita ao subespaço de Minkowski $\mathcal{M}^{1,d}$ de modo que

$$T \ll \frac{1}{a_1} \rightarrow R(T) \simeq \tilde{\sigma}_d T^{d+1} \quad (2.46)$$

$$\lambda \gg a_1 \rightarrow \frac{1}{\lambda T} \approx (d+2)[1 - e^{-(d+2)}], \quad (2.47)$$

enquanto no regime de altas energias o termo $i = n$ em Eq.(2.43) e Eq.(2.45) se distingue dos demais, com a Radiação de Corpo Negro penetrando completamente o espaço $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i}$ de modo que

$$T \gg \frac{1}{a_n} \rightarrow R(T) \simeq \prod_{j=1}^n (a_j^{d_j}) \tilde{\sigma}_{D_n} T^{D_n+1} \quad (2.48)$$

$$\lambda \ll a_n \rightarrow \frac{1}{\lambda T} \approx (D_n + 2)[1 - e^{-(D_n+2)}] . \quad (2.49)$$

A energias intermediárias, em que $a_{i-1}^{-1} \lesssim T \lesssim a_i^{-1}$ e $a_i \lesssim \lambda \lesssim a_{i-1}$, as presentes Leis de Stefan-Boltzmann e do deslocamento de Wien retratadas em Eq.(2.43) e Eq.(2.44) são oportunamente expressas por

$$R(T) \simeq \prod_{j=1}^{i-1} a_j^{d_j} (\tilde{\sigma}_{D_{i-1}} T^{D_{i-1}+1} + a_i^{d_i} \tilde{\sigma}_{D_i} T^{D_i+1}) \quad (2.50)$$

$$1 - e^{-1/\lambda T} \simeq \frac{1}{\lambda T} \frac{1 + \varepsilon_{D_i, D_{i-1}}(\lambda)}{(D_{i-1} + 2) + (D_i + 2)\varepsilon_{D_i, D_{i-1}}(\lambda)} , \quad (2.51)$$

com $\varepsilon_{D_i, D_{i-1}}(\lambda)$ dado por Eq.(2.18). Tais expressões são as mesmas obtidas para um cenário $\mathcal{M}^{1, D_{i-1}} \times \mathbb{T}^{d_i}$ a menos do fator volumétrico $\prod_{j=1}^{i-1} a_j^{d_j}$.

O cenário estendido $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i}$ se resume ao cenário toroidal $\mathcal{M}^{1,d} \times \mathbb{T}^{D-d}$ para o caso particular em que $n = 1$ com $D \equiv D_n$, obtido mediante a degeneração dos parâmetros de compactificação a um mesmo valor $a_i \rightarrow a$, o que dissolve os regimes de energia intermediários.

A teoria de cordas em 10 dimensões, tida como limite especial da teoria-M de 11 dimensões, apresenta-se como cenário teórico interessante por sua proposta unificadora, mas com pouco apelo empírico. Acomodado em $\mathcal{M}^{1,3} \times \mathbb{T}^6 \times \mathbb{T}^1$, tal cenário conecta-se dimensionalmente à experiência humana no regime de baixas energias do ponto de vista radiativo.

A Lei de Stefan-Boltzmann correspondente é dada por

$$R(T) \simeq T^4 + a^6 T^{10} + a^6 b T^{11} , \quad (2.52)$$

enquanto a correspondente Lei de Wien é tal que

$$1 - e^{-1/\lambda T} \simeq \frac{1}{\lambda T} \frac{1 + a^6/\lambda^6 + a^6 b/\lambda^7}{5 + 11a^6/\lambda^6 + 12a^6 b/\lambda^7} . \quad (2.53)$$

2.3 Comentários

Enquanto a altas energias todas as dimensões são absorvidas no processo radiativo, $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i} \sim \mathcal{M}^{1,D}$, com as excitações energéticas compactas correspondendo à massa efetiva dos fótons, a baixas energias o espaço-tempo participa parcialmente do processo radiativo, $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i} \sim \mathcal{M}^{1,d}$.

As mudanças de regime induzidas pela compacidade dos subespaços toroidais são expressas pelo aspecto aditivo das Leis de Stefan-Boltzmann e de Wien obtidas, cuja origem se encontra na estrutura de Eq.(2.7) e Eq.(2.42), constituindo o ponto chave da abordagem.

O limite do contínuo empregado ao tratar a Radiação de Corpo Negro, expressa tecnicamente por um somatório infinito de termos energéticos, produz no cenário $\mathcal{M}^{1,d} \times \mathbb{T}^{D-d}$ a sobreposição de excitações não-compactas com excitações mistas ao longo da mudança de regime, em que $\sigma_D T^D \sim \sigma_d T^d$ e $\varepsilon_{D,d}(\lambda) \sim 1$.

Os efeitos de tamanho finito inerentes aos cenários $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i}$ não estão restritos ao regime de altas energias. A partir da relação de dispersão de fótons

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \left(\frac{\vec{n}_0}{2\ell} \right)^2 + \left(\frac{\vec{n}_1}{2a} \right)^2 \quad (2.54)$$

no espaço-tempo $\mathcal{M}^{1,d_0} \times \mathbb{T}^{d_1}$, a energia confinada à extensão espacial preenchida pela radiação pode em princípio ser definida como

$$E(T) \simeq \left[\sum_{\vec{n}_0=0} + \sum_{\vec{n}_1=0} + \sum_{\vec{n}_i \neq 0} \right] \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (2.55)$$

o que se traduz em Leis de Stefan-Boltzmann e de Wien expressas por

$$E(T) \simeq T(a^{d_1} T^{d_1} + \ell^{d_0} T^{d_0} + a^{d_1} \ell^{d_0} T^D) \quad (2.56)$$

$$1 - e^{-1/\lambda T} \simeq \frac{1}{\lambda T} \frac{a^{d_1} \lambda^{d_0} + \ell^{d_0} \lambda^{d_1} + a^{d_1} \ell^{d_0}}{(d_1 + 2)a^{d_1} \lambda^{d_0} + (d_0 + 2)\ell^{d_0} \lambda^{d_1} + (D + 2)a^{d_1} \ell^{d_0}}. \quad (2.57)$$

Comparação entre cada uma das componentes d_i e a componente D das presentes relações demarca, com $a \ll \ell$, a escala de energia $\sim a^{-1}$ acima da qual

$$E(T) \approx a^{d_1} \ell^{d_0} T^{D+1} \quad \frac{1}{\lambda T} \approx (D + 2)[1 - e^{-(D+2)}] \quad (2.58)$$

e abaixo da qual

$$E(T) \approx \ell^{d_0} T^{d_0+1} \quad \frac{1}{\lambda T} \approx (d_0 + 2)[1 - e^{-(d_0+2)}] . \quad (2.59)$$

As componentes d_0 e d_1 das presentes relações são comparáveis entre si para

$$T \sim \frac{1}{\ell} \left(\frac{a}{\ell} \right)^{\frac{1}{d_1-1}} \quad \lambda \sim \ell \left(\frac{\ell}{a} \right)^{\frac{1}{d_1-1}} . \quad (2.60)$$

Para $d_0 < d_1$ isto ocorre no regime de altas energias em que o espaço-tempo participa completamente do processo radiativo, sem relevância física portanto. Para $d_0 = d_1$ a componente d_1 é por confrontação direta inexpressiva, devido à disparidade entre a e ℓ .

Para $d_0 > d_1$ uma nova escala de energia é definida em Eq.(2.60), abaixo da qual as excitações energéticas restritas a \mathbb{T}^{d_1} prevalecem sobre as restritas a \mathcal{M}^{d_0} ,

$$E(T) \approx a^{d_1} T^{d_1+1} \quad \frac{1}{\lambda T} \approx (d_1 + 2)[1 - e^{-(d_1+2)}] , \quad (2.61)$$

validando os três regimes de energia sugeridos por Eq.(2.55).

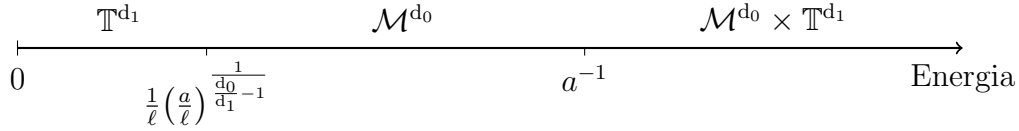


Figura 2.5: Regimes de energia definidos em $\mathcal{M}^{1,d_0} \times \mathbb{T}^{d_1}$ para $d_0 > d_1$.

Dimensões compactas manifestam-se também a baixas energias, desde que as mesmas sejam em menor quantidade que as dimensões não-compactas. Este efeito deve-se à extensão finita preenchida pela radiação em \mathcal{M}^{1,d_0} .

A radiação no presente cenário é dotada de dois regimes de energia, dados por Eq.(2.58) e Eq.(2.59), no limite ideal em que $\ell \rightarrow \infty$. As componentes radiativas se confundem no limite oposto em que $\ell \rightarrow a$, conferindo à radiação um único regime de energia dado por Eq.(2.58).

O caso particular $\mathcal{M}^{1,3} \times \mathbb{T}^1$ representado por uma cavidade ordinária em que tipicamente $\ell \gtrsim 10^{-2}\text{m}$, com $a \lesssim 10^{-7}\text{m}$ dado por limites experimentais, relega a distinção entre os regimes parciais compacto e não-compacto a energias $\lesssim 5 \cdot 10^{-3}\text{K}$.

3

O Corpo Negro em Cenários Anti-de Sitter

Espaços anti-de Sitter AdS_n são as soluções das equações de Einstein no vácuo em n dimensões com máxima simetria e constante cosmológica de efeito atrativo. Mesmo que para o universo observável tal constante tenha efeito repulsivo, esta pode ser encarada como uma regularização de longa distância da gravidade.

O espaço AdS_n reduz-se ao subespaço $\mathcal{M}^{1,n-2}$ em torno de cada um dos pontos de sua fronteira conforme, o que faz de AdS_5 interessante visto o espaço-tempo empírico $\mathcal{M}^{1,3}$. Neste sentido, as Leis de Radiação de Corpo Negro são apresentadas neste capítulo para os espaços AdS_5 referente ao modelo de Randall-Sundrum e $\text{AdS}_5 \times \mathcal{S}^5$ referente à Correspondência AdS/CFT.

3.1 Modelo de Randall-Sundrum, AdS_5

O modelo de Randall-Sundrum aborda de maneira original a disparidade entre a interação gravitacional e as três interações de calibre por meio de uma hierarquia naturalmente gerada, revelando-se um arcabouço produtivo para explorar a física de dimensões extras. Sua métrica é comumente expressa por

$$ds^2 = e^{-2|y|/L} dx^\mu dx_\mu + dy^2, \quad (3.1)$$

de maneira que para $-\infty < y < +\infty$ há duas fronteiras $\mathcal{M}^{1,3}$ encerrando o *bulk* AdS_5 (modelo RS1) enquanto para $-\infty \leq y \leq +\infty$ somente a *3-brane* em $y = 0$ é fisicamente relevante (modelo RS2), com $L > 0$ como parâmetro espacial conforme.

3.1. Modelo de Randall-Sundrum, AdS₅ | 22

A mudança de variáveis $dy^2 = e^{-2|y|/L} dz^2$, com a identificação $y = 0 \leftrightarrow z = 0$, confere à métrica seu aspecto conformalmente plano expresso por

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + |z|/L)^2} (dz^2 + dx^\mu dx_\mu) . \quad (3.2)$$

A simetria de paridade da coordenada conforme z restringe o trato ao semi-eixo $z \geq 0$, em que o campo $\mathbf{A}(x, z)$ satisfaz a equação de onda

$$\left[\partial_z^2 - \frac{3}{z+L} \partial_z + \partial^\mu \partial_\mu \right] \mathbf{A}(x, z) = 0 , \quad (3.3)$$

cuja solução é dada por

$$\mathbf{A}(x, z) = \mathbf{A}(\kappa(z+L))^2 H_2^{(1)}(\kappa(z+L)) e^{ik^\mu x_\mu} . \quad (3.4)$$

As funções de Hankel $H_\alpha(y)$ de carácter altamente teórico, com $\alpha \in \mathbb{R}$, emergem como a solução radial das equações de Helmholtz e de Laplace em coordenadas cilíndricas. As mesmas podem ser expressas, para $x > 0$, por

$$H_\alpha(y) = \pm \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\pm i\pi + \infty} e^{y \sinh t - \alpha t} dt = J_\alpha(y) \pm iN_\alpha(y) , \quad (3.5)$$

com os sinais $+$ e $-$ referentes às funções de primeira e segunda espécie respectivamente. O contorno de integração é escolhido de $-\infty$ a 0 ao longo do eixo real, de 0 a $\pm i\pi$ ao longo do eixo imaginário, e de $\pm i\pi$ a $\pm i\pi + \infty$ ao longo da paralela ao eixo real. As funções de Bessel $J_\alpha(y)$ e de Neumann $N_\alpha(y)$ podem ser respectivamente concebidas como as componentes real e imaginária das funções de Hankel.

O modelo de Randall-Sundrum encontra nas condições de Neumann aplicadas às fronteiras em $z = 0$ e $z = a$ (para $a < \infty$) a continuidade dos campos no *orbifold* formado pelas duas porções justapostas de AdS₅, o que proporciona os valores de κ . Tais valores são difíceis de serem calculados, mas para argumentos suficientemente elevados as funções $H_\alpha(y)$ são assintoticamente oscilatórias, de modo que

$$H_\alpha(y) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi y}} e^{\pm i[y - (2\alpha+1)\pi/4]} \quad \text{para } y \gg \alpha^2 . \quad (3.6)$$

Tal expressão é válida no presente caso contanto que $L \gtrsim a$, o que é considerado para o modelo RS1.

A condição periódica conforme $\kappa a = \eta\pi$ em conjunto com as condições de Dirichlet $\vec{k}\ell = \vec{n}\pi$ sobre as demais coordenadas espaciais, com $\eta \in \mathbb{N}$ e $\vec{n} \in \mathbb{N}^3$, conduzem à relação de dispersão de fótons correspondente dada por

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{\vec{n}^2}{4\ell^2} + \frac{\eta^2}{4a^2}. \quad (3.7)$$

Visto a potencial disparidade entre ℓ e a a repercutir sobre a magnitude de suas respectivas contribuições à energia dos fótons, destaca-se dentre os estados de energia aqueles que não apresentam excitações relativas à dimensão conforme, de modo que

$$R(T) = \frac{\mathbf{c}_3}{V_z} \left[2 \sum_{\eta=0} + 3 \sqrt{\frac{3}{4}} \sum_{\eta \neq 0} \right] \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (3.8)$$

em que $V_z = \ell^3(1 + z/L)^{-3}$ é a extensão à coordenada conforme z ocupada por $\mathbf{A}(x, z)$ em \mathcal{M}^3 , o subespaço ao longo do qual a radiação efetivamente se propaga devido à finitude (modelo RS1) da coordenada conforme.

Tal expressão coincide, para $z = 0$, com a obtida no capítulo 1 para o espaço-tempo específico $\mathcal{M}^{1,3} \times \mathbb{T}^1$, recuperando a Radiação de Corpo Negro usual para $\eta = 0$ enquanto $\eta \neq 0$ remete às leis dimensionalmente esperadas a altas energias. As Leis de Stefan-Boltzmann e de Wien para o modelo RS1 são expressas por

$$R(T) = (1 + z/L)^3 (\sigma_B T^4 + \sigma_\eta T^5) \quad 1 - e^{-1/\lambda T} = \frac{1}{\lambda T} \frac{1 + \varepsilon_\eta(\lambda)}{5 + 6\varepsilon_\eta(\lambda)}, \quad (3.9)$$

com $\sigma_\eta = \sigma_4$ e $\varepsilon_\eta(\lambda) = \varepsilon_{4,3}(\lambda)$ dados de acordo com Eq.(2.14) e Eq.(2.18).

A mudança de regime é própria ao modelo RS1, em que $a < \infty$. Para o modelo RS2, em que $a \rightarrow \infty$, a Radiação de Corpo Negro corresponde ao espaço AdS₅ em sua totalidade. A partir da mesma relação de dispersão define-se

$$R(T) = \frac{3\mathbf{c}_4}{V_s} \sum_{\vec{n}, \eta} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (3.10)$$

em que $V_s = \int \sqrt{g_s} dz d\vec{x}^1$ corresponde à extensão de AdS₅ preenchido por $\mathbf{A}(x, z)$.

As correspondentes Leis de Stefan-Boltzmann e de Wien são tais que

$$R(T) \simeq T^5 \quad \frac{1}{\lambda T} \approx 6(1 - e^{-6}). \quad (3.11)$$

¹ $g_s = \det(g_{ab})$ com $a, b \neq 0$.

3.2 Correspondência AdS/CFT, $AdS_5 \times S^5$

A Teoria de Yang-Mills Conforme identificada pela Correspondência AdS/CFT em 4 dimensões está relacionada à geometria de um espaço anti-de Sitter em 5 dimensões AdS_5 , subjacente à teoria de cordas cuja consistência é satisfeita pelo complemento dimensional compacto S^5 .

O espaço $AdS_5 \times S^5$ de métrica parametrizada por

$$ds^2 = r^2 [z^{-2}(dz^2 + dx^\mu dx_\mu) + d\theta^2] , \quad (3.12)$$

em que r é a curvatura conforme do espaço e $d\theta$ é o elemento angular de S^5 , com $0 < z < \infty$, fornece para o campo $A(x, z, \theta)$ a equação de onda

$$\left[\partial_z^2 - \frac{3}{z} \partial_z + \partial^\mu \partial_\mu + \frac{1}{z^2} \Delta_{S^5} \right] A(x, z, \theta) = 0 , \quad (3.13)$$

em que Δ_{S^n} é o operador de Laplace-Beltrami em S^n com a propriedade

$$[\Delta_{S^n} + l(l + n - 1)] Y_l(\theta) = 0 . \quad (3.14)$$

As autofunções $Y_l(\theta)$ correspondem aos harmônicos esféricos $Y_{l_n \dots l_1}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ em n dimensões, com $l \doteq l_n$. Visto que $l_n \geq l_{n-1} \geq \dots \geq l_2 \geq |l_1| \geq 0$, para cada valor de l existem δ_l degenerescências associadas a tais autofunções tal que

$$\delta_l = \frac{(2l + n - 1)}{(n - 1)!} \prod_{i=1}^{n-2} (l + i) , \quad (3.15)$$

com $n = 5$ para o presente caso. A solução da equação de onda é dada por

$$A(x, z, \theta) = \mathbf{A} \left[(\kappa z)^2 H_{l+2}^{(1)}(\kappa z) \right] e^{ik^\mu x_\mu} Y_l(\theta) . \quad (3.16)$$

O aspecto oscilatório das funções de Hankel expresso em Eq.(3.6) determina os possíveis valores de κ por meio de condições de contorno aplicadas às coordenadas conforme $z = a$ e $z = b$, com $b > a$. Similarmente ao modelo de Randall-Sundrum, a correspondente relação de dispersão dos fótons é dada por

$$\frac{\nu^2}{c^2} = \frac{\vec{n}^2}{4\ell^2} + \frac{\eta^2}{4(b - a)^2} , \quad (3.17)$$

em que os graus de liberdade angulares são absorvidos em $\eta = 0, 1, \dots$

Segundo Eq.(3.6), existem $\gamma \approx 2a\eta/(b-a)$ valores atribuíveis à l para cada valor de η , conferindo ao índice conforme δ_η degenerescências energéticas com

$$\delta_\eta = \sum_{l=0}^{\gamma} \delta_l = \frac{1}{5!}(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)(\gamma+4)(2\gamma+5). \quad (3.18)$$

Visto a potencial disparidade entre l e $b-a$, os modos energéticos em que as excitações conforme se fazem presentes são destacados dos demais, de modo que

$$R(T) = \frac{1}{V_z} \left[2c_3 \sum_{\eta=0} + 3c_4 \sum_{\eta \neq 0} \right] \frac{\delta_\eta \cdot h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (3.19)$$

em que $V_z = \ell^3(r/z)^3$ é a extensão ocupada por $A(x, z, \theta)$ em \mathcal{M}^3 à coordenada conforme z , com $a \leq z \leq b$.

Os termos em que $\eta = 0$ restringem a correspondente contribuição radiativa ao subespaço $\mathcal{M}^{1,3}$, recuperando a radiação de corpo negro usual. Os termos em que $\eta \neq 0$ abrangem a dimensão conforme z no processo radiativo, para os quais a propagação é considerada ao longo do espaço AdS_5 . As Leis de Stefan-Boltzmann e de Wien para o cenário $AdS_5 \times S^5$ são respectivamente expressas por

$$R(T) = \frac{z^3}{r^3} (\sigma_B T^4 + \sigma_\eta T^{10}) \quad 1 - e^{-1/\lambda T} = \frac{1}{\lambda T} \frac{1 + \epsilon_\eta(\lambda)}{5 + 11\epsilon_\eta(\lambda)}, \quad (3.20)$$

com

$$\sigma_\eta = \frac{4\pi kc}{5!} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) \Gamma(10) \zeta(10) \left(\frac{k}{hc} \right)^9 (2a)^6 \quad (3.21)$$

$$\epsilon_\eta(\lambda) = \frac{2}{5!} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) \left(\frac{2a}{\lambda} \right)^6. \quad (3.22)$$

Tais expressões são semelhantes às obtidas para um espaço-tempo $\mathcal{M}^{1,3} \times \mathbb{T}^6$ com as Leis de Radiação de Corpo Negro ordinárias válidas no regime de baixas energias. O correspondente espectro radiativo apresenta dois máximos de intensidade ao longo da mudança de regime.

Desvios experimentais do espectro radiativo em relação à Lei de Planck a pequenos comprimentos de onda $\varepsilon_{\text{exp}}(\lambda^*)$ limitam os valores das coordenadas conforme a e b de modo que, a menos de fatores numéricos,

$$\varepsilon_\eta(\lambda^*) < \varepsilon_{\text{exp}}(\lambda^*) \rightarrow a < b < a + \lambda^{*6} a^{-5}. \quad (3.23)$$

3.3 Comentários

A altas energias as Leis de Stefan-Boltzmann e de Wien são compatíveis com a totalidade dimensional dos cenários AdS_5 e $\text{AdS}_5 \times \mathcal{S}^5$, enquanto a baixas energias as Leis de Stefan-Boltzmann e de Wien usuais são resgatadas, com a radiação confinada a cada uma das infinitas 3-brane $\mathcal{M}^{1,3}$ ao longo da dimensão conforme.

A mudança de regime expressa pelo aspecto aditivo das Leis de Radiação de Corpo Negro para o espaço AdS_5 é induzida pela amplitude finita dos valores da coordenada conforme referente ao modelo RS1, o que não se aplica ao modelo RS2.

As coordenadas conforme a e b do espaço $\text{AdS}_5 \times \mathcal{S}^5$ entre as quais o campo eletromagnético está compreendido são tais que, de acordo com Eq.(3.23), para $a \rightarrow 0$ pode-se tomar $b \rightarrow \infty$, restaurando a simetria conforme original da teoria enquanto preserva a presente mudança de regime a uma escala de energia finita.

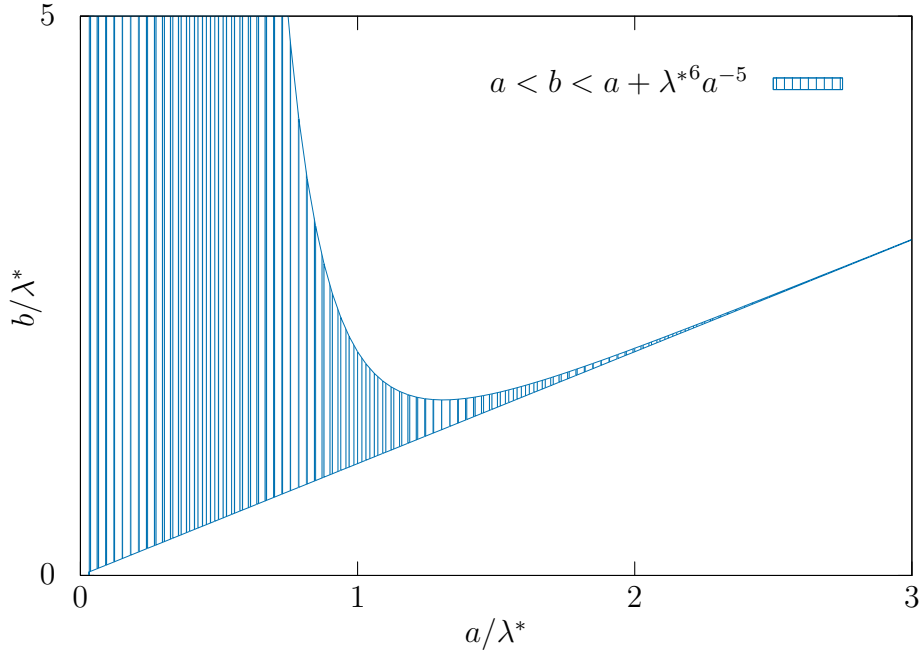


Figura 3.1: Domínio das coordenadas conforme a e b de acordo com a condição expressa por Eq.(3.23) dado pela área preenchida do gráfico.

No âmbito da correspondência AdS/CFT, espera-se uma relação entre campos normalizáveis no *bulk* de $\text{AdS}_5 \times \mathcal{S}^5$ e operadores de Yang-Mills em sua fronteira.

Como os primeiros são campos vetoriais, os operadores de Yang-Mills correspondentes também o são e representam *glueballs* de *spin* 1.

Analisando espaços assintoticamente anti-de Sitter de $n + 1$ dimensões com fronteiras $\mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S}$ compacta e $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathcal{S}$ não compacta, Witten [12] estendeu o trabalho de Hawking e Page [36] à luz da correspondência AdS/CFT. Para a fronteira $\mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{S}$ há uma transição de fase para a configuração espaço-temporal a uma certa temperatura crítica, acima da qual o espaço-tempo Schwarzschild-AdS prevalece sobre o espaço AdS, correspondente ao regime de baixas energias.

Tal propriedade corresponde a uma relação confinamento/desconfinamento para teorias de calibre. Para fronteiras $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathcal{S}$, o espaço Schwarzschild-AdS domina para temperaturas não nulas, caracterizando apenas a fase de desconfinamento (a menos que se considere uma fatia do espaço-tempo, para a qual ambos regimes estão presentes [37–39]). O cenário Schwarzschild-AdS não é explorado, logo os resultados apresentados podem ser considerados parciais.

4

O Corpo Negro em Cenários Extraterrestres

4.1 Observações Astronômicas

As observações cada vez mais precisas e numerosas de eventos celestes ao longo das últimas décadas favoreceram o crescimento notável da astronomia. Anãs brancas, estrelas de nêutrons e erupções de raios gama são hoje laboratórios frutíferos para a astrofísica de altas energias, conduzindo a avanços significativos.

Embora o espectro de tais fontes seja modificado devido às suas peculiaridades (composição química, campo magnético) e à absorção de fótons pelo meio interestelar, a parametrização fornecida pela Radiação de Corpo Negro permite comparar as propriedades espectrais das mesmas de maneira consistente [40–44].

Considerações teóricas acerca de seus possíveis mecanismos de emissão sugerem a presença de componentes distintas em tais espectros radiativos. Mesmo sem uma descrição completa destes, a combinação de uma componente empírica modelada por uma lei de potência (ou variante) com uma componente térmica expressa pela Lei de Planck tem sido bem-sucedida em retratá-los [45–49].

Leis de potência, bem como suas variantes, são encontradas em distribuições de intensidade de terremotos, padrões de alimentação de espécies e em vários sistemas de interesse, revelando regularidades subjacentes aos mesmos. Seu entendimento, ainda parcial, é essencial para teoria de fenômenos críticos [50].

Modelos de ajuste espectral baseados em leis de potência nem sempre refletem processos físicos compatíveis com os parâmetros das fontes emissoras consideradas,

de modo que a aplicabilidade dos mesmos é questionável.

A Radiação de Corpo Negro para os cenários explorados nos capítulos **2** e **3** tem seu espectro dado por duas componentes de mesma natureza, cada qual relevante em certo regime de energia. Devido à aparente ubiquidade com que a Lei de Planck é observada nos espectros de anãs brancas, estrelas de nêutrons e erupções de raios gama, é oportuno verificar a compatibilidade entre a componente empírica destes e uma potencial emissão de corpo negro com dimensionalidade diferente do usual.

Deste modo, como as Leis de Planck em tais fontes situam-se ao longo das baixas energias de detecção de seus espectros, os fótons excedentes seriam idealmente representados por uma distribuição energética em mais dimensões, tal como em $\mathcal{M}^{1,3} \times \mathbb{T}^{D-3}$, dada por

$$N_D(T, \nu) \propto \nu^{D-1} (e^{\nu/T} - 1)^{-1}. \quad (4.1)$$

Os modelos fenomenológicos de ajuste mais empregados para descrever as componentes ‘não-térmicas’ de tais espectros são dados por: lei de potência (PL) com $N_{\text{PL}}(\nu) \propto \nu^\alpha$, lei de potência com *cutoff* (CPL) com $N_{\text{CPL}}(\nu) \propto \nu^\alpha e^{-\beta\nu}$, e função de Band, em que há transição suave de uma CPL para uma PL à certa energia [51].

A distribuição energética de fótons em espaços com mais dimensões $N_D(T, \nu)$ concorda com as expressões de $N_{\text{PL}}(\nu)$ e de $N_{\text{CPL}}(\nu)$ respectivamente a baixas e a altas energias, com α associado à dimensionalidade do espaço e β à temperatura do espectro. As porções da função de Band estão trocadas com relação aos limites de energia de $N_D(T, \nu)$, em que

$$\nu \ll T \rightarrow N_D(T, \nu) \propto \nu^{D-2} \quad \sim \text{PL} \quad (4.2)$$

$$\nu \gg T \rightarrow N_D(T, \nu) \propto \nu^{D-1} e^{-\nu/T} \quad \sim \text{CPL} \quad (4.3)$$

Tais resultados indicam que modelos físicos para a Radiação de Corpo Negro em espaços-tempos com dimensões extras são capazes de reproduzir o espectro observado de objetos astrofísicos ao considerá-los imersos em tais espaços, agregando valor experimental aos desdobramentos teóricos recentes.

Algumas estrelas de nêutrons têm seus espectros descritos com o emprego de duas componentes de corpo negro usuais referentes a distintas regiões da mesma a diferentes temperaturas, com ou sem lei de potência adicional [52, 53].

Como à componente de menor temperatura é atribuída uma área de emissão maior que a da componente de maior temperatura, encobrindo-a para baixas energias, tal cenário assemelha-se ao constituído por um corpo negro com duas componentes dimensionais distintas a uma mesma e suficientemente baixa temperatura.

Tais cenários seriam dificilmente distinguíveis, podendo ambos inclusive exibir dois máximos de emissão em seus espectros. A combinação de duas componentes de corpo negro relativas à mesma região do espaço $\mathcal{M}^{1,d}$ a diferentes temperaturas (uma estrela aquecida a T_1 em sua superfície cuja atmosfera a T_2 tenha espessura desprezível comparado ao seu raio) tem distribuição radiativa dada por

$$R_{T_1, T_2}(\lambda) \simeq \left[(e^{1/\lambda T_1} - 1)^{-1} + (e^{1/\lambda T_2} - 1)^{-1} \right] \lambda^{-(d+2)}, \quad (4.4)$$

com a condição de máximo local, em que $R'(\lambda^*) = 0$, expressa pela equação

$$d + 2 = \frac{(e^{x_1} - 1)^{-1} x_1 / (1 - e^{-x_1}) + (e^{x_2} - 1)^{-1} x_2 / (1 - e^{-x_2})}{(e^{x_1} - 1)^{-1} + (e^{x_2} - 1)^{-1}} \quad (4.5)$$

em que $x_j = 1/\lambda^* T_j$. Como $x/(1 - e^{-x})$ é uma função estritamente crescente, para cada par de temperaturas T_1 e T_2 há um único valor de λ^* para o qual $R'(\lambda^*) = 0$.

As similaridades entre os modelos fenomenológicos de ajuste pré-existentes e a distribuição energética de fótons em espaços com mais dimensões, juntamente com a reprodução por parte desta da multiplicidade de máximos de emissão ora observados, acrescentam relevância à ideia de um espaço-tempo com dimensões além das perceptíveis ao homem, ainda que intrinsecamente tais objetos não sejam corpos negros ideais em equilíbrio termodinâmico.

As temperaturas associadas à emissão térmica de anãs brancas e estrelas de nêutrons são da ordem de $0,1 \sim 1$ keV, enquanto as temperaturas consoantes com a radiação de corpo negro emitida por erupções de raios gama (GRB) são superiores a 100keV. Estes naturalmente se apresentam como laboratórios propícios à procura por dimensões extras à medida em que medições mais completas de seus espectros pelos recentes observatórios em órbita, como o Telescópio Espacial Fermi, revelam a natureza de tais pulsos energéticos [54, 55].

4.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker plana

Com a proposta da inflação cósmica [56] no início dos anos 80 respondendo pela formação da estrutura de larga escala do universo e com as observações de supernovas no fim dos anos 90 confirmando a expansão acelerada do mesmo, cosmologia tornou-se uma área extremamente ativa nas últimas décadas. Medidas da Radiação Cósmica de Fundo (CMB), o espectro de corpo negro mais notório da natureza, fornecem limites sobre parâmetros do modelo cosmológico vigente.

Considerada o modelo padrão cosmológico, a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker é a solução exata das equações de Einstein descrevendo um universo espacialmente homogêneo e isotrópico [57–60]. Medições sugerem que o mesmo seja plano, com elemento de linha dado por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 d\vec{x}^2 , \quad (4.6)$$

em que $a(t)$ é o fator de escala promovendo a expansão das coordenadas espaciais.

Segundo a presente métrica, um elemento de linha nulo $ds^2 = 0$ confere a sinais luminosos uma taxa de deslocamento dada por

$$\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = \frac{c}{a(t)} , \quad (4.7)$$

de modo que para o instante presente t_* adota-se $a(t_*) = 1$, resgatando o valor de literatura c para a propagação da luz.

O campo eletromagnético $\mathbf{A}(t, \vec{x})$ para a presente métrica tem como solução

$$\mathbf{A}(t, \vec{x}) = \mathbf{A} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \mathbf{T}(t) , \quad (4.8)$$

com sua componente temporal $\mathbf{T}(t)$ dada por

$$\ddot{\mathbf{T}} + \frac{3\dot{a}}{a} \dot{\mathbf{T}} + \frac{k^2}{a^2} \mathbf{T} = 0 . \quad (4.9)$$

Cada função atribuível ao fator de escala $a(t)$ tem sua evolução relacionada à pressão e densidade de energia do universo pelas equações de Einstein. Os casos notáveis correspondentes ao universo dominado por radiação, matéria e energia escura são considerados.

Correspondente à fase que se segue à inflação inicial e dura até a recombinação, o universo dominado por radiação tem como fator de escala $a_r(t) = a_r t^{1/2}$, logo

$$\mathbb{T}_r(t) = \left[h_0^{(2)} \left(\frac{2k}{a_r} t_*^{1/2} \right) \right]^{-1} h_0^{(2)} \left(\frac{2k}{a_r} t^{1/2} \right), \quad (4.10)$$

com $h_0^{(2)}(z) = ie^{-iz}/z$ representando a função de Hankel esférica de segunda espécie e ordem 0. O fator de escala para o qual o conteúdo de matéria do universo se sobrepõe às outras formas de energia é dado por $a_m(t) = a_m t^{2/3}$, então

$$\mathbb{T}_m(t) = \left(\frac{t_*}{t} \right)^{1/3} \left[h_1^{(2)} \left(\frac{3k}{a_m} t_*^{1/3} \right) \right]^{-1} h_1^{(2)} \left(\frac{3k}{a_m} t^{1/3} \right), \quad (4.11)$$

em que $h_1^{(2)}(z) = -e^{-iz}(z-i)/z^2$ é a função de Hankel esférica de segunda espécie e ordem 1. À medida que o universo expande, os conteúdos de radiação e matéria são diluídos e o termo de constante cosmológica de fator de escala dado por $a_v(t) = e^{Ht}$ domina a densidade de energia, assim

$$\mathbb{T}_v(t) = \left[h_1^{(1)} \left(\frac{k}{H} e^{-Ht_*} \right) \right]^{-1} h_1^{(1)} \left(\frac{k}{H} e^{-Ht} \right), \quad (4.12)$$

em que $h_1^{(1)}(z) = -e^{iz}(z+i)/z^2$ é a função de Hankel esférica de primeira espécie e ordem 1.

Acompanhando a evolução de $\mathbb{T}(t)$ para instantes imediatamente posteriores ao presente, com $t = t_* + \delta t$, verifica-se em cada caso que

$$\mathbb{T}(t_* + \delta t) \approx e^{-i\omega(t_*)\delta t}. \quad (4.13)$$

Neste limite, as respectivas relações de dispersão correspondem a

$$\omega(t) = \frac{kc}{a(t)}. \quad (4.14)$$

A métrica de FLRW plana se assemelha a de Minkowski quanto à solução de onda do campo eletromagnético $\mathbf{A}(t, \vec{x})$. Considerando as respectivas modificações em Eq.(1.4) e Eq.(1.5) devido ao fator de escala,

$$V \rightarrow V \cdot a(t)^3 \quad c \rightarrow c/a(t), \quad (4.15)$$

encontra-se para a Lei de Stephan-Boltzmann correspondente a expressão

$$R(T) = \sigma_B T(t)^4, \quad (4.16)$$

em que a temperatura $T(t) = T/a(t)$ do corpo negro varia efetivamente com o fator de escala à medida que o universo expande.

A Lei do deslocamento de Wien nestes cenários é idêntica à sua forma ordinária no espaço de Minkowski, pois as modificações introduzidas pela métrica não interferem em sua dedução. Entretanto, como $\lambda(t) = \lambda \cdot a(t)$ devido ao fator de escala, a relação entre a temperatura e o comprimento de onda em que o corpo negro irradia com maior intensidade é apropriadamente dada por

$$\lambda(t) \cdot T(t) = 2.897 \cdot 10^{-3} \text{mK}. \quad (4.17)$$

Sobretudo, o resultado $R(T) \propto a(t)^{-4}$ é válido separadamente para os casos em que radiação, matéria ou vácuo dominam o conteúdo energético do universo, contanto que não haja intercâmbio entre tais formas de energia, em concordância com as equações de Friedmann.

Tais resultados, também deduzidos para as métricas de FLRW curvas [61] por meio de uma ação invariante conforme, refletem a dimensionalidade do espaço em questão. Tal propriedade é discutida de maneira concisa nas conclusões.

4.3 Notas sobre a métrica de Schwarzschild

A primeira solução não-trivial exata das equações de Einstein, deduzida de forma independente por Schwarzschild [62] e Droste [63] há cerca de cem anos e conhecida como métrica de Schwarzschild, descreve o espaço-tempo sem constante cosmológica externo a uma distribuição esférica de massa com carga elétrica e momento angular nulos. Tal métrica, expressa por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2, \quad (4.18)$$

contém em si o campo gravitacional produzido pela correspondente distribuição de massa, sendo uma aproximação útil para descrever objetos astronômicos em baixa rotação como muitas estrelas e planetas.

A componente radial da equação de onda para a métrica de Schwarzschild não possui solução analítica, apesar dos esforços neste sentido [64–67]. O comportamento assintótico ($r \rightarrow \infty$) de ondas eletromagnéticas em tal espaço é marcado por funções de Hankel esféricas.

Mesmo sem uma relação de dispersão analiticamente definida, os fótons correspondentes têm seus comprimentos de onda proporcionalmente modificados ao propagarem-se ao longo da coordenada radial, de modo que o comprimento de onda λ de um fóton emitido em r_1 será alterado ao alcançar r_2 ($r_1, r_2 > r_S \equiv 2Gm/c^2$) de acordo com a relação

$$1 + \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 - r_S/r_2}{1 - r_S/r_1}}. \quad (4.19)$$

Tal efeito, conhecido como ‘desvio para o vermelho’ quando $\delta\lambda/\lambda > 0$, afeta igualmente todo o espectro radiativo de um corpo negro de pequenas dimensões imerso em tal métrica. As conhecidas Leis de Stefan-Boltzmann e de Wien são mantidas, a menos do fator adimensional expresso em Eq.(4.19).

A métrica de Schwarzschild compreende, devido à presença de um horizonte de eventos em $r = r_S$, a realização mais simples de um buraco negro [68]. Considerações termodinâmicas associadas a efeitos quânticos indicam que o mesmo irradia como um corpo negro através de seu horizonte de eventos [69] com os fótons correspondentes sujeitos aos efeitos da métrica na medida em que se propagam, os chamados *greybody factors* [70].

5

Considerações Finais e Propostas

Com relação à Radiação de Corpo Negro em cenários toroidais $\mathcal{M}^{1,d} \times \prod_{i=1}^n \mathbb{T}^{d_i}$, percebe-se que a baixas temperaturas a energia (e grandezas relacionadas) correspondente ao gás de fótons é subextensiva, $E \propto \ell^d T^{d+1}$, em concordância com a dimensão efetiva do espaço. Compactificação confere interpretação física à Lei de Planck no âmbito de mecânica estatística não-extensiva [71–75], aplicada também à radiação de Hawking [76]. Adicionalmente, ainda que as excitações energéticas estritamente compactas discutidas no final da seção **2.3** predominem sobre as demais, não há em princípio propagação (e logo detecção) associada às mesmas.

A compacidade de uma ou mais dimensões espaciais é aparentemente suficiente, mas talvez não necessária, à mudança de regime. O subespaço \mathbb{T}^{D-d} do cenário $\mathcal{M}^{1,d} \times \mathbb{T}^{D-d}$ considerado no capítulo **2** incorpora todas suas dimensões à respectiva relação de dispersão, enquanto o subespaço \mathcal{S}^5 referente ao espaço $\text{AdS}_5 \times \mathcal{S}^5$ considerado no capítulo **3** induz correlações entre os graus de liberdade, produzindo as degenerescências internas δ_l e δ_η que, devidamente consideradas, dão conta da correta dimensionalidade das Leis de Radiação de Corpo Negro a altas energias.

A Radiação de Corpo Negro em cenários Anti-de Sitter apresenta características similares às presentes em cenários toroidais, principalmente quanto à dimensionalidade efetiva. Em ambos casos a conexão entre os desdobramentos teóricos vigentes, com teorias de dimensionalidade elevada, e a percepção observacional do espaço-tempo é obtida.

Argumenta-se que no âmbito da teoria de cordas as dimensões extras devem ser representadas por uma variedade de Calabi–Yau compacta [77]. As dimensões compactas toroidais e esféricas consideradas possuem mesmo caráter, $\mathbb{T}^n = \prod^n \mathcal{S}$, sendo igualmente aplicáveis e conduzindo a mesmos resultados quando o forem. Embora ‘genéricas’, tais dimensões são absorvidas em Eq.(1.15) da mesma forma que dimensões compactas mais complexas seriam.

Os espectros de certas emissões astrofísicas colocam-se como proposta observacional à detecção de potenciais dimensões extras, vide seção 4.1, devido às suas características peculiares. Medidas recentes da CMB [78] sugerem a não-existência destas, mas seu espectro de baixa temperatura não é a fonte de informação mais promissora sobre as mesmas, lembrando que tais efeitos são esperados a altas energias.

O plasma de *quark-gluons* produzido a altas temperaturas em colisões relativísticas de íons pesados, concebido como um estado termicamente equilibrado da matéria em que *quarks* e *gluons* encontram-se desconfinados, é idealmente retratado para estes últimos por uma Lei de Planck a $T \gg 200\text{MeV}$ [79–83]. Embora tais partículas não alcancem os instrumentos do RHIC ou LHC onde são produzidas senão após hadronização, a correspondente abundância de fótons apresenta-se como potencial campo de prova ao suposto equilíbrio térmico com correlações e à detecção de dimensões extras.

A manifestação física da energia de ponto zero expressa pelo Efeito Casimir, resultante da diferença entre duas configurações de vácuo quântico [84,85], contém em sua concepção pioneira, em que placas condutoras paralelas definem condições de contorno sobre o campo eletromagnético, a ideia de um espaço-tempo compacto. Sob a perspectiva de cenários compactos, a Lei de Stefan-Boltzmann usual é para a Radiação de Corpo Negro em $\mathcal{M}^{1,3} \times \mathbb{T}^{D-3}$ a baixas energias similar ao Efeito Casimir para o vácuo quântico em $\mathcal{M}^{1,2} \times \mathbb{T}^1$.

Referências Bibliográficas

- [1] G. Burdman and A. G. Dias, JHEP **01** (2007) 041. 1
- [2] Zhi-Qiang Guo and Bo-Qiang Ma, JHEP **09** (2009) 091. 1
- [3] G. Nordström, Physikalische Zeitschrift **15**, 504 (1914). 1, 7
- [4] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) 966 (1921). 1, 7
- [5] O. Klein, Zeitschrift für Physik A **37**, 895 (1926) 1, 7
- [6] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998). 1
- [7] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **436**, 257 (1998). 1
- [8] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999). 1
- [9] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999). 1
- [10] J. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998). 1
- [11] S.S. Gubser and I.R. Klebanov and A.M. Polyakov, Physics Letters B, 428, 1–2 (1998) 105 - 114. 2
- [12] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 505 (1998). 2, 27
- [13] Igor R. Klebanov and Edward Witten, Nucl.Phys. B556 (1999) 89-114 2
- [14] D. Berenstein, JHEP **0601** (2006) 125 2
- [15] Susskind, L., Journal of Mathematical Physics 36, 11 (1995) 6377–6396. 2
- [16] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150]. 2
- [17] Susskind, Leonard and Witten, Edward, arXiv hep-th/9805114 (1998). 2
- [18] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, Phys.Rept. 323, 183-386 (2000) 2

- [19] Bousso, R., *Rev.Mod.Phys.* **74**, 3 (2002) 825–874. 2
- [20] S. Ryu and T. Takayanagi, *Phys.Rev.Lett.* **96** (2006) 181602 2
- [21] R. Lehoucq, *Eur. J. Phys.* **32** (2011) 1495–1514. 2
- [22] I. I. Beterov et al, *New J. Phys.* **11** (2009) 013052. 2
- [23] E. Theocharous, R. Deshpande, A. C. Dillon and J. Lehman, *Appl. Opt.* **45** (2006) 1093. 2
- [24] S. P. Theocharous, E. Theocharous and J. H. Lehman, *Infrared Physics & Technology* **55** (2012) 299. 2
- [25] M. Smerlak, *Eur. J. Phys.* **32** (2011) 1143–1153. 2
- [26] A M Garcia-Garcia, *Phys. Rev. A* **78** 023806 (2008). 3
- [27] T. R. Cardoso and A. S. de Castro, *Rev. Bras. Ens. Fis.* **27**, 559 (2005). 4, 8
- [28] H. Alnes, F. Ravndal and I. K. Wehus, *J. Phys. A* **40**, 14309 (2007). 4
- [29] S. Weinberg, *Phys. Lett. B* **143**, 97 (1984). 4
- [30] F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson, J. M. C. Malbouisson and A. E. Santana, *Quantum field theory on toroidal topology: Algebraic structure and applications*, *Phys. Reports* **539** (2014) 3, 135-224. 7
- [31] R. Ramos and H. Boschi-Filho, *Physica A*, **393** (2014) 261. 7
- [32] V I Sapritsky, *Metrologia*, **32** (1995) 411-417. 12
- [33] H W Yoon and C E Gibson, *Metrologia*, **37** (2000) 429-432. 12
- [34] R Friedrich and J Fischer, *Metrologia*, **37** (2000) 539-542. 12
- [35] H W Yoon, C E Gibson and P Y Barnes, *Metrologia*, **40** (2003) S172-S176. 12
- [36] S. W. Hawking and D. N. Page, *Commun. Math. Phys.* **87**, 577 (1983). 27
- [37] H. Boschi-Filho, N. R. F. Braga, and C. N. Ferreira, *Phys. Rev. D* **73** 106006 (2006), **74** 089903(E) (2006). 27
- [38] C. P. Herzog, *Phys. Rev. Lett.* **98** 091601 (2007). 27
- [39] C. A. Ballon Bayona, H. Boschi-Filho, and N. R. F. Braga, L. A. Pando Zayas, *Phys. Rev. D* **77** 046002 (2008) 27
- [40] N. E. White, L. Stella and A. N. Parmar, *The X-ray spectral properties of accretion disks in X-ray binaries*, *Ap. J.* **324** (1988) 363. 29

- [41] S. Gezari et al, Discovery of the ultra-bright type II-L Supernova 2008es, *Ap. J.* **690** (2009) 1313. 29
- [42] A. Pe'er and F. Ryde, A theory of multicolor blackbody emission from relativistically expanding plasmas, *Ap. J.* **732** (2011) 49. 29
- [43] S. A. Olausen et al, X-ray observations of high-B radio pulsars, *Ap. J.* **764** (2013) 1. 29
- [44] P. Kaaret et al, Direct detection of an ultraluminous ultraviolet source, *Ap. J.* **714** (2010) L167. 29
- [45] F. Ryde, The cooling behavior of thermal pulses in gamma-ray bursts, *Ap. J.* **614** (2004) 827. 29
- [46] R. C. Hickox, R. Narayan and T. R. Kallman, Origin of the soft excess in X-ray pulsars, *Ap. J.* **614** (2004) 881. 29
- [47] F. Ryde, Is thermal emission in gamma-ray bursts ubiquitous?, *Ap. J.* **625** (2005) L95. 29
- [48] P. A. Evans and C. Hellier, Why do some intermediate polars show soft X-ray emission?, *Ap. J.* **663** (2007) 1277. 29
- [49] C. Y. Hui, K. S. Cheng and R. E. Taam, Diffuse X-ray emission in globular cluster cores, *Ap. J.* **700** (2009) 1233. 29
- [50] C. Domb, *The Critical Point* (Taylor & Francis, 1996) 29
- [51] D. Band et al, BATSE observations of gamma-ray burst spectra, *Ap. J.* **413** (1993) 281. 30
- [52] A. Manzali, A. de Luca and P. A. Caraveo, Phase-resolved spectroscopy of the Vela pulsar with XMM-Newton, *Ap. J.* **669** (2007) 570. 30
- [53] A. Tiengo, P. Esposito and S. Mereghetti, The first deep look at the soft X-ray emission of a magnetar, *Ap. J.* **680** (2008) L133. 30
- [54] F. Ryde et al, Gamma-ray burst spectral correlations, *Ap. J.* **652** (2006) 1400. 31
- [55] E. C. Bellm, RHESSI tests of quasi-thermal gamma-ray burst spectral models, *Ap. J.* **714** (2010) 881. 31
- [56] Alan H. Guth, The Inflationary Universe, *Phys. Rev. D* **23** (1981) 347. 32
- [57] A. Friedmann, Über die Krümmung des Raumes, *Zeitschrift für Physik A* 10 (1): 377 (1922). 32
- [58] G. Lemaître, l'Univers en expansion, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles A53*: 51 (1933) 32

- [59] H. P. Robertson, Kinematics and world structure, *Ap. J.* **82** (1935) 284. 32
- [60] A. G. Walker, On Milne's theory of world-structure, *Proceedings of the London Mathematical Society* (1937) 2 42 (1): 90. 32
- [61] Y. Deng and P. D. Mannheim, Blackbody Radiation in a curved Robertson-Walker background, *Astrophysics and Space Science* 135 (1987) 261-269. 34
- [62] K. Schwarzschild, "On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory", *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.)* (1916) 189. 34
- [63] J. Droste, "The field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field", *Proc. R. Neth. Acad. Arts Sci.*, 19 (1): 197 (1917). 34
- [64] S. Persides, A New Approximation Method for Wave Theories, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 2355. 35
- [65] S. Persides, On the radial wave equation in Schwarzschild's space-time, *J. Math. Phys.* **14** (1973) 1017. 35
- [66] S. Persides, Scalar waves in the exterior of a Schwarzschild black hole, *J. Math. Phys.* **15** (1974) 885. 35
- [67] S. Persides, Global Properties of Radial Wave Functions in Schwarzschild's Space-Time, *Commun. math. Phys.* **48** (1976) 165. 35
- [68] D. Raine and E. Thomas, *Black Holes: an introduction*, Imperial College Press, 2nd edition. 35
- [69] P. C. Davies, Thermodynamics of black holes, *Reports on Progress in Physics* **41** 8 (2003). 35
- [70] Jorge Escobedo, *Greybody Factors: Hawking Radiation in Disguise* (Master's thesis supervised by prof. Jan de Boer), University of Amsterdam, Institute for Theoretical Physics, The Netherlands (2008). 35
- [71] C. Tsallis, F. C. Sá Barreto and E. D. Loh, Generalization of the Planck radiation law and application to the cosmic microwave background radiation *Phys. Rev. E* **52** (1995) 1447. 37
- [72] A. R. Plastino, A. Plastino, H. Vucetich, A quantitative test of Gibbs' statistical mechanics, *Phys. Lett. A* **207** (1995) 42. 37
- [73] E. K. Lenzi and R. S. Mendes, Blackbody radiation in nonextensive Tsallis statistics: Exact solution, *Phys. Lett. A* **250** (1998) 270. 37
- [74] S. Martínez et al, Blackbody radiation in a nonextensive scenario, *Phys. A* **295** (2001) 224. 37

- [75] M. Nauenberg, Critique of q-entropy for thermal statistics, *Phys. Rev. E* **67** (2003) 036114. 37
- [76] T. S. Biró, arXiv:1011.3442 (2010). 37
- [77] Shing-Tung Yau and Steve Nadis, *The shape of inner space: String Theory and the Geometry of the Universe's Hidden Dimensions*, Basic Books (2010). 38
- [78] F. Caruso and V. Oguri, The cosmic microwave background spectrum and an upper limit for fractal space dimensionality, *Ap. J.* **694** (2009) 151. 38
- [79] M. Panero, Geometric effects in lattice QCD thermodynamics, *PoS (LATTICE 2008)* 175. 38
- [80] G., G. Martínez, *Advances in Quark Gluon Plasma*, Proceedings of the 2011 Joliot Curie School (2011) arXiv:1304.1452 [nucl-ex]. 38
- [81] K. Tuchin, Particle Production in Strong Electromagnetic Fields in Relativistic Heavy-Ion Collisions, *Advances in High Energy Physics* (2013) 490495. 38
- [82] S. M. Sanches Jr., F. S. Navarra and D. A. Fogaça, The quark gluon plasma equation of state and the expansion of the early Universe, *Nucl. Phys. A*, **937** (2015) 1. 38
- [83] Yasuyuki Akiba et al, *The Hot QCD White Paper: Exploring the Phases of QCD at RHIC and the LHC*, e-Print: arXiv:1502.02730 [nucl-ex] (2015). 38
- [84] H. B. G. Casimir, On the attraction between two perfectly conducting plates, *Proc. R. Neth. Acad. Arts Sci.* **51** 793 (1948). 38
- [85] H. B. G. Casimir, *J. Chim. Phys. PCB*, **46** 407 (1949). 38