

Tese de Doutorado

**Dinâmica Gravitacional da Formação de Estruturas  
no Universo**

Martín Makler

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
Rio de Janeiro, Julho de 2001

*Aos meus pais e à  
minha irmã  
A Isaias Scheimberg  
(In Memoriam)*

## Agradecimentos

Toda lista de agradecimentos é injusta, pois é inevitável omitir nomes que deveriam constar nela. No entanto, seria ainda mais injusto deixar de mencionar aquelas pessoas ou entidades que recordei neste momento. A todos aqueles que omiti na lista à seguir, peço sinceras desculpas e agradeço pelo o apoio recebido.

Gostaria de manifestar a minha gratidão a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento desta tese e para a minha formação como físico e como cidadão.

Ao povo brasileiro que, mesmo sem sabê-lo, financia a nossa pesquisa através dos seus impostos.

A toda a comunidade do CBPF, por propiciar um excelente ambiente de estudo, pesquisa e amizade.

Aos meus orientadores, Takeshi Kodama e Maurício Calvão, pela infinita paciência, pelo estímulo, pela orientação e pelos ensinamentos de vida.

À minha família consagro agradecimentos especiais. Sou grato a todas as gerações, pelo exemplo de vida, pelo carinho e pela amizade.

Reservo o maior agradecimento aos meus pais, aos quais devo tudo o que sou. Obrigado pelo apoio infinito em todos os momentos, pela paciência inesgotável, pelo exemplo de vida, pelo carinho, pelo estímulo, enfim, pela minha vida.

A meu pai, pela inestimável ajuda na arte de programar e por inúmeras discussões sobre física e outros assuntos.

A Flavia Miguel, por ter iluminado o meu caminho durante quase toda a realização deste trabalho, por todo o apoio, carinho e amizade.

A Julieta Schachter, uma nova luz na minha vida.

À CFC, em particular a Myriam e Caride.

Ao grupo de cosmologia do CBPF e aos participantes do “Pequeno Seminário”, a Mario Novello, Nelson, Salim e Luiz.

Aos excelentes professores que motivaram meus estudos em física: Bernard Lesche, Luiz Davidovich, Simões, Felipe Acker, Yan, Ildeu, Moysés, Mário Mattos, Regina Célia, Tião

e Helayel.

A Ioav Waga por inúmeros comentários interessantes e referências.

Aos meus amigos e amigas, pelo apoio, pela estima e, principalmente, por sua amizade: Santiago, Renata, Renato, Hélio, Carla, Kelly, Delfim, André, Thiago e todos os demais. Aos colegas de sala e amigos do CBPF: Santini, Robson, Raphael, Gabriel, André, Márcia, Patrick, Cecília, Gino, Johana, Viviana, Alejandro, Javier, Alvaros (Nogueira e “Jean Luc Picard”), Cristine, Leonardo, Renato Klippert, Garín, Hérmán, Carla e muitos outros.

A todos aqueles que passaram pelo Clube de Astronomia de Niterói - Mário Schenberg e ajudaram a tornar esse sonho uma realidade. Em particular a Marcelo de Oliveira, idealista incansável e sonhador incurável. A Glória Queiróz por todo o apoio inicial, a Martha Ramsheid, Pedro Belga e Alexsander da Matta. Aos amigos e amigas do Clube, Alexandre, Juliana, Luciana, Noelí, André, Vinicius, Rodrigo, Rafael e todos os outros. A alguns professores do IF-UFRJ que estimularam, às vezes indiretamente, a minha ida ao CBPF.

Ao MST, por manter viva a esperança num país mais justo.

A todos os que lutam por um mundo mais igualitário, de paz, liberdade e justiça social. Por fim, devo agradecer ao CNPq pelo apoio à pesquisa e pela bolsa, sem a qual este trabalho não poderia ter sido realizado. Aproveito para fazer uma crítica quanto ao corte da taxa de bancada a partir de 1998, que tem impossibilitado muitos pós-graduandos de participarem em reuniões científicas no Brasil e no exterior, dificultando também a compra de material para a pesquisa. Além da volta dessa taxa, o próprio valor da bolsa deveria ser reajustado. Mais que um prêmio ou incentivo, a bolsa tem de ser um meio de sustentação financeira do pós-graduando, pois que requer dedicação exclusiva.

## Resumo

Apresentamos um estudo detalhado de uma classe de aproximações para a investigar a evolução não-linear das estruturas em grande escala. Nessas aproximações, certas quantidades dinâmicas são determinadas de forma local em função das condições iniciais. Isso as torna particularmente úteis em uma série de aplicações, como na determinação de características genéricas da dinâmica não-linear e no cálculo da função de massa.

A análise incluiu todas as quatro aproximações locais que já foram propostas na literatura e que são exatas nas simetrias plana, esférica e cilíndrica. Investigamos as propriedades gerais dessas aproximações, o seu limite assintótico e o tempo de colapso com condições iniciais genéricas. Verificamos que o comportamento dessas aproximações é muito semelhante entre si. Mostramos que as elas reproduzem com grande precisão o modelo do elipsóide homogêneo, são exatas no regime linear e prevêm o valor correto para o contraste de densidade até segunda ordem. Notamos que, em todas as aproximações locais, o tempo de colapso decresce assintoticamente com o inverso do módulo do cisalhamento e é pouco sensível à componente intermediária do cisalhamento inicial. Comparamos o resultado perturbativo das aproximações locais com a teoria de perturbação lagrangiana no caso de um elipsóide. Verificamos que uma das aproximações estudadas é exata, pelo menos até terceira ordem, nessa situação. Nós calculamos da função de massa das estruturas cosmológicas utilizando essas aproximações. Os resultados são comparados com o cálculo de Press-Schechter e com resultados de simulações numéricas. Mostramos que não é possível determinar as posições dos elementos de volume nessas aproximações. Ainda assim, seria possível comparar os resultados com as simulações de  $N$ -corpos ou dados observacionais. Nós propomos um método para fazer essa comparação.

Também investigamos o formalismo variacional para a dinâmica relativística de fluidos, visando a sua utilização em situações práticas. Aplicamos o princípio variacional para configurações esfericamente simétricas na relatividade geral e obtivemos as equações do colapso genérico. Determinamos a ação efetiva de um fluido relativístico com campo gravitacional fraco. Essa formulação permite obter equações de movimento efetivas a partir de um *Ansatz* para o perfil de densidade.

## Abstract

We present a detailed study of a class of approximations to investigate the nonlinear evolution of large-scale structures. In these approximations some dynamical quantities are determined locally in terms of the initial conditions. This makes them particularly useful in several applications, such as the determination of general features of the nonlinear evolution, or the computation of the mass function.

Our analysis includes all the four local approximations that have been introduced in the literature and that are exact in spherical, cylindrical and plane symmetries. We have investigated general properties of these approximations, their asymptotic limit and the collapse time with general initial conditions. We have verified that the behavior of these four approximations is very similar. It is shown that they reproduce very accurately the evolution of a homogeneous ellipsoid, they are exact in the linear regime and predict the correct value for the density contrast at second order. We noticed that in these approximations the collapse time decreases asymptotically with the inverse of the shear strength and is not very sensible to the intermediate component of the initial shear. We have compared the perturbative result of the local approximations against the Lagrangian Perturbation Theory in the case of an ellipsoid. It is shown that one of these approximations is exact, at least up to third order, in this case. We have calculated the mass function of cosmic structures in these approximations. The results are compared with the Press & Schechter formula and the outcome of  $N$ -body simulations. We have shown that it is not possible to recover the positions of the volume elements in the local approximations. However it is still possible to compare the results with the  $N$ -body simulations and the observational data. We propose a method to do such a comparison.

We have also investigated the variational formalism for relativistic fluid dynamics in view of its applications to practical situations. We have applied the variational principle to spherically symmetric configurations in general relativity and derived the equations of motion for the gravitational collapse. We have determined the effective action for a relativistic fluid in the weak-field limit. This formulation allows the derivation of effective equations of motion for a given *Ansatz* to the density profile.

# Índice

Agradecimentos . . . . .	i
Resumo . . . . .	iii
Abstract . . . . .	iv
Índice . . . . .	v
Lista de Figuras . . . . .	ix
Lista de Tabelas . . . . .	xi
<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>1 Formação de Estruturas em Grande Escala</b>	<b>13</b>
1.1 Introdução . . . . .	13
1.1.1 Uma Breve História Térmica do Universo . . . . .	14
1.1.2 O Universo Observado e os Parâmetros Cosmológicos . . . . .	17
1.1.3 As Eras Cosmológicas . . . . .	24
1.1.4 Resumo da Cosmologia Padrão . . . . .	26
1.2 Cosmologia Newtoniana e Coordenadas Co-móveis . . . . .	28
1.3 O Crescimento Linear das Estruturas . . . . .	37
1.3.1 Equações Cosmológicas de Fluidos . . . . .	38
1.3.2 Flutuações Isentrópicas e o Critério de Jeans . . . . .	41
1.3.3 Flutuações de Entropia e Modos de Isocurvatura . . . . .	48
1.3.4 Escoamento Potencial e Vorticidade . . . . .	49
1.3.5 Flutuações na Radiação Cós mica de Fundo . . . . .	54
1.4 Simulações Computacionais . . . . .	60

<b>2</b>	<b>Aproximações para a Evolução Não-Linear das Estruturas</b>	<b>63</b>
2.1	Introdução . . . . .	63
2.2	Dinâmica Lagrangiana de Fluidos . . . . .	68
2.2.1	A Aproximação de Zel'dovich . . . . .	79
2.2.2	Teoria de Perturbação Lagrangiana . . . . .	83
2.3	Aproximações Locais . . . . .	86
2.3.1	A Aproximação de Zel'dovich Modificada . . . . .	88
2.3.2	A Aproximação do Tensor de Deformação . . . . .	91
2.3.3	A Aproximação Completa de Zel'dovich . . . . .	97
2.3.4	Aproximações do Campo de Maré . . . . .	109
<b>3</b>	<b>Análise Comparativa e Aplicações das Aproximações Locais</b>	<b>131</b>
3.1	Características Gerais . . . . .	132
3.1.1	Comportamento Assintótico . . . . .	133
3.1.2	Não Integrabilidade das Posições . . . . .	137
3.2	Implementação Numérica . . . . .	141
3.3	Aplicações das Aproximações Locais . . . . .	146
3.3.1	O Elipsóide Homogêneo . . . . .	147
3.3.2	Condições Iniciais Genéricas . . . . .	156
3.3.3	A Função de Massa . . . . .	169
3.4	Teoria de Perturbação Lagrangiana e Aproximações Locais . . . . .	187
3.4.1	Aplicação da TPL a um Elipsóide Homogêneo . . . . .	192
3.5	Perspectivas futuras . . . . .	197
3.5.1	Simulações de $N$ -corpos . . . . .	198
3.5.2	Extensões das Aproximações Locais . . . . .	206
3.6	Discussão e Conclusões . . . . .	209
<b>4</b>	<b>Formalismo Variacional para a Hidrodinâmica Relativística</b>	<b>215</b>
4.1	Introdução . . . . .	215
4.2	A Ação para um Fluido Relativístico . . . . .	218



4.2.1	Simetria Esférica . . . . .	223
4.3	Relatividade Geral . . . . .	226
4.3.1	Simetria Esférica . . . . .	228
4.3.2	A Equação de Misner-Sharp . . . . .	232
4.3.3	Sistema Co-móvel no Limite $G = 0$ . . . . .	235
4.4	Campo Fraco . . . . .	240
4.4.1	A Nova Ação . . . . .	246
4.4.2	A Hamiltoniana . . . . .	251
4.4.3	Uma Aplicação Simples . . . . .	257
4.5	Extensões . . . . .	260
4.5.1	Escoamento Rotacional . . . . .	260
4.5.2	Fluido Perfeito Genérico . . . . .	262
4.5.3	Processos não Adiabáticos . . . . .	263
4.5.4	A Ação para Vários Fluidos . . . . .	265
4.6	Perspectivas . . . . .	270
4.6.1	O método de SPH . . . . .	271
4.6.2	Lagrangiana para Campo Fraco com Geometria Arbitrária . . . . .	276
4.7	Conclusão . . . . .	278
4.8	Um comentário sobre a solução homóloga . . . . .	281
	<b>Conclusões</b> . . . . .	<b>289</b>
	<b>A Dinâmica de Fluidos Relativística e Newtoniana</b> . . . . .	<b>293</b>
A.1	Dinâmica Newtoniana de Fluidos . . . . .	294
A.2	Formalismo de Projeção da Relatividade Geral . . . . .	300
A.2.1	Decomposição 1+3 Covariante da Relatividade Geral . . . . .	302
A.2.2	O modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . . . .	313
A.2.3	Uma Aproximação Local Relativística . . . . .	315
A.3	Aspectos Relativísticos na Hidrodinâmica Newtoniana . . . . .	319
A.4	Um Modelo Fenomenológico para a Matéria Escura e a Repulsão Cósmica . . . . .	325

A.4.1	Motivação . . . . .	325
A.4.2	Expansão Acelerada e Quintessência . . . . .	326
A.4.3	Equação de Estado Fenomenológica . . . . .	329
A.4.4	Um Gás de $d$ -Branas Como Fonte da Matéria e Energia Escuras? . . . . .	337
A.4.5	Conclusão . . . . .	341
A.5	Teoria de Perturbação e o Limite Newtoniano da Cosmologia Relativística . . . . .	343
A.5.1	Classificação das Perturbações Métricas e Escolha do Calibre . . . . .	344
A.5.2	Equações de Movimento e Limite Newtoniano . . . . .	348
A.5.3	Limite Newtoniano da Parte Elétrica do Tensor de Weyl . . . . .	351
<b>B</b>	<b>Estatística das Flutuações Primordiais</b> . . . . .	<b>355</b>
B.1	Funcionais de Probabilidade . . . . .	356
B.2	Distribuição de Probabilidades num Ponto . . . . .	361
B.2.1	Distribuição de Probabilidade para o Contraste de Densidade . . . . .	362
B.2.2	Distribuição dos Autovalores do Tensor de Deformação . . . . .	363
B.2.3	Funções Renormalizáveis e Flutuações Não Gaussianas . . . . .	366
B.3	Função Filtro e Flutuações na Massa . . . . .	369
<b>C</b>	<b>Expansão do Universo em Escala Local</b> . . . . .	<b>373</b>
C.1	Motivação . . . . .	373
C.2	Crítica ao conceito de expansão do espaço-tempo . . . . .	377
C.3	Um experimento para medir a expansão local . . . . .	382
C.4	Conclusão . . . . .	385
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>387</b>

# Lista de Figuras

2-1	Gráfico de $r_{\text{esf}}$ em função do contraste linear de densidade $\delta_L$ , para perturbações sobredensas com simetria esférica . . . . .	100
2-2	Ajustes para $r_{\text{esf}}$ em função de $\delta_L$ , para perturbações sobredensas com simetria esférica . . . . .	102
2-3	Gráfico de $r_{\text{cil}}$ em função do contraste linear de densidade $\delta_L$ , para perturbações sobredensas com simetria cilíndrica . . . . .	103
2-4	Gráfico de $r_{\text{esf}}$ em função de $\delta_L$ , para perturbações subdensas . . . . .	106
2-5	Gráfico de $r_{\text{cil}}$ em função de $\delta_L$ , para perturbações subdensas . . . . .	107
3-1	Evolução dos três eixos de um elipsóide homogêneo em todas as aproximações locais e comparação com o modelo analítico . . . . .	157
3-2	O tempo de colapso em função das condições iniciais para perturbações sobredensas para todas as aproximações locais . . . . .	160
3-3	O tempo de colapso em função das condições iniciais para perturbações subdensas para várias aproximações locais . . . . .	162
3-4	Fator de escala no colapso em função de $\sigma_3^0$ , obtido nos dois valores extremos de $\sigma_2^0$ , para perturbações sobredensas, em várias aproximações locais	165
3-5	Fator de escala no colapso em função de $\sigma_3^0$ , para perturbações subdensas	166
3-6	Distribuição de probabilidades para o contraste de densidade . . . . .	175
3-7	Distribuição de probabilidades do módulo do cisalhamento . . . . .	175
3-8	Distribuição de probabilidades da forma dos elementos de volume . . . . .	176
3-9	Gráfico da função $g(\alpha)$ . . . . .	180

3-10 A função de massa universal . . . . .	184
--	-----

# Lista de Tabelas

3.1	Tempo de colapso de um elipsóide homogêneo nas diversas aproximações locais. . . . .	156
3.2	Parâmetros de $g(\alpha_0)$ ajustados para a LTA e DTA. . . . .	167
3.3	Parâmetros de $f(a_c)$ ajustados para a LTA e DTA. . . . .	168

## Notação, convenções e definições

Notação	Significado	Capítulo(s)
$_{,i}$	derivada parcial em relação à coordenada co-móvel $x^i$	1 a 3
	derivada parcial em relação à coordenada $r^i$ ( $i = 1, 2, 3$ )	apêndice A
$_{,\mu}$	derivada parcial em relação à coordenada $r^\mu$ ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ )	4, apêndice A
$ _i$	derivada parcial em relação à coordenada lagrangiana $q_i$	2 e 3
$_{;\mu}$	derivada covariante em relação à coordenada $r^\mu$	4, apêndice A
$t$	tempo cosmológico	1, apêndice A
	coordenada temporal no sistema de Schwarzschild	4
$\tau$	tempo conforme ( $d\tau = dt/a$ )	1 a 3
	tempo próprio	4
$t$	$dt = d\tau/a = dt/a^2$	2 e 3
$T$	coordenada temporal na métrica co-móvel	4
$\dot{\phantom{f}}$	derivada com relação ao tempo $\tau$	1
	derivada lagrangiana com relação ao tempo $\tau$ ( $\dot{f} := \partial f / \partial \tau _{q=const}$ )	2 e 3
	derivada temporal total ( $\dot{V}^\alpha := V^\alpha_{;\beta} u^\beta$ )	4, apêndice A
	$\partial/\partial T$	4
$'$	$\partial/\partial t _{q=const}$	2 e 3
	$\partial/\partial \xi$	4
$\delta$	contraste de densidade ( $\delta\rho/\rho$ )	1 a 3
$\delta_D$	delta de Dirac	3
$\delta_\pm$	fatores de crescimento no regime linear	1
$\delta_{ij}$	delta de Kroeneker	1 a 3

$n$	densidade de número de partículas/densidade de número bariônico	todos
$m$	massa das partículas/massa do próton	todos
$\varepsilon$	densidade de energia interna	4, apêndice A
$\rho_0$	densidade de massa de repouso ( $\rho_0 = mn$ )	4, apêndice A
$\rho$	densidade de massa de repouso	1 a 3
	densidade de energia ( $\rho = \rho_0 c^2 + \varepsilon$ )	4, apêndice A
$s$	entropia específica (por partícula)	4, apêndice A

## Convenções

A métrica de Minkowski, em coordenadas pseudo-cartesianas, será definida por:

$$\eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} := \text{diag}(-1, +1, +1, +1).$$

A densidade anti-simétrica de Levi-Civita  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}$  é definida de modo que

$$\epsilon_{0123} := 1 =: \epsilon^{0123},$$

e ela é anti-simétrica sob uma troca de qualquer par de índices. O tensor de Levi-Civita será dado por:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\lambda} := \sqrt{-g}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}, \quad \eta^{\alpha\beta\gamma\lambda} := g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}g^{\gamma\rho}g^{\lambda\sigma}\eta_{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}.$$

O tensor de curvatura de Riemann-Christoffel é

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} := \{\beta\nu\}_{,\mu} - \{\beta\mu\}_{,\nu} + \{\sigma\mu\}\{\beta\nu\} - \{\sigma\nu\}\{\beta\mu\}.$$

As identidades de Ricci são:

$$2A^\alpha{}_{;[\mu\nu]} \equiv -R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu}A^\lambda, \quad 2T^\alpha{}_{\beta;[\mu\nu]} \equiv -R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu}T^\lambda{}_\beta + R^\lambda{}_{\beta\mu\nu}T^\alpha{}_\lambda.$$

O tensor e o escalar de Ricci são definidos por:

$$R_{\alpha\beta} := R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}, \quad R := R^\alpha{}_\alpha.$$

O tensor de Einstein é dado por:

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}.$$

Tensor de curvatura conforme de Weyl é<sup>1</sup>:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} := R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{2}(R_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}) + \frac{1}{6}Rg_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (1)$$

onde

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} := g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}.$$

As equações de Einstein da relatividade geral são

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \quad \Leftrightarrow \quad R_{\alpha\beta} = \kappa(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}) + \Lambda g_{\alpha\beta},$$

onde  $T := T^\alpha{}_\alpha$ , e  $\kappa = 8\pi G$  (utilizaremos unidades em que  $c = 1$ ).

Denotaremos as partes simétrica e anti-simétrica com relação aos índices  $\alpha$  e  $\beta$  de um tensor  $S_{\dots\alpha\dots\beta\dots}$  respectivamente por  $S_{\dots(\alpha\dots\beta)\dots}$  e  $S_{\dots[\alpha\dots\beta]\dots}$ :

$$\begin{aligned} S_{\dots(\alpha\dots\beta)\dots} &: = \frac{1}{2}(S_{\dots\alpha\dots\beta\dots} + S_{\dots\beta\dots\alpha\dots}), \\ S_{\dots[\alpha\dots\beta]\dots} &: = \frac{1}{2}(S_{\dots\alpha\dots\beta\dots} - S_{\dots\beta\dots\alpha\dots}). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Essa expressão para o tensor de Weyl só é válida no espaço 4-dimensional.





# Introdução

Uma das questões cruciais da cosmologia contemporânea é compreender a formação das estruturas em grandes escalas no universo. O cenário mais aceito é o da instabilidade gravitacional, segundo o qual as grandes estruturas são formadas pela amplificação gravitacional das flutuações primordiais na densidade.

As estruturas nas maiores escalas podem ser consideradas como pequenas perturbações de um universo homogêneo. Nesse caso, é possível obter soluções analíticas utilizando a teoria de perturbação linear. Já nas escalas menores, a distribuição de matéria não é linear. Os aglomerados de galáxias, por exemplo, são regiões cem vezes mais densas do que a média do universo. Embora tenha fornecido resultados interessantes, a análise linear das perturbações não é capaz de seguir a evolução até o nível de aglomeração que observamos no universo. Portanto, para compreender a estrutura em grande escala, é preciso fazer simulações numéricas, ou recorrer a aproximações para a evolução não-linear. As simulações computacionais são um instrumento fundamental para o estudo da formação de estruturas, entretanto elas nem sempre proporcionam uma compreensão física transparente do problema. Além disso elas não permitem fazer muitas afirmações genéricas sobre a dinâmica não-linear, já que dependem das condições iniciais em todo o espaço, que variam com o espectro das flutuações primordiais.

Aproximadamente 80% da massa que se aglomera para formar estruturas é composta pela matéria escura, que interage somente através da gravitação, cerca de 10% correspondem à matéria bariônica e o restante é composto por neutrinos. No cenário cosmológico padrão a matéria escura é a maior responsável pela formação das estruturas em grandes escalas. Essa componente pode se aglomerar antes da matéria bariônica, criando poços

de potencial para onde esta flui após o desacoplamento. Em pequenas escalas - da ordem das galáxias ou aglomerados - a matéria escura forma objetos ligados, virializados, desencadeando a formação das galáxias.

Em escalas intermediárias, as estruturas não estão mais gravitacionalmente ligadas, mas ainda são lineares ( $\delta\rho/\bar{\rho} \gtrsim 1$ ). É o que deve ocorrer na escalas dos super-aglomerados, e talvez dos filamentos, paredes e *voids*. Antes do cruzamento das trajetórias e da subsequente virialização a matéria escura pode ser tratada como um contínuo, ou seja, um fluido com  $p = 0$ . Nas grandes escalas o papel da pressão é desprezível, de modo que a matéria bariônica também pode ser representada por um fluido sem pressão. Dessa forma 90% da matéria que se aglomera pode ser modelada por um fluido sem colisões, governado apenas pela gravitação. Assim, para entender a formação de estruturas é fundamental estudar a dinâmica gravitacional.

As aproximações lagrangianas têm sido muito utilizadas para investigar o regime não-linear da aglomeração da matéria. Existem algumas aproximações desse tipo em que a dinâmica é local, ou seja, cada elemento de volume evolui independentemente dos outros. Essa propriedade é bastante surpreendente, já que as forças gravitacionais não são locais. Entretanto, veremos que essas aproximações fornecem bons resultados em muitas situações. De qualquer forma a evolução é local para algumas variáveis apropriadas. Não é possível obter as posições dos elementos de volume, apenas quantidades locais, como a densidade ou a expansão, em função das coordenadas lagrangianas. Mesmo assim, várias propriedades interessantes podem ser extraídas apenas com essas quantidades. Um exemplo de uma aproximação desse tipo é a aproximação de Zel'dovich, amplamente utilizada no regime não-linear.

As aproximações locais poderiam ter muitas aplicações no estudo da formação de estruturas. Através delas, é possível investigar a dinâmica gravitacional em função das condições iniciais em cada ponto. Com isso, pode-se procurar propriedades gerais e simetrias subjacentes do regime não-linear. Elas também são úteis para calcular uma série de quantidades estatísticas, como por exemplo a função de massa. A região de interesse das aproximações locais estaria nas escalas intermediárias, onde a aglomeração

de matéria não é linear, mas ainda não ocorreu a virialização.

Além da aproximação de Zel'dovich, foram propostas recentemente outras quatro *aproximações locais*: a Aproximação de Zel'dovich Modificada, a Aproximação do Tensor de Deformação, a Aproximação Completa de Zel'dovich e a Aproximação de Maré Local. Essas aproximações são exatas para as simetrias esférica, cilíndrica e plana.

Alguns aspectos dessas aproximações já foram discutidos na literatura, mas nunca houve uma comparação sistemática entre elas. Vale a pena analisá-las de uma forma unificada de modo a explorar as suas características gerais e esclarecer as suas semelhanças e diferenças. Também é importante comparar a sua performance em aplicações práticas e verificar que informações podem ser extraídas delas.

A maior parte da tese é dedicada a um estudo detalhado das aproximações locais. Investigamos as propriedades gerais dessas aproximações, o seu limite assintótico e o comportamento com condições iniciais genéricas. Utilizamos o modelo do elipsóide homogêneo para testar e comparar as aproximações. Também fizemos uma comparação com a teoria de perturbação lagrangiana. Aplicamos essas aproximações ao cálculo da função de massa e discutimos como poderia ser feita uma comparação com os resultados de simulações de  $N$ -corpos.

As aproximações discutidas acima se aplicam às grandes estruturas no universo, onde a dinâmica gravitacional exerce o papel fundamental. Além disso, como as velocidades peculiares são bem menores do que a velocidade da luz e os campos gravitacionais envolvidos são fracos, podemos utilizar a cosmologia newtoniana. Um aspecto totalmente diferente da formação de estruturas ocorre em escalas pequenas, em fenômenos altamente energéticos como supernovas ou jatos relativísticos. Nesses sistemas, a pressão tem um papel fundamental e as velocidades são relativísticas.

Um método que pode simplificar o estudo da dinâmica relativística de fluidos consiste na utilização do formalismo variacional. É possível obter uma lagrangiana efetiva para um fluido perfeito na relatividade geral. Podemos utilizar essa lagrangiana para encontrar soluções aproximadas do problema, calculando a ação para uma dada família

de funções tentativa e minimizando-a com relação a alguns parâmetros livres. Apesar dessas soluções não serem corretas localmente, podem fornecer resultados globais acurados. Uma outra aplicação do princípio variacional está na obtenção das equações de um algoritmo numérico de SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) relativístico a partir da ação.

Aplicamos o princípio variacional para configurações esfericamente simétricas na relatividade geral e obtivemos as equações do colapso genérico. Mostramos que, no limite de campo fraco, é possível escrever as quantidades do fluido e a métrica em termos de uma única função. Nesse caso é preciso determinar uma nova expressão para a ação. A partir dessa ação, é possível encontrar soluções aproximadas em situações em que as pressões e velocidades são relativísticas mas os campos gravitacionais são fracos, como por exemplo em explosões de supernovas. Uma outra aplicação estaria no desenvolvimento de um algoritmo de SPH, incluindo a gravitação com campo fraco.

Na tese, optei por não colocar apenas os resultados, mas também alguns passos intermediários. Isso permite acompanhar, em certa medida, a dedução dos resultados obtidos. Também procurei apresentar os elementos dos formalismos utilizados, de modo que ela seja mais ou menos auto-contida. Espero que esta tese possa servir de ajuda a quem desejar iniciar-se no assunto. Por isso acrescentei alguns elementos de “cultura geral” na área de formação de estruturas e algumas discussões conceituais. Também incluí o meu ponto de vista particular sobre alguns assuntos. Esta tese foi igualmente destinada para uso pessoal, contendo uma compilação de alguns temas discutidos durante o doutorado e sugestões de trabalhos futuros.

A tese se distribui da seguinte forma: No capítulo 1 apresentamos uma revisão sobre a formação de estruturas no cenário cosmológico padrão. Discutimos a composição do universo, os parâmetros cosmológicos e as motivações observacionais (seção 1.1). Estudamos a evolução linear das estruturas na cosmologia newtoniana nas seções 1.2 e 1.3.

No capítulo 2 apresentamos a dinâmica lagrangiana de fluidos e as aproximações locais. As aproximações lagrangianas são discutidas na seção 2.2. Na seção 2.3 introduz-

imos as aproximações locais e investigamos algumas de suas propriedades. Uma parte desse capítulo também é de revisão. No entanto, como o formalismo lagrangiano não é discutido em livros texto achamos útil expô-lo de forma bastante completa aqui. As aproximações locais também já foram discutidas na literatura, mas nós as apresentamos numa abordagem diferente, fazendo uma descrição unificada dessas aproximações. Algumas análises desenvolvidas na seção 2.3.4 também são originais.

Uma parte das seções 1.2 a 2.2 foi compilada de livros texto e artigos de revisão, em especial das referências [3] a [8].

Os principais resultados inéditos com relação às aproximações locais são apresentados no capítulo 3. Na seção 3.1 analisamos as características gerais dessa classe de aproximações. A sua implementação numérica é discutida na seção 3.2. Algumas aplicações são discutidas na seção 3.3 e a comparação com a teoria de perturbação lagrangiana é feita na seção 3.4. Apresentamos uma proposta para confrontar as aproximações locais com as simulações de  $N$ -corpos na seção 3.5.1. Uma breve discussão sobre possíveis extensões desses métodos é apresentada na seção 3.5.2. Os principais resultados são discutidos na seção 3.6. Os resultados das seções 3.1.2 e 3.3 foram publicados na referência [1]. Os resultados das seções 3.1.1 e 3.4 são originais e ainda não foram publicados.

O capítulo 4 discute as aplicações do formalismo variacional para a hidrodinâmica relativística. Como essa formulação não é muito conhecida, começamos apresentando a ação para um fluido perfeito (seções 4.2 e 4.3). Calculamos a lagrangiana efetiva no caso esférico e obtemos as equações de Misner e Sharp (seções 4.3.1 e 4.3.2). Discutimos a relação entre o referencial co-móvel e as coordenadas inerciais na seção 4.3.3. Na seção 4.4 estudamos o formalismo variacional com campo fraco. Nas seções 4.5 e 4.6 discutimos algumas extensões da lagrangiana efetiva, a aplicação ao SPH e perspectivas futuras. Na seção 4.7 apresentamos as conclusões e destacamos os principais resultados. Os resultados das seções 4.3.1 a 4.3.3 foram publicados na referência [2]. Os resultados da seção 4.4 são originais e ainda não foram publicados.

Colocamos nos apêndices algumas digressões sobre assuntos que não são fundamen-

tais para as linhas centrais da tese. Apesar de não haver resultados inéditos concretos nesse material, apresentamos algumas idéias originais, que levarão a novas investigações. Além disso, grande parte do que é apresentado serviu de motivação para o estudo das aproximações locais e da formação de estruturas em geral. Também colocamos algumas relações que são utilizadas no texto, como as equações quase-maxwellianas e a distribuição de probabilidades dos autovalores do tensor de deformação.

No apêndice A, discutimos vários aspectos da relação entre a dinâmica de fluidos na relatividade geral e na teoria newtoniana. Começamos escrevendo as equações newtonianas na abordagem lagrangiana (seção A.1). Depois introduzimos o formalismo de projeção da relatividade geral (seção A.2). A partir desse formalismo surgiu a motivação para a introdução de algumas aproximações locais (seções A.2.3 e 2.3.4) e para a inclusão de efeitos relativísticos na hidrodinâmica newtoniana (seção A.3). Também examinamos superficialmente um modelo fenomenológico que poderia descrever a estrutura em grande escala do universo e a expansão cósmica com uma única equação de estado (seção A.4). Esse modelo tem um comportamento semelhante aos cenários do tipo quintessência. Discutimos ainda o limite newtoniano da cosmologia relativística, estudando o comportamento de pequenas perturbações genéricas na métrica de um universo homogêneo e isotrópico (seção A.5).

No apêndice B examinamos a estatística das flutuações primordiais. Apresentamos o espectro de potência das perturbações em termos de funcionais de probabilidades. Discutimos como é possível obter a distribuição de probabilidades dos autovalores do tensor de deformação a partir desse espectro. Também colocamos uma discussão sobre perturbações não-gaussianas e a sua implicação no cálculo da função de massa. Conjecturamos que, ao contrário do que é disseminado na literatura, a função de massa não é um bom teste para a estatística das flutuações primordiais.

No apêndice C apresentamos uma discussão sobre a influência da expansão do universo em pequenas escalas. Esse assunto surge esporadicamente na literatura e os resultados

encontrados são muitas vezes contraditórios. Nós argumentamos que o problema é muito mais conceitual do que uma questão de método de cálculo.





# Capítulo 1

## Formação de Estruturas em Grande Escala

Neste capítulo apresentaremos uma revisão de diversos elementos que são importantes no estudo da formação de estruturas em grande escala. Na seção 1.1 faremos uma breve revisão de alguns ingredientes da cosmologia padrão e suas evidências observacionais. Na seção 1.2 introduziremos as equações da cosmologia newtoniana em coordenadas comóveis. Essas equações serão o ponto de partida do nosso estudo da dinâmica gravitacional. Uma justificativa mais formal da cosmologia newtoniana pode ser encontrada na seção A.5. Na seção 1.3 discutiremos o regime linear da formação de estruturas e a radiação cósmica de fundo. Finalmente, na seção 1.4 faremos um comentário sobre as simulações computacionais.

### 1.1 Introdução

Esta última década se caracterizou por uma verdadeira avalanche de dados observacionais para a cosmologia. Vários parâmetros fundamentais dos modelos cosmológicos, como a composição do universo, a sua densidade e o parâmetro de Hubble parecem finalmente estar convergindo. As novas observações têm sustentado o modelo padrão da cosmologia, conhecido pelo nome de *Big-Bang*.

A idéia de um universo em expansão surgiu na década de 1920. Um desvio para o vermelho foi detectado na maioria das “nebulosas espirais” por Slipher e colaboradores no início dos anos 20. A interpretação definitiva desses desvios como sendo causados por um efeito Doppler devido à expansão foi dada por Hubble em 1929. Os resultados de Hubble mostraram que existia uma “relação aproximadamente linear entre as velocidades e as distâncias”.

Se o universo está se expandindo, significa que ele foi muito mais quente e denso no passado. De fato, pela teoria de Einstein da gravitação, teria havido uma singularidade primordial, com a densidade e temperatura tornando-se infinitas à medida que nos aproximamos desse “instante inicial”, também chamado de *Big-Bang*. Com singularidade ou não, o fato é que o universo passou por fases extremamente quentes e densas no passado. Nesse período ocorreu uma série de processos físicos que deixaram rastros observáveis. O modelo do *Big-Bang* quente foi introduzido por Gamow no final da década de 1940. Em seu artigo com Alpher e Bethe, Gamow predisse a nucleossíntese primordial e a radiação cósmica de fundo.

Vamos discutir agora alguns processos físicos que ocorreram durante a história do universo. Nos limitaremos àqueles cujos mecanismos são melhor conhecidos e cujos rastros foram observados.

### 1.1.1 Uma Breve História Térmica do Universo

Uma consequência importante das altas densidades do passado é que as taxas das reações eram muito maiores no universo primitivo. Por exemplo, quando a temperatura do universo era maior do que alguns MeV ( $\sim 10^{10}K$ ), a taxa do processo  $e^- + \nu_e \longleftrightarrow e^- + \nu_e$  era maior do que a taxa de expansão. Dessa forma, antes que o universo pudesse duplicar de tamanho, um neutrino era espalhado muitas vezes pelos elétrons. Essas colisões faziam com que os neutrinos estivessem em equilíbrio com o resto do plasma cósmico. Esse é apenas um exemplo de um fenômeno que ocorre com todas as espécies que compõem o universo: se uma partícula é espalhada com uma taxa maior que a expansão cósmica, então essa partícula fica em equilíbrio. Quando a densidade diminui,

a taxa de espalhamento é reduzida. Se ela for menor que a taxa de expansão, a partícula perde contato com o resto do plasma cósmico. Muitas partículas passaram por esse processo, conhecido por *desacoplamento*, no universo primitivo.

### Aniquilação próton-anti-próton

Quando a temperatura era por volta de  $1\text{GeV}$  ( $\sim 10^{13}\text{K}$ ), a matéria bariônica estava sob a forma de um plasma de quarks e glúons. Quando ela baixou para uns  $100\text{MeV}$ , por volta de  $10^{-4}\text{s}$  após o *Big-Bang*, houve a hadronização e foram criados os bárions (e anti-bárions) e os mésons. Logo após, bárions e anti-bárions começaram a se aniquilar. Como havia uma assimetria de uma parte em dez bilhões de bárions sobre anti-bárions ( $(n_b - n_{\bar{b}})/n_b \simeq 10^{-10}$ ), estes teriam se aniquilado totalmente, deixando uma fração de  $10^{-10}$  dos bárions<sup>1</sup>. Como a aniquilação produz fótons, isso elevou a razão fóton/próton para  $10^{10}$ .

### Nucleosíntese primordial

Quando a temperatura caiu para uns  $10\text{MeV}$  ( $\sim 10^{11}\text{K}$ ) a taxa da reação  $p+e^- \longleftrightarrow n+\nu_e$  tornou-se menor do que a taxa de expansão. A razão entre prótons e nêutrons ficou constante depois que essa reação cessou. A maioria dos nêutrons acabou formando átomos de hélio, alguns decaíram em prótons e uma pequena fração foi para outros elementos leves. Dessa forma, a razão nêutron/próton naquela época determina a razão hélio/hidrogênio hoje, assim como a abundância dos outros elementos leves. A nucleossíntese primordial ocorreu de 0.01 a 100 segundos após o *Big-Bang* (de  $T = 10\text{MeV}$  a  $0.1\text{MeV}$ ).

---

<sup>1</sup>Na verdade, o cálculo da quantidade restante de bárions (e anti-bárions) requer uma atenção mais detalhada. É preciso ver quando cessa a produção de bárions-anti-bárions e, a partir desse momento, estudar a aniquilação. A reação de mais baixa energia que produz bárions envolve píons. Portanto, quando pára a produção de píons não é mais possível gerar bárions. Estamos desenvolvendo atualmente um estudo sobre a produção de píons no universo primordial [9].

## Desacoplamento dos neutrinos e aniquilação elétron-pósitron

Como foi mencionado anteriormente, quando a temperatura ficou abaixo de  $1\text{MeV}$  ( $\sim 10^{10}\text{K}$ ), os neutrinos perderam o contato com o resto do plasma.

Depois que os neutrinos se desacoplaram, os fótons continuaram acoplados aos elétrons e pósitrons, que tinham todos a mesma abundância a temperaturas da ordem do  $\text{MeV}$ . Quando a temperatura ficou abaixo da massa do elétron ( $0.511\text{MeV}$ ), elétrons e pósitrons se aniquilaram em fótons. Do mesmo modo que ocorreu com os prótons, sobrou apenas um elétron para cada dez bilhões.

## Recombinação

A interação dos fótons com a matéria se dá principalmente através do espalhamento Compton pelos elétrons. A taxa do espalhamento  $\gamma + e^- \longleftrightarrow \gamma + e^-$ , fica menor do que a taxa de expansão quando a temperatura é da ordem de  $1\text{eV}$  (uns  $3.000\text{K}$ ), o que ocorreu em torno de  $300.000$  anos após o *Big-Bang*. Depois disso os fótons se desacoplam da matéria, mantendo o seu espectro térmico. Após do desacoplamento eles se propagam livremente sem interagir com nenhuma outra partícula.

Por volta da mesma época do desacoplamento matéria-radiação, foram formados os primeiros átomos, num processo chamado de recombinação. Dessa forma o universo deixou de ser um plasma e passou a ser transparente à radiação.

## Formação de estruturas

Como veremos mais a diante, as pequenas flutuações primordiais começaram a crescer quando o universo passou a ser dominado pela matéria. A matéria escura começou a se aglomerar por causa da atração gravitacional. Regiões ligeiramente mais densas do que a média (tipicamente um milésimo mais densas, na época do desacoplamento) acabam gerando grandes concentrações de matéria criando uma estrutura rica e variada.

## 1.1.2 O Universo Observado e os Parâmetros Cosmológicos

Como vimos, o universo tem uma história térmica e essa história deixou fósseis que são observados hoje em dia. As primeiras evidências diretas sobre o universo remontam a  $10^{-2}s$  e consistem na medida das abundâncias de elementos leves criados durante a nucleossíntese. Também podemos observar diretamente: a expansão, a distribuição de matéria (luminosa) em grande escala, a idade do universo, a razão bárion/fóton  $\eta$ , a radiação cósmica de fundo de microondas e outras radiações de fundo. Indiretamente, ou seja, utilizando algum modelo cosmológico, podemos medir a composição  $\rho_i$  (matéria escura, bárions, fótons, etc.) e a densidade total hoje  $\rho_0$ .

Combinando essas observações podemos determinar os parâmetros cosmológicos do modelo do *Big-Bang*, como a densidade do universo, a sua composição, a curvatura e o parâmetro de Hubble. Há duas componentes do universo que não foram discutidas na seção anterior, pois ainda não se conhece a sua natureza fundamental: a matéria escura e o termo cosmológico. As suas evidências observacionais serão discutidas a seguir, junto com os outros observáveis do universo.

### A matéria escura

Para determinarmos a massa de objetos distantes utilizam-se métodos dinâmicos: observa-se o movimento de alguns astros e infere-se a distribuição de matéria que causa esse movimento. Numa galáxia espiral, por exemplo, é possível medir a velocidade de rotação das estrelas em torno do centro galáctico. Podemos fazer uma estimativa simples, supondo que estas estrelas estão em movimento estacionário circular. Utilizando a lei de Newton temos:

$$G \frac{M(r)}{r^2} = \frac{[V(r)]^2}{r}, \quad (1.1)$$

onde  $V$  é a velocidade típica das estrelas situadas a uma distância  $r$  do centro galáctico e  $M$  é a massa no interior de sua órbita. Próximo ao centro galáctico podemos supor que a distribuição de matéria é homogênea, logo  $M(r) \propto r^3$ . Assim, a velocidade deve

aumentar linearmente à medida que nos afastamos do centro. Já para estrelas na periferia da galáxia, a massa contida em sua órbita seria aproximadamente igual à massa total:  $M(r) \simeq M_{\text{galáxia}} = \text{const.}$  Dessa forma, a velocidade deveria cair com a raiz quadrada da distância.

As curvas  $V(r) \times r$  previstas pela luminosidade observada (estrelas + gás) conseguem explicar as velocidades medidas até uma certa distância do centro galáctico. No entanto, em vez de decair, a velocidade permanece constante a grandes distâncias. Se adicionamos uma matéria com distribuição de  $\rho \propto r^{-2}$  à distribuição de massa detectada é possível reproduzir as velocidades observadas. No entanto, não há sinal da matéria visível em nenhum comprimento de onda seguindo essa distribuição. Por isso, chamamos esta matéria de *matéria escura*. Na maioria das galáxias, há de 3 a 10 vezes mais matéria escura do que matéria visível.

Há vários métodos para calcular a massa em aglomerados de galáxias. Supondo que o aglomerado é um sistema gravitacionalmente ligado, e que a sua vida é maior do que o tempo de relaxação, podemos aplicar o teorema do virial. Assim, observando a dispersão da velocidade das galáxias, obtemos a massa do aglomerado. Outra estimativa da massa é dada pela temperatura dos raios  $X$  emitidos pelo gás intergaláctico. Novamente é preciso supor que o gás está em equilíbrio no aglomerado. Uma medida independente das anteriores e que não envolve a suposição de equilíbrio é dada pela observação de lentes gravitacionais, que permite reconstruir a distribuição de matéria do objeto que provoca a lente.

Um parâmetro importante para a geometria e a evolução do universo é a razão  $\Omega_i$  entre a densidade  $\rho_i$  de uma espécie (bárions, fótons, neutrinos, etc.) e a densidade crítica  $\rho_c$ , para a qual o universo teria curvatura nula (veja a seção 1.2, eq. 1.6). A matéria contida nas galáxias contribui com  $\Omega_{\text{Galáxias}} \approx 0.1$ . Através da velocidade de dispersão em aglomerados, obtem-se:  $\Omega_{\text{Aglomerados}} \approx 0.1 - 0.2$ . Medindo a velocidade dos grupos de galáxias em grandes escalas é possível reconstruir o potencial gravitacional e determinar a distribuição de matéria. Essas medidas levam a  $\Omega_{\text{Matéria}} \gtrsim 0.3$ . Um apanhado recente [10] envolvendo uma combinação de diversos métodos, incluindo a radiação cósmica de

fundo, fornece o resultado  $\Omega_{\text{Matéria}} = 0.35 \pm 0.10$ .

### Abundância dos elementos leves

Da nucleossíntese primordial resultou a criação de  $D$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$  e  ${}^7\text{Li}$ . A razão entre as abundâncias desses elementos permite determinar qual era a densidade dos bárions na época da nucleossíntese. O deutério e o hélio-4 são de vital importância porque, aparentemente, nenhum processo astrofísico atual pode explicar as suas abundâncias observadas. A comparação entre as quantidades observadas e as previstas é um teste poderoso para o *Big-Bang* e é um dos grandes êxitos desse modelo. A quantidade de matéria bariônica de acordo com as abundâncias medidas é<sup>2</sup> [11]  $\Omega_{\text{bárions}} = 0.039 \pm 0.004$ . Isto significa que a maior parte da matéria escura deve ser não-bariônica!

Ainda seria possível que a teoria da gravitação de Einstein deixasse de valer para distâncias da ordem do tamanho de uma galáxia e que portanto os métodos dinâmicos de determinação de  $\Omega_{\text{Matéria}}$  estejam errados. Isso requer também que a teoria do desvio da luz esteja errada, pois os resultados de lentes gravitacionais estão em acordo com as medidas dinâmicas. Além disso, como veremos a seguir, várias outras observações independentes apontam para um universo com pouca matéria bariônica e grande densidade de matéria não-bariônica.

### Neutrinos

A radiação de fundo de neutrinos ainda não pode ser detectada experimentalmente. Mesmo assim, podemos determinar o parâmetro  $\Omega_\nu$  a partir da abundância de neutrinos após o seu desacoplamento e de estimativas para a sua massa. A evidência mais convincente da massa dos neutrinos foi dada em 1998 pelo experimento Super-Kamiokande, que detectou pela primeira vez a oscilação de neutrinos solares [12]. Quando esta tese estava sendo concluída, foram divulgados os resultados de um outro experimento, o observatório de neutrinos de Sudbury (SNO), que confirmou as oscilações [13]. As oscilações entre

---

<sup>2</sup>Na verdade, as abundâncias dos elementos determinam o produto  $\Omega_b H_0^2$ . Aqui estamos supondo que a constante de Hubble é  $H_0 = 71 \text{ Km/s/Mpc}$ , como indicam diversas observações.



diferentes tipos de neutrinos não determinam a massa de cada espécie, mas diferença entre as massas.

Possuindo massa, os neutrinos poderiam, em princípio, ser responsáveis pela matéria não-bariônica. No entanto, resultados baseados nas oscilações de neutrinos, de um lado e nos cenários de formação de estruturas com neutrinos, do outro, impõem o limite<sup>3</sup> [10]  $0.003 < \Omega_{\text{neutrinos}} < 0.15$ . Assim, ainda falta uma componente de matéria desconhecida que domina a densidade de massa do universo. Ela seria composta por partículas não-relativísticas, denotadas genericamente por WIMPS (*weak interacting massive particles*). Alguns candidatos são: áxions<sup>4</sup>, partículas super-simétricas e monopólos.

### O termo cosmológico

Os métodos dinâmicos para a determinação de  $\Omega$  que citamos na seção anterior são sensíveis apenas à matéria que se aglomera. Como os aglomerados de galáxias representam grandes concentrações de massa ( $\delta\rho/\rho \cong 10^2 - 10^3$ ), qualquer distribuição mais suave ( $\delta\rho/\rho \lesssim 1$ ) de outro tipo de matéria produz uma contribuição desprezível. Os movimentos das galáxias em aglomerados e dos aglomerados entre si, são sensíveis às heterogeneidades locais. Por outro lado, medidas cinemáticas, como por exemplo o diagrama de Hubble ( $v_{\text{recessão}} \times \text{distância}$ ), medem a densidade cósmica média.

Esse diagrama fornece a constante de Hubble e também o parâmetro de desaceleração. A velocidade de recessão é estimada pelo desvio para o vermelho, que pode ser facilmente medido. Já a medida da distância era um grande problema até recentemente. Para obter a distância de um objeto muito longínquo é preciso saber a sua luminosidade intrínseca e compará-la com a luminosidade observada. Utilizava-se uma “escada” que permitia medir distâncias de objetos cada vez mais distantes. Para estrelas próximas é possível medir a paralaxe, com isso calibram-se outros indicadores, como o brilho intrínseco de uma estrela cefeida em função do seu período de variação e assim por diante. Cada passo tinha incertezas que iam acumulando-se e a determinação das distâncias de galáxias

---

<sup>3</sup>Os resultados do observatório de neutrinos de Sudbury implicam que  $0.001 < \Omega_{\text{neutrinos}} < 0.18$  [13].

<sup>4</sup>Para uma discussão sobre o axion, veja a ref. [7], cap. 10, ou a ref. [5], seção 11.5.

muito afastadas era imprecisa. Utilizavam-se também relações empíricas envolvendo o momento angular das galáxias e a sua luminosidade intrínseca.

Recentemente, descobriu-se que as curvas de luz de supernovas do tipo Ia são um excelente indicativo de sua magnitude inerente. Como essas supernovas podem ser vistas mesmo em galáxias distantes, esse método tornou-se uma ferramenta poderosa para medir a parâmetro de Hubble e a taxa de variação da expansão com grande precisão. Dois grupos utilizaram métodos sofisticados de detecção automatizada e descobriram um total de mais de 100 supernovas. Os dados obtidos através da observação de supernovas do tipo Ia [14, 15], levaram ao surpreendente resultado de que o universo está em expansão acelerada. Isto só seria possível se houvesse uma componente de matéria com pressão negativa. Associa-se essa componente à constante cosmológica  $\Lambda$ , que já aparecia como uma possibilidade na teoria da gravitação de Einstein. Ela faz o papel de uma energia do vácuo, embora não haja nenhuma estimativa teórica que possa prever os resultados observacionais (a teoria erra por um fator  $10^{55}$  a  $10^{122}$ !). Alguns autores sugerem a possibilidade dessa “constante” variar no tempo. Essa componente poderia ser um campo escalar rolando para o mínimo do potencial, num cenário conhecido como quintessência (veja a seção A.4.2). Uma outra possibilidade é discutida na seção A.4.3. Para um artigo de revisão, veja a referência [16].

Na realidade, os resultados obtidos através do diagrama de Hubble não medem diretamente  $\Omega_\Lambda$ , eles são mais sensíveis à diferença  $\Omega_M - \Omega_\Lambda$  (veja a eq. A.67). Os dados da observação das supernovas sozinhos já permitem concluir que  $\Omega_\Lambda > \Omega_M$ , mas para termos uma medida de cada uma dessas quantidades separadamente é preciso utilizar uma estimativa independente de  $\Omega_M$ , ou  $\Omega_M + \Omega_\Lambda$ . Por exemplo, utilizando-se o valor de  $\Omega_M$  medido através das velocidades peculiares das galáxias obtem-se  $\Omega_\Lambda \approx 0.8$  [17].

## A radiação cósmica de fundo

Um dos aspectos interessantes da cosmologia observacional é a possibilidade de ver o passado diretamente. Quanto mais longe se observa, mais remoto é o tempo de emissão da luz. Se o universo passou por uma fase quente, nós deveríamos ser capazes de observar

agora, os primeiros fótons que passaram a se propagar livremente após a recombinação, 300.000 anos depois do *Big-Bang*. Foi exatamente o que Penzias e Wilson detectaram em 1965: a *radiação cósmica de fundo* (RCF).

O que se observa é um espectro de emissão de corpo negro, com temperatura de 2.728 K [7]. Essa temperatura é devida ao desvio para o vermelho causado pela expansão (a recombinação ocorre a aproximadamente 3.000 K). A primeira anisotropia observada (3.36 mK) corresponde a um dipolo, e é devida à velocidade da galáxia em relação ao referencial de repouso da radiação (o que leva a  $V_{\text{grupo local}} = 630 \text{ Km/s}$ ). Subtraindo esse dipolo, obtém-se uma distribuição de temperatura altamente homogênea e isotrópica. A extrema isotropia da radiação cósmica de fundo foi um dos argumentos decisivos em favor do modelo do *Big-Bang*.

As primeiras anisotropias na radiação cósmica de fundo foram detectadas pelo satélite COBE em 1992. Os resultados obtidos pelo COBE mostraram que os desvios do espectro de um corpo negro são de apenas 0,03% e que as flutuações de temperatura são  $\delta T/T \approx 10^{-5}$  em escalas de  $10^\circ$  a  $90^\circ$ . Essas flutuações correspondem a pequenas heterogeneidades na distribuição de matéria, que acabaram originando as estruturas em grande escala. Por isso, o estudo dessas flutuações é uma ferramenta poderosa para testar teorias de formação de estruturas. A análise da radiação cósmica de fundo mostra que o universo primordial era altamente homogêneo, com  $\delta\rho/\rho \approx 10^{-3} - 10^{-2}$ .

Em pequenas escalas angulares o espectro da radiação cósmica de fundo, que mede essencialmente a magnitude das flutuações em função da separação angular, apresenta uma série de picos. O primeiro pico (maior separação angular) permite medir a curvatura do universo, os outros picos fornecem informação sobre vários parâmetros cosmológicos (veja a seção 1.3.5). Por exemplo, a diferença na altura dos picos mede a quantidade de matéria bariônica. Recentemente foram divulgados os resultados da medida desse espectro feitos com dois experimentos em balões estratosféricos, BOOMERANG [18] e MAXIMA [19], que estudaram as flutuações na temperatura em escalas de  $5'$  a  $1.5^\circ$ . Esses resultados mostraram que a curvatura do universo em grandes escalas é nula (ou quase) de modo que  $\Omega_{\text{Total}} \simeq 1$  [20, 21]. Eles também permitem fazer uma estimativa de

$\Omega_{\text{bárions}}$ , que está razoavelmente em acordo com as medidas da nucleossíntese primordial.

Neste mês foi lançado o satélite MAP [22], que permitirá medir o espectro com resolução ainda maior, permitindo calcular os parâmetros cosmológicos com grande precisão e oferecendo mais um teste observacional para os modelos cosmológicos. Há ainda outros experimentos sendo preparados, como o satélite PLANCK [23].

## A distribuição de matéria em grandes escalas

Para investigar a distribuição de matéria no universo efetuam-se levantamentos sistemáticos da posição de galáxias e quasares. Há dois tipos de levantamentos: num são determinadas apenas as posições angulares. Como as distâncias não são conhecidas, temos uma distribuição projetada numa esfera. A vantagem é o grande número de objetos que podem ser levantados: no *APM survey* [24], por exemplo, temos a distribuição de 2 milhões de galáxias. Em outro tipo de levantamento, são determinadas tanto as posições angulares quanto os desvios para o vermelho. Isso permite ter uma idéia da distribuição tridimensional da matéria. Um exemplo é o *Las Campanas survey* [25, 26], com 23.700 galáxias. Um dos primeiros levantamentos desse tipo foi o *CfA redshift survey* [27], com 9.000 galáxias. Atualmente há dois grandes levantamentos de desvios para o vermelho de galáxias sendo desenvolvidos o *Two Degree Field* (2dF [28]), que será finalizado este ano e o *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS [29]). O 2dF determinará os desvios para o vermelho de 250.000 galáxias, distribuídas em várias fatias do céu. Até setembro de 2000 já haviam sido levantadas 132.000 galáxias. Já o SDSS medirá as posição de um milhão de galáxias. Pela primeira vez será possível comparar as flutuações na distribuição de matéria, com as perturbações na radiação cósmica de fundo em escalas equivalentes.

Antes de que fossem feitos os primeiros levantamentos da distribuição de galáxias, esperava-se que não houvesse estruturas em escalas maiores que aglomerados de aglomerados de galáxias. Acreditava-se que, a partir dessas escalas, o universo deveria ser homogêneo. Foi uma grande surpresa quando os primeiros resultados do CfA, na década de 1980 [27], mostraram a existência de complexas estruturas: filamentos, paredes e vazios de matéria (*voids*). Os *voids*, são como bolhas sem matéria luminosa, e se esten-

dem até 40-60 Mpc. O grande muro, tem dimensões da ordem de 80 Mpc por 220 Mpc. Portanto as estruturas observadas são de tamanho comparável às maiores distâncias que conseguimos observar.

Uma análise desses levantamentos mostra que o universo atual é altamente heterogêneo, com uma distribuição de matéria do tipo fractal. A dimensão fractal depende da escala e tenderia a 3, ou seja, uma distribuição homogênea, nas maiores escalas [30]. Esse resultado está em acordo com as medidas da radiação cósmica de fundo.

Os aglomerados e as galáxias são grandes concentrações de matéria quando comparados à média do universo. As variações na densidade são da ordem de  $10^5$  ( $\rho_{\text{galáxias}}/\rho_{\text{universo}}$ ) ou  $10^2 - 10^3$  ( $\rho_{\text{aglomerados}}/\rho_{\text{universo}}$ ) [7]. Essa razão vai decrescendo à medida que consideramos estruturas de maiores dimensões, até chegar próximo da densidade média do universo [30].

A distribuição de matéria em grandes escalas proporciona mais uma evidência para a existência de matéria escura, já que num universo composto apenas por bárions, não teria havido tempo para a formar as estruturas observadas (veja a seção 1.3.2, em particular o resultado 1.39).

Uma compreensão da distribuição atual de matéria em grande escala é crucial para entender a origem das estruturas no universo e testar cenários detalhados de sua formação. Por sua vez, a determinação desses cenários colocará limites sobre as teorias do universo primordial que predizem as primeiras flutuações.

### 1.1.3 As Eras Cosmológicas

Como vimos, o universo é composto por vários tipos de matéria/energia: partículas relativísticas (fótons, neutrinos, etc.), com equação de estado  $p = (1/3)\rho c^2$ ; matéria não relativística, com<sup>5</sup>  $p = 0$  e constante cosmológica, com  $p = -\rho c^2$ . Qual seria a mais importante na formação de estruturas? Para responder a essa pergunta, é preciso estudar

---

<sup>5</sup>Para a matéria escura, a pressão é nula. Já a matéria bariônica tem pressão e esta exerce um papel fundamental na sua dinâmica. No entanto, apenas interessa para a discussão a seguir que:  $p/c^2 \ll \rho$  (matéria não relativística). Essa condição deixa de valer a altas temperaturas.

a evolução relativa dessas componentes.

Ao longo da evolução do universo há eras em que cada um dos diversos constituintes domina: a densidade de energia de um passa a ser muito maior que a dos outros, sendo responsável pela dinâmica global. Para compreender isso, basta uma simples análise da termodinâmica num universo em expansão. Se a expansão é homogênea, todas as escalas se alteram por igual, dessa forma a trajetória de um elemento de volume é dada por  $\vec{r}(t) = \vec{x}a(t)$ , com  $\vec{x}$  fixo. A função  $a(t)$  é conhecida como fator de escala do universo e a sua evolução temporal depende do conteúdo total de matéria (veja a seção 1.2). Se não há troca de calor entre partículas vizinhas temos, pela 2ª lei da termodinâmica (conservação da energia):  $dE = -pdV$ , onde  $E$  deve incluir a energia de repouso, de modo que a energia total é  $E = mc^2$ . Escolhendo um volume esférico de raio  $a(t)$  teremos  $E = \rho V c^2 = (4\pi/3)a^3\rho c^2$ . Assim a 2ª lei leva a<sup>6</sup>

$$d(\rho a^3) = -\frac{p}{c^2}d(a^3).$$

Para radiação obtemos<sup>7</sup>  $\rho_r \propto a^{-4}$ ; para matéria não relativística,  $\rho_M \propto a^{-3}$  e para a constante cosmológica<sup>8</sup>,  $\rho_\Lambda \propto const$ . Na nucleossíntese, o universo era dominado pela radiação. Ao longo da expansão a matéria passou a dominar (já que a densidade desta diminui mais lentamente que a da radiação).

Na era dominada pela radiação as flutuações não evoluem. Por volta de 30.000 anos após o *Big-Bang* a matéria começa a dominar e as primeiras estruturas iniciam a sua formação. A matéria escura é a primeira a se condensar, já que a matéria bariônica só se aglomera após o desacoplamento.

As observações de supernovas distantes e do espectro da radiação cósmica de fundo

---

<sup>6</sup>Essa equação é idêntica à equação da conservação da energia num universo em expansão deduzida a partir da relatividade geral (eq. A.64).

<sup>7</sup>Para radiação de corpo negro temos  $\rho \propto T^4$ , logo, pela 2ª lei da termodinâmica, teremos  $T \propto a^{-1}$ . Se a temperatura da radiação cósmica de fundo medida hoje, é da ordem de mil vezes menor que no desacoplamento: isto significa que o Universo naquela época era mil vezes menor do que agora.

<sup>8</sup>Nos modelos com termos cosmológico variável, como no caso de quintessência, a equação de estado pode mudar com o tempo. Entretanto, a pressão é sempre negativa, o que leva a um decaimento com  $a(t)$  mais suave que o da matéria.

indicam que  $\Omega_\Lambda \gtrsim \Omega_M$ , hoje. No entanto, devido ao comportamento de  $\rho_M$  e  $\rho_\Lambda$  com  $a(t)$ , teríamos  $\Omega_\Lambda \ll \Omega_M$  no início. Por isso a constante cosmológica teve uma influência desprezível na formação de estruturas. Ela passou a dominar a energia do universo apenas recentemente, quando as estruturas já estavam formadas.

### 1.1.4 Resumo da Cosmologia Padrão

No modelo cosmológico padrão, que é baseado na gravitação de Einstein, supõe-se que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Nos seus primórdios, ele teria passado por uma fase de expansão acelerada, que fez com que a curvatura ficasse extremamente reduzida e que amplificou pequenas flutuações quânticas iniciais, num processo conhecido por *inflação*. Depois o universo entrou na era dominada pela radiação, durante a qual ocorreram diversos processos físicos, como por exemplo a nucleossíntese primordial. Uns 30.000 anos depois do *Big-Bang* o universo começou a ser dominado pela matéria e as primeiras estruturas começaram a crescer. Por volta de 300.000 anos depois houve o desacoplamento entre matéria e radiação, a luz passou a se propagar livremente e a matéria bariônica também passou a formar estruturas. O universo hoje é composto essencialmente de matéria bariônica, radiação, neutrinos, matéria escura e um termo cosmológico<sup>9</sup>.

Há hoje um grande volume de dados observacionais, utilizando métodos bem distintos, que sustentam esse modelo. Continuam havendo grandes incógnitas, como a natureza da matéria escura e do termo cosmológico. Ambos fazem parte do modelo cosmológico padrão por força de suas evidências observacionais. A existência dessas duas componentes não era esperada pela maioria dos cosmólogos e sua descoberta causou grande surpresa. Uma crítica que se faz é a falta de medidas independentes - não baseadas na cosmologia - para essas quantidades. Por exemplo, a matéria escura é detectada apenas pelos seus efeitos gravitacionais, supondo a validade da lei de Newton (ou em última instância, da relatividade geral). E se em vez de matéria escura fosse necessária uma outra teoria da

---

<sup>9</sup>No fundo, talvez Aristóteles estivesse certo ao afirmar que há cinco elementos que compõem todo o universo: a matéria bariônica, a radiação, os neutrinos, a matéria escura e a quintessência!

gravitação?

Não é possível saber *a priori* a quantidade de matéria escura, nem o valor do termo cosmológico. Esses dados são obtidos ajustando os resultados observacionais à teoria. Apesar das medidas de  $\Omega_M$  e  $\Omega_\Lambda$  por diversos métodos e em diferentes escalas serem consistentes, isso pode ser considerado uma deficiência do modelo, já que ele se baseia em quantidades que são medidas utilizando a própria teoria. Por outro lado, mesmo considerando que o modelo seja incompleto e encarando  $\Omega_M$  e  $\Omega_\Lambda$  como parâmetros livres da teoria, pode-se dizer que o modelo padrão é um grande sucesso.

O modelo cosmológico padrão descreve o universo em termos de alguns parâmetros como:  $\Omega_{\text{Total}}$ ,  $\Omega_i$ ,  $H_0$ ,  $q_0$ ,  $K$  e outras quantidades relacionadas ao espectro das flutuações primordiais. É extraordinário que seja possível entender uma boa parte da história do universo e de sua estrutura em grande escala com uma teoria tão simples e a partir de um número tão pequeno de parâmetros. Se em 1971 Weinberg dizia que a verdadeira razão para escolher um modelo homogêneo e isotrópico em grandes escalas era porque essa suposição “é a única que permite utilizar os dados extremamente limitados proporcionados pela astronomia observacional à cosmologia” [31]; hoje pode-se dizer que esse modelo é o preferido, justamente pelo enorme volume de dados observacionais que o sustenta.

Sempre é possível que essas “pequenas nuvens no horizonte” (aqui, o termo cosmológico e a matéria escura) se transformem numa “grande tempestade”, como ocorreu com o surgimento da física moderna no início do século XX. Mas, da mesma forma que a mecânica de Newton não se alterou depois do surgimento da teoria quântica e da teoria de relatividade, é bem possível que o cenário cosmológico padrão se mantenha como a descrição correta do universo, pelo menos alguns instantes após o *Big-Bang*.

Isso não significa que a cosmologia está fechada e que não há mais o que investigar. Pelo contrário, significa que ela entrou definitiva e indiscutivelmente para o domínio da ciência física, devido à possibilidade de fazer modelos e testar as suas predições. O progresso experimental e computacional continuará trazendo novidades por um bom tempo, permitindo confrontar a realidade com as novas teorias. Espera-se que num futuro próximo ocorra a detecção das ondas gravitacionais o que seria mais um teste da



relatividade geral e permitiria discriminar entre teorias alternativas da gravitação, como a NDL [32], por exemplo. As simulações de alta resolução permitirão entender a formação de galáxias a partir das flutuações primordiais.

Voltando às medidas dos parâmetros cosmológicos. Diz-se que, a partir da década passada, a cosmologia entrou na “era da precisão”. Não apenas as barras de erro diminuíram de uma ordem de magnitude, mas também estimativas utilizando diferentes métodos estão convergindo. Um cálculo recente [33], utilizando dados da estrutura em grande escala e da radiação cósmica de fundo, leva aos seguintes valores para os parâmetros cosmológicos:  $\Omega_M = 0.37_{-0.15}^{+0.25}$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.69_{-0.20}^{+0.15}$ ,  $\Omega_\nu = 0.03_{-0.03}^{+0.07}$ ,  $\Omega_b = 0.037_{-0.018}^{+0.033}$  e  $H_0 = 71_{-19}^{+22} \text{Km/s/Mpc}$ . As barras de erro ainda são bastante grandes, mas o cenário já parece estar bem definido. Esses valores estão em acordo com uma série de outras medidas independentes como: estatística de lentes gravitacionais, abundâncias de elementos leves, dados das supernovas do tipo Ia, idade do universo e oscilação de neutrinos.

De acordo com esses dados, estaríamos vivendo num universo plano, em que a contribuição da matéria que se aglomera é de uns 30% da densidade do universo. Dessa fração que gera estruturas, 82% é composto por CDM, 10% por matéria bariônica e 8% por neutrinos.

Mesmo se os parâmetros do modelo padrão já estivessem definitivamente determinados, ainda seria preciso entender pelo menos dois assuntos fundamentais: como foi o universo primordial, logo após o *Big-Bang* e como surgiram as estruturas em grande escala no universo. Nesta tese nos preocuparemos apenas com o segundo ponto, estudando um método aproximado que poderia ajudar a compreender e simular as estruturas em grandes escalas.

## 1.2 Cosmologia Newtoniana e Coordenadas Co-móveis

Nesta seção vamos introduzir as equações da cosmologia newtoniana partindo da própria mecânica de Newton. Como veremos a seguir, a teoria newtoniana não se aplica diretamente à cosmologia: é preciso estabelecer um procedimento para eliminar as inconsisten-

cias que surgem ao considerarmos uma distribuição infinita de matéria. Através desse procedimento chegaremos à formulação da cosmologia newtoniana em coordenadas comóveis, que nos permitirá estudar a formação de estruturas em grande escala. Em última instância, a justificativa para esse tratamento vem do limite newtoniano da relatividade geral, que fornece as mesmas equações a serem deduzidas nesta seção<sup>10</sup>.

A cosmologia newtoniana é de fundamental importância para estudar a formação de estruturas em grandes escalas. No regime não-linear, apenas um tratamento newtoniano é factível, portanto quase todas as simulações computacionais e aproximações analíticas são feitas com base na cosmologia newtoniana. Além disso, o limite newtoniano é uma ótima aproximação para a dinâmica das estruturas em grande escala. Para pequenas flutuações é possível fazer um tratamento relativístico, mas a análise newtoniana é muito mais simples e ajudará a compreender fisicamente o início da formação das estruturas (seção 1.3).

Para determinar as forças gravitacionais, devemos calcular o potencial gravitacional  $\phi$ , que é obtido pela solução da equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho(\vec{r}, t).$$

No entanto, essa equação apenas não é suficiente para determinar  $\phi$ : precisamos fornecer *condições de fronteira*. Num universo ilimitado, não há um critério para definir essas condições, e portanto não temos como calcular  $\phi$  a priori. Assim, as equações da mecânica, junto com a equação de Poisson, não são suficientes para determinar a solução do problema cosmológico.

Essa ambigüidade na teoria newtoniana aparece somente no estudo de um espaço infinito preenchido de matéria. Em problemas nos quais a densidade cai suficientemente rápido no infinito, podemos utilizar a condição  $\phi \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow \infty$ . Essa condição.

---

<sup>10</sup>Veja o apêndice 1, seção A.5.

juntamente com a equação de Poisson, permite determinar o potencial  $\phi$  completamente:

$$\phi(\vec{r}, t) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'.$$

Se insistirmos em utilizar essa expressão quando  $\rho$  não decai para  $r \rightarrow \infty$ , então  $\phi$  diverge. A impossibilidade de se obter uma cosmologia puramente newtoniana é atribuída por muitos autores à divergência de  $\phi$ . No entanto, as quantidades observáveis são as derivadas segundas  $\partial\phi/\partial r_i \partial r_j$ , que determinam a aceleração relativa de partículas vizinhas. Elas ficam indefinidas devido à divergência do potencial, ou melhor, pela falta de condições de fronteira apropriadas.

Qual seria o valor do campo gravitacional  $\vec{g}$  num meio infinito e homogêneo? Se consideramos primeiro o campo dentro de uma esfera finita de raio  $R$  temos, pelo teorema de Gauss,  $\vec{g} = -(4\pi/3)G\rho\vec{r}$  (para  $r < R$ ). Esse resultado não muda para  $R \rightarrow \infty$  e logo seríamos tentados a concluir que o campo está bem definido em qualquer  $r$  finito. Suponha agora que estejamos no interior de um esferóide de excentricidade  $e > 0$ . Nesse caso o campo gravitacional não é radial. A única diferença está na casca entre o esferóide e a esfera nele circunscrita, no entanto o campo muda em todos os pontos (exceto em  $r = 0$ ). Temos um exemplo explícito em que o campo gravitacional depende das condições de contorno no infinito. Outro problema é que, mesmo num espaço homogêneo o campo dependeria fortemente da posição e da origem do sistema de coordenadas.

Vamos ver agora um modo de evitar esses problemas que nos permite *construir* uma cosmologia newtoniana. Dessa forma, as condições de contorno no infinito já estarão “embutidas” nas equações de movimento.

As observações de objetos distantes mostram que o universo está se expandindo. Se a expansão fosse perfeitamente uniforme, as separações entre objetos co-móveis com a expansão cósmica mudariam com o mesmo fator de escala  $a(t)$ . Na verdade sabemos que ela não é uniforme, mas podemos fatorar a expansão média. É nesse processo que desaparecerá a indeterminação de  $\vec{g}$ .

Definimos *coordenadas co-móveis*  $\vec{x}$  pela relação<sup>11</sup>

$$\vec{x} := \frac{\vec{r}}{a(t)} \quad (1.2)$$

e o tempo conforme  $\tau$  por<sup>12</sup>

$$d\tau := \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.3)$$

Para uma expansão perfeitamente uniforme os vetores posição co-móveis  $\vec{x}$  permanecem fixos para todas as partículas. No caso de uma expansão perturbada, cada partícula segue uma trajetória  $\vec{x}(\tau)$ . A velocidade em coordenadas co-móveis, conhecida como velocidade peculiar é definida por

$$\vec{v} := \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{1}{a} \frac{d\vec{r}}{d\tau} - \frac{da/d\tau}{a^2} \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} - H\vec{r}. \quad (1.4)$$

O parâmetro de Hubble é definido por

$$H(t) := \frac{1}{a^2} \frac{da}{d\tau} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}.$$

Note que  $\vec{v}$  é a velocidade medida por um observador cuja coordenada co-móvel é fixa (para esse observador,  $\vec{r} = a\vec{x}$  e portanto a sua velocidade é dada por  $(da/dt)(1/a)\vec{r} = H\vec{r}$ ).

Como sempre podemos multiplicar o fator de escala  $a$  por uma constante, é melhor trabalhar com quantidades que são invariantes com relação a essa mudança, estas serão chamadas de quantidades *próprias*. Assim  $H$  e  $v_i = dx_i/d\tau = (adr_i)/(adt)$  são quantidades próprias, enquanto  $dx_i/dt$  não é. Por isso utilizamos  $\tau$  em vez de  $t$  como variável independente.

Para deduzir as leis que governam a expansão média, consideraremos uma distribuição

<sup>11</sup>As coordenadas cartesianas usuais de uma partícula ou elemento de volume serão denotadas por  $r_i$ .

<sup>12</sup>A variável  $t$ , conhecida como tempo cosmológico, é o tempo próprio medido por um observador co-móvel com a expansão média.

esféricamente simétrica e uniforme com densidade  $\bar{\rho}$ . Para que a homogeneidade seja mantida, é preciso que todas as escalas se alterem por igual. Dessa forma a trajetória de um elemento de volume de massa  $m$  será dada por  $r(t) = a(t)x$  com  $x$  fixo (diferentes valores de  $x$  denotam elementos de diferentes cascas esféricas). A equação de conservação da energia para esse elemento de volume é

$$\frac{1}{2}m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GMm}{r} = E,$$

onde  $M$  é a massa contida numa esfera de raio  $r$ . Logo

$$\frac{\left( \frac{da}{dt}x \right)^2}{2} - G \frac{\frac{4\pi}{3}\bar{\rho} (ax)^3}{ax} = \frac{E}{m}.$$

(Note que cada casca pode ter uma energia total diferente  $E(x)$ . Ela é fixada pelas condições iniciais). Assim, obtemos

$$(aH)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}a^2 - K, \quad (1.5)$$

onde  $K = -2E/mx^2$ . Essa equação é conhecida como equação de Friedmann. Para termos uma expansão homogênea, a função  $a(\tau)$  deve ser a mesma para todos os elementos de volume, logo devemos ter  $K = \text{const}$ . A equação de Friedmann que acabamos de deduzir é *idêntica* àquela obtida utilizando a relatividade geral (eq. A.65). Na relatividade geral pode-se mostrar que  $K$  está relacionado à curvatura do espaço (ou seja, das hipersuperfícies com  $\tau$  constante).

Em termos do parâmetro cosmológico de densidade  $\Omega := 8\pi G\rho/(3H^2)$ , a equação (1.5) pode ser escrita como

$$K = (\Omega - 1)(aH)^2. \quad (1.6)$$

Vemos que a curvatura é nula se  $\Omega = 1$ , o que ocorre se a densidade é igual à densidade crítica  $\rho_c := 3H^2/(8\pi G)$ . No caso de termos diversas componentes com densi-

dades  $\rho_i$  o parâmetro  $\Omega$  é a soma das contribuições de cada componente:  $\Omega = \sum_i \Omega_i = \sum_i 8\pi G \rho_i / (3H^2)$ .

Para resolver a equação de Friedmann ainda é preciso obter uma relação do tipo  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(a(\tau))$ . Consideremos um elemento de volume  $V$  formado por um dado conjunto de partículas, e cuja densidade é  $\bar{\rho}$ . A conservação da massa implica em  $\bar{\rho}V = m = \text{const.}$  No caso da expansão uniforme, uma esfera de raio  $r(t) = xa(t)$  terá sempre as mesmas partículas, assim  $\bar{\rho}(4\pi/3)(ax)^3 = \text{const.}$  ou seja

$$\bar{\rho} \propto a^{-3}. \quad (1.7)$$

Substituindo essa expressão na eq. (1.5) obtemos uma equação diferencial de 1ª ordem no tempo para o fator de escala  $a(t)$  [ou  $a(\tau)$ ]

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G \bar{\rho}_i a_i^{-3}}{3} \frac{1}{a} - K, \quad (1.8)$$

onde  $\bar{\rho}_i$  e  $a_i$  são os valores de  $\bar{\rho}$  e  $a$  num tempo  $t_i$  dado. Essa equação pode ser integrada para vários valores de  $K$ . Os diversos valores dessa constante determinam o comportamento assintótico do fator de escala.

Um caso importante é o universo de Einstein-de Sitter, que consiste em escolher  $K = 0$  (ou seja,  $\Omega = 1$ ). Nessa situação a equação de Friedmann (1.8) possui uma solução analítica simples:

$$a(\tau) = \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau_i}\right)^2, \quad (1.9)$$

onde  $\tau_i^2 = 3/(2\pi G \bar{\rho}_i a_i^{-3})$ . De agora em diante escolheremos o instante  $\tau_0 = 0$ , que corresponde ao *Big-Bang*. Note que sempre é possível redefinir  $a_i$ , de modo que  $a(\tau)$  é determinado a menos de uma constante. O importante é o comportamento temporal  $a \propto \tau^2$ . No universo de Einstein-de Sitter a conversão para o tempo usual  $t$ , chamado de tempo cosmológico, fica fácil:  $t = \int a(\tau) d\tau$  o que leva a  $\tau \propto t^{1/3}$ . Dessa forma, temos

$a \propto t^{2/3}$ .

Note que a (1.7) só é válida para matéria não-relativística, para a qual não há variação da massa de repouso. É possível estender esse tratamento considerando fluidos relativísticos (veja a seção A.3), ou mesmo misturas de fluidos.

Quando  $a \rightarrow 0$ , os dois primeiros termos da equação (1.5) divergem. Dessa forma, para pequenos valores de  $a$ , a curvatura não é importante. As primeiras medidas do parâmetro de Hubble já indicavam que a curvatura deveria ser pequena *hoje*, de modo que o primeiro termo do lado direito da (1.5) domina sobre o segundo. Dessa forma, quando as primeiras estruturas foram formadas o termo de curvatura era totalmente desprezível. Assim que o universo passa a ser dominado pela matéria, de modo que a (1.7) é válida, o fator de escala  $a$  é dado pela solução de Einstein-de Sitter. A equação (1.5) não inclui o termo cosmológico, mas como vimos na seção (1.1.3) ele também é desprezível para pequenos valores de  $a$ . Desse modo, mesmo num universo em que  $\Omega \neq 1$  e  $K \neq 0$ , a solução de Einstein-de Sitter, representa bem o comportamento do fator de escala para  $a \ll 1$ , em particular, no início da formação de estruturas.

Derivando a (1.8) em relação a  $\tau$  e usando a (1.7) obtemos<sup>13</sup>:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\bar{\rho}_i a_i^3}{a} = -\frac{4\pi G}{3} a^2 \bar{\rho}. \quad (1.10)$$

Agora estamos prontos para descrever o movimento de um meio não uniforme num universo em expansão. A distribuição de massa pode ser escrita como:

$$\rho(\vec{x}, \tau) = \bar{\rho}(\tau) + \delta\rho(\vec{x}, \tau),$$

onde  $\bar{\rho}$  é a densidade média:  $\bar{\rho} = (1/V) \int_V \rho(\vec{x}, \tau) d^3x$ , se  $V$  é um volume “representativo” do universo. Aí entra explicitamente a hipótese do universo ser homogêneo - em média - a partir de uma certa escala (senão a integral não converge, e  $\bar{\rho}$  não é bem definido). Esse tratamento não seria válido num universo com estrutura fractal ilimitada, mas é

---

<sup>13</sup>A partir deste capítulo utilizaremos a notação  $\dot{\phantom{a}} \equiv \partial/\partial\tau$ .

perfeitamente aplicável se a distribuição de matéria é fractal até uma dada escala.

Vamos partir da equação de Newton

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} = -G \int \rho \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r',$$

e transformá-la para coordenadas co-móveis e tempo conforme. Usando a (1.4) e a (1.3), obtemos

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{a} \frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} + \vec{x} \frac{1}{a} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) + \frac{\dot{a}}{a^2} \frac{d\vec{x}}{d\tau}.$$

Assim, a equação de movimento fica

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} + \vec{x} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) + \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\vec{x}}{d\tau} = -Ga^2 \int (\bar{\rho}(\tau) + \delta\rho(\vec{x}, \tau)) \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3 x'.$$

Agora podemos eliminar os termos que aparecem num universo homogêneo da seguinte forma. O primeiro termo do lado direito é o campo gerado por uma distribuição uniforme de matéria (multiplicado por  $a$ ). Se supomos que o universo é (em média) esfericamente simétrico a grandes distâncias, esse termo dá  $-(4\pi/3)Ga^2\bar{\rho}\vec{x}$ . É aqui que as condições de contorno no infinito são usadas explicitamente. Usando a (1.10), vemos que os termos proporcionais a  $\vec{x}$  se cancelam, de modo que a equação de movimento fica<sup>14</sup>

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\vec{x}}{d\tau} = -Ga^2 \int \delta\rho(\vec{x}', \tau) \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3 x' = -\vec{\nabla}_x \tilde{\phi}, \quad (1.11)$$

---

<sup>14</sup>Se  $\bar{\rho}$  inclui matéria relativística, tanto o campo gravitacional como o comportamento de  $a(\tau)$  mudam. Os termos homogêneos também se cancelam nesse caso, mas a sua justificativa requer a relatividade geral, ou sua extensão newtoniana (sec. A.3).



onde

$$\tilde{\phi}(\vec{x}, \tau) := -Ga^2 \int \frac{\delta\rho(\vec{x}', \tau)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'. \quad (1.12)$$

Note que  $\tilde{\phi}$  é uma quantidade própria:  $a^2 d^3x'/|\vec{x} - \vec{x}'| \sim d^3r/|\vec{r} - \vec{r}'|$ .

Como  $\int_V \delta\rho d^3x \rightarrow 0$  em grandes escalas,  $\tilde{\phi}$  é finito e bem definido (exceto sobre massas pontuais, que ignoramos ao tratar o campo de densidade como contínuo). Não há mais ambigüidade na equação de movimento para  $\vec{x}(\tau)$ . O campo  $\tilde{\phi}$  não varia muito com a origem do sistema de coordenadas, já que a contribuição da distribuição de matéria distante é pequena; o que resolve mais um paradoxo da cosmologia newtoniana. Concluímos que  $\tilde{\phi}$ , chamado de *potencial gravitacional peculiar*, é o potencial apropriado para a cosmologia newtoniana, desde que trabalhemos em coordenadas co-móveis. Esse tratamento é válido mesmo em regiões altamente heterogêneas, já que em nenhum momento foi preciso supor que  $\delta\rho \ll \bar{\rho}$ . O procedimento efetuado nesta seção serve apenas para eliminar o problema das condições de contorno no infinito.

Em resumo, as equações de movimento ficam:

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{d\vec{x}}{d\tau} = -\vec{\nabla}_x \tilde{\phi}, \quad \nabla_x^2 \tilde{\phi} = 4\pi Ga^2 \delta\rho(x_i, \tau) \quad (1.13)$$

As mesmas equações saem do limite de campos fracos ( $|\phi| \ll c^2$ ) e baixas velocidades ( $v^2 \ll c^2$ ) da relatividade geral para um espaço-tempo de Robertson-Walker perturbado. Localmente, a descrição da relatividade geral num universo de Friedmann-Lemaître perturbado é equivalente à cosmologia newtoniana, com a condição de fronteira de que a distribuição de massa é homogênea e isotrópica no infinito. O tratamento da cosmologia newtoniana requer que o espaço seja euclidiano, o que é uma ótima aproximação; exceto próximo a objetos compactos (como buracos negros), e eventualmente, em escalas da ordem da distância de Hubble  $c/H$ .

**Observação:** Há várias maneiras de se eliminar a indeterminação em  $\partial\phi/\partial r_i \partial r_j$ ,

que foi discutida no início desta seção. Um método consiste no exame preliminar de um corpo finito, seguido da transição para um corpo infinito. Foi esse o método utilizado nesta seção para uma distribuição de matéria esférica. O mesmo procedimento pode, por exemplo, ser aplicado a um elipsóide homogêneo. Ao investigar o caso de um elipsóide finito, vemos que é possível acrescentar infinitas camadas sem alterar a sua evolução temporal, nem o campo gravitacional em seu interior (veja a seção 3.3.1). Assim podemos produzir um universo infinito com as propriedades das condições de fronteira do elipsóide. O resultado seria portanto diferente do obtido nesta seção, que está em acordo com os dados observacionais e com o limite newtoniano de um universo de Friedmann-Lemaître perturbado (veja a seção A.5). Dessa forma, vemos que não é possível introduzir uma cosmologia puramente newtoniana de forma unívoca.

Uma outra forma de se obter a cosmologia newtoniana é estudar o desvio geodésico num universo homogêneo, através da formulação da gravitação newtoniana na linguagem do espaço curvo [34, 35]. No entanto, essa abordagem é muito mais complicada, pois utiliza o aparato matemático da geometria diferencial. Além disso ela não leva imediatamente às equações newtonianas para um universo heterogêneo.

### 1.3 O Crescimento Linear das Estruturas

Nesta seção introduziremos as equações de fluido da cosmologia newtoniana e estudaremos o seu comportamento para pequenas flutuações de um universo homogêneo. Mostraremos como funciona o mecanismo de crescimento das estruturas no regime linear, introduziremos o comprimento de Jeans e veremos como surgem as oscilações acústicas num fluido com colisões. Também discutiremos como aparecem os modos adiabáticos e isentrópicos e mostraremos a importância da matéria escura para a formação de estruturas. Apresentaremos algumas relações válidas no regime linear que servem de motivação para a introdução de várias aproximações não-lineares.

Lembramos que as equações deste capítulo só serão válidas para flutuações com dimensões menores que o raio de Hubble. Além disso, só poderemos estudar as perturbações

na componente não relativística, na era dominada pela matéria. Com essas restrições, os resultados newtonianos são idênticos aos da teoria de perturbação relativística<sup>15</sup>.

### 1.3.1 Equações Cosmológicas de Fluidos

Um fluido é um conjunto de partículas tratado como um contínuo. Em cosmologia lidamos com dois tipos de fluido: Se as colisões entre as partículas são suficientemente rápidas para estabelecer um equilíbrio térmico local (ou seja uma distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann), o fluido é um gás. Se não há colisões temos um gás de matéria escura. As equações de fluido discutidas nesta seção aplicam-se a gases com colisões, ou à matéria escura antes da interseção das trajetórias. Vamos lidar com um gás não relativístico e ignorar forças elétricas e magnéticas.

As equações de fluido vêm das leis de conservação da massa e do momentum e das equações de estado. A conservação da massa é representada pela *equação de continuidade*. Nas coordenadas  $(\vec{r}, t)$  ela é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.14)$$

Como na seção anterior, reescrevemos a densidade e a velocidade fatorando o comportamento médio:

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta), \quad (1.15)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = H\vec{r} + \vec{v} \quad (1.16)$$

onde  $\delta = \delta\rho/\bar{\rho}$  e  $\vec{v} = d\vec{x}/d\tau$  é a velocidade peculiar. Transformando a equação de continuidade (1.14) para coordenadas co-móveis e tempo conforme (eqs. 1.2 e 1.3),

---

<sup>15</sup>Ainda é possível estudar as perturbações na componente relativística com equações muito semelhantes às newtonianas. Basta fazer uma pequena modificação nessas equações para incluir os efeitos inerciais e gravitacionais da pressão. Veja uma discussão no apêndice 1, seção A.3.

ontemos

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \vec{\nabla}_x \cdot [(1 + \delta)\vec{v}] = 0. \quad (1.17)$$

A conservação do momentum é representada pela *equação de Euler*

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p. \quad (1.18)$$

Escrevendo essa equação em coordenadas co-móveis e notando que  $d/dt = (1/a)d/d\tau$ , obtemos

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(H\vec{r} + \vec{v}) = \frac{\vec{x}}{a} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) + \vec{v} \frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{1}{a} \frac{d\vec{v}}{d\tau}.$$

Como vimos na seção 1.2, o campo gravitacional é

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}_r\phi = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}a\vec{x} - \frac{1}{a}\vec{\nabla}_x\tilde{\phi}. \quad (1.19)$$

Ao substituírmos estes resultados na (1.18) notamos que os termos proporcionais a  $\vec{x}$  se cancelam (pela 1.10). Assim, obtemos finalmente:

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p, \quad (1.20)$$

com as derivadas sendo calculadas no sistema co-móvel, e  $\phi$  representando o potencial peculiar (a partir de agora não colocaremos mais o til, nem o símbolo  $x$  na derivada).

Para fechar as equações de fluido ainda é necessária uma equação de evolução para a pressão, ou para outra variável termodinâmica, como por exemplo a entropia. Para um gás com colisões temos uma *equação de estado*  $p = p(\rho, S)$  onde  $S$  é a entropia específica. Num um gás monoatômico ideal não-relativístico, em processos reversíveis temos,

$$TdS = d\left(\frac{3p}{2\rho}\right) + pd\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (1.21)$$

Os principais efeitos da pressão do gás podem ser extraídos da teoria de perturbação linear. Nela linearizamos as equações de fluido em torno da solução uniforme. Essa técnica é útil para analisar a instabilidade gravitacional e outras instabilidades. As equações de fluido linearizadas proporcionam uma descrição razoável das flutuações na matéria (escura e luminosa) de pequena amplitude e grande escala, mesmo se a estrutura é não-linear em escalas menores. Essa é uma suposição usual na teoria das estruturas em grandes escalas. Ela é sustentada razoavelmente pelas simulações numéricas.

Consideraremos que  $\delta$  e  $\vec{v}$  são pequenos ( $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ) e desprezaremos termos de segunda ordem ( $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ). Linearizando as equações de continuidade e de Euler temos

$$\dot{\delta} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \approx 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} \approx -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (1.22)$$

A pressão pode ser obtida da equação de estado  $p = p(\rho, S)$ . Para um gás monoatômico ideal não-relativístico, utilizando a (1.21)

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = c_s^2 \vec{\nabla} \delta + \frac{2}{3} T \vec{\nabla} S, \quad c_s^2 := \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{5}{3} \frac{p}{\rho}. \quad (1.23)$$

Como estamos lidando com pequenas perturbações de um universo homogêneo, podemos escrever a temperatura e a entropia como:  $T(\vec{x}, \tau) = \bar{T}(\tau) + \delta T(\vec{x}, \tau)$  e  $S(\vec{x}, \tau) = \bar{S}(\tau) + \delta S(\vec{x}, \tau)$ . O lado direito da (1.23) fica, em 1ª ordem:  $(2/3)\bar{T}\vec{\nabla}^2(\delta S)$ , no restante desta discussão ficará subentendido que nos referimos a  $\bar{T}$  (não faz diferença se escrevemos  $\delta S$  ou  $S$  no laplaciano).

Se a escala de tempo para variações da entropia é longa comparada com as escalas de tempo acústicas ou gravitacionais, teremos  $dS/d\tau \approx 0$ . Na teoria de perturbação linear, essa condição implica em  $\dot{S} \approx 0$ . Há cinco variáveis do fluido ( $\rho$ ,  $S$  e três componentes de  $\vec{v}$ ), e portanto há cinco modos linearmente independentes. A perturbação linear geral é uma combinação desses modos, que estudaremos agora.

### 1.3.2 Flutuações Isentrópicas e o Critério de Jeans

Vamos estudar primeiramente o comportamento de *flutuações isentrópicas*, para as quais não há gradientes de entropia entre elementos vizinhos. Esse tipo de perturbação seria o produto natural das flutuações quânticas durante a inflação seguida pelo reaquecimento [3]. As interações rápidas entre partículas em equilíbrio térmico eliminariam os gradientes de entropia. Se  $\vec{\nabla}S = 0$ , as equações linearizadas do fluido e do campo gravitacional (1.22), (1.23) e (1.13) são

$$\dot{\delta} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} = -\vec{\nabla} \phi - c_s^2 \vec{\nabla} \delta, \quad \nabla^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta. \quad (1.24)$$

Aplicando o operador  $\vec{\nabla}$  na equação de Euler e combinando com as duas restantes, obtemos uma equação de onda acústica forçada e amortecida para  $\delta$ :

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta + c_s^2 \nabla^2 \delta. \quad (1.25)$$

Exceto pelo amortecimento de Hubble (segundo termo) e pelo termo gravitacional, essa equação é idêntica à que obteríamos para ondas de som num meio estático.

Para eliminar o laplaciano aplicamos a transformada de Fourier na equação de onda. A equação para o modo  $\vec{k}$  fica:

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = (4\pi G \bar{\rho} a^2 - k^2 c_s^2) \delta \equiv (k_J^2 - k^2) c_s^2 \delta, \quad (1.26)$$

onde definimos o numero de onda de Jeans co-móvel

$$k_J := \left( \frac{4\pi G \bar{\rho} a^2}{c_s^2} \right)^{1/2}. \quad (1.27)$$

Note que a dependência de  $\delta$  em  $\vec{k}$  se dá apenas em termos de  $k = |\vec{k}|$ , o que é uma consequência de isotropia do espaço.

Desprezando o amortecimento de Hubble (colocando  $a = 1$ ), a dependência temporal

da solução da equação (1.26) seria  $\delta \propto \exp(-i\omega\tau)$ , com

$$\omega^2 = -\omega_J^2 + k^2 c_s^2, \quad \omega_J = k_J c_s = (4\pi G \bar{\rho})^{1/2}. \quad (1.28)$$

onde  $\omega_J$  é a frequência de Jeans. Modos gravitacionais com  $k < k_J$  são *instáveis* ( $\omega^2 < 0$ ), como foi observado por Jeans em 1902. Fisicamente, as forças de pressão não podem evitar o colapso gravitacional quando o tempo para o som atravessar o corpo  $\lambda/c_s$  é maior que o tempo de queda livre  $(G\rho)^{-1/2}$  para uma perturbação de tamanho  $\lambda = 2\pi a/k$ .

O comprimento de Jeans (co-móvel) é definido por  $\lambda_J := 2\pi/k_J$ . Para perturbações muito maiores que esse comprimento ( $k \ll k_J$ ) a evolução se comporta como num fluido sem colisões, isto é, a pressão é desprezível.

Incluindo o amortecimento, a instabilidade de Jeans passa a ter um comportamento em lei de potência no tempo, em vez de exponencial, para  $k \ll k_J$ . Em geral há uma solução crescente e outra decrescente para  $\delta(k, \tau)$ ; elas serão denotadas por  $\delta_{\pm}(k, \tau)$ .

Para um fluido não relativístico sem colisões, como a matéria escura fria a expressão (1.25) fica

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta. \quad (1.29)$$

Essa equação também é válida num fluido com  $p \neq 0$  para modos com  $k \ll k_J$ .

Num fundo de Einstein-de Sitter ( $\Omega = 1$ , matéria não relativística), a equação de Friedmann (1.5) fica  $4\pi G \bar{\rho} a^2 = (3/2)(\dot{a}^2/a^2)$ , cuja solução é dada por  $a(\tau) = (\tau/\tau_0)^2$  (eq. 1.9). Dessa forma o termo  $4\pi G \bar{\rho} a^2$  fica igual a  $6/\tau^2$  e a equação (1.29) pode ser escrita como

$$\ddot{\delta} + \frac{2}{\tau}\dot{\delta} = \frac{6}{\tau^2}\delta.$$

A solução geral para  $\delta(\vec{x}, \tau)$  é:

$$\delta(\vec{x}, \tau) = \int A_+(\vec{k}) \delta_+(k, \tau) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k + \int A_-(\vec{k}) \delta_-(k, \tau) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k \quad (1.32)$$

Se  $k \ll k_J$ ,  $\delta_-$  decai rapidamente, de forma que só os modos crescentes sobrevivem. Para poeira, a evolução de  $\delta$  não depende de  $k$ . Mantendo apenas os modos crescentes vemos que  $\delta(\vec{x}, \tau)$  mantém a sua forma e é apenas multiplicado por  $\delta_+(\tau)$ .

### Evolução do potencial gravitacional

É interessante escrever a equação de onda linear em termos de  $\phi$ , em vez de  $\delta$ . Para isso, usamos a transformada de Fourier na equação de Poisson  $\nabla^2 \phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta$ , obtendo

$$\phi(\vec{k}, \tau) = -\frac{4\pi G}{k^2} a^2 \bar{\rho} \delta(\vec{k}, \tau) \propto a^{-1} \delta. \quad (1.33)$$

Note que, para modos crescentes num universo de Einstein-de Sitter, no regime linear, temos  $\phi = \text{const}$ . Essa propriedade, sendo extrapolada para o regime não-linear, dá origem à aproximação do potencial congelado [36, 37].

Substituindo a expressão (1.33) na equação (1.26) e utilizando equação de Friedmann (1.5), obtemos:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3}{2}K\right)\phi + k^2 c_s^2 \phi = 0. \quad (1.34)$$

Utilizando novamente a equação de Friedmann, em conjunto com a (1.10) podemos mostrar que  $\ddot{a}/a - (1/2)\dot{a}^2/a^2 = -(1/2)K$ . Assim a (1.34) fica

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + (k^2 c_s^2 - 2K)\phi = 0. \quad (1.35)$$

Quando escrita em termos do potencial gravitacional, em vez do contraste de densidade, a equação de onda perde seu termo de fonte gravitacional.

As soluções da eq. (1.35) dependem do comportamento temporal da velocidade do



son, assim como da cosmologia de fundo. Para termos uma idéia, vamos considerar a evolução do potencial num universo de Einstein-de Sitter composto de um gás ideal. Usando a aproximação  $c_s^2 = c_{0s}^2 a^{-1}$  a eq. (1.35) fica:

$$\ddot{\phi} + \frac{6}{\tau} \dot{\phi} + (kc_{0s}\tau_0)^2 \frac{\phi}{\tau^2} = 0$$

As soluções dessa equação são<sup>17</sup>:

$$\phi_{\pm}(k, \tau) \propto \tau^m, \quad m = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(kc_{0s}\tau_0)^2}}{2}. \quad (1.36)$$

Nessa solução, modos crescentes de grandes comprimentos de onda ( $kc_s\tau \ll 1$ ) têm potencial correspondente  $\phi_+ = const.$ , enquanto os modos decrescentes têm  $\phi_- \propto \tau^{-5} \propto \int a^{-3} d\tau$ . Esse comportamento se repete para qualquer equação de estado usual num universo de Einstein-de Sitter. As perturbações na densidade e no potencial diferem por um fator  $\bar{\rho}a^2 \propto a^{-1}$  (1.33). Se  $K < 0$  ou  $k^2 c_s^2 > 0$ , então  $\phi_+$  decai com o tempo, embora  $\delta_+$  continue crescendo.

### Perturbações na matéria escura e na matéria bariônica

A equação (1.26) pode ser generalizada para várias componentes da matéria. Nesse caso, o termo gravitacional contém as contribuições de todas as componentes e a equação fica

$$\ddot{\delta}_A + \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta}_A + k^2 c_s^2 \delta_A = 4\pi G a^2 \sum_B \bar{\rho}_B \delta_B,$$

onde  $\delta_B := (\rho_B - \bar{\rho}_B) / \bar{\rho}_B$ <sup>18</sup>.

Um exemplo importante é o sistema bárions + matéria escura logo após o desacopla-

<sup>17</sup>Esse resultado poderia ser obtido substituindo a (1.31) na (1.33).

<sup>18</sup>De modo que  $\sum_B \bar{\rho}_B \delta_B = \sum_B (\rho_B - \bar{\rho}_B) = \rho_{\text{tot}} - \bar{\rho}_{\text{tot}} = \bar{\rho}_{\text{tot}} \delta_{\text{tot}}$ .

mento. Para  $k \ll k_J$  a evolução será governada pelo sistema de equações

$$\ddot{\delta}_{ME} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{ME} = 4\pi G a^2 (\bar{\rho}_b \delta_b + \bar{\rho}_{ME} \delta_{ME}) \simeq 4\pi G a^2 \bar{\rho}_{ME} \delta_{ME}, \quad (1.37)$$

$$\ddot{\delta}_b + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_b = 4\pi G a^2 (\bar{\rho}_b \delta_b + \bar{\rho}_{ME} \delta_{ME}) \simeq 4\pi G a^2 \bar{\rho}_{ME} \delta_{ME}. \quad (1.38)$$

Antes do desacoplamento as flutuações na componente bariônica não evoluem, pois ela está em forte interação com a radiação. Já as perturbações na matéria escura podem evoluir livremente na era dominada pela matéria ( $\tau > \tau_{\text{eq}}$ ). Por isso, logo após o desacoplamento, temos  $\bar{\rho}_{ME} \delta_{ME} \gg \bar{\rho}_b \delta_b$ .

Como para  $a \sim a_{\text{desacoplamento}} \ll 1$ , temos  $a \simeq a_{\text{EdS}} \propto \tau^2$ , o modo crescente será dado por  $\delta_+(\tau) \simeq a(\tau)$  e a solução da equação (1.37) será

$$\delta_{ME} = ca,$$

onde  $c$  é uma constante. Substituindo essa relação na (1.38) e usando que, em EdS  $4\pi G a^2 \bar{\rho} = 6/\tau^2$ , temos

$$\ddot{\delta}_b + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_b = 6c.$$

A solução do modo crescente dessa equação é

$$\delta_b = c(a(\tau) - b) = \delta_{ME} \left( 1 - \frac{b}{a(\tau)} \right), \quad (1.39)$$

onde  $b$  é uma constante. Essa solução mostra que  $\delta_b \rightarrow \delta_{ME}$  para  $a(\tau) \gg b$ , mesmo se  $\delta_b \simeq 0$  para algum  $a(\tau_i) = b$ , que pode ocorrer, digamos, para  $\tau_i = \tau_{\text{desacoplamento}}$ . Esse importante resultado mostra que *as perturbações na matéria bariônica são induzidas pelas flutuações da matéria escura após o desacoplamento*. Isso mostra que a matéria escura é a principal responsável pela formação das primeiras estruturas em grande escala. Sem a matéria escura, as flutuações seriam muito menores e não teria havido tempo de produzir as estruturas em grande escala que são observadas.

### 1.3.3 Flutuações de Entropia e Modos de Isocurvatura

Gradientes de entropia agem como fonte para o crescimento de perturbações na densidade. Usando a (1.23) na (1.22) e repetindo a dedução da equação linear acústica, obtemos

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta - c_s^2\nabla^2\delta = \frac{2}{3}T\nabla^2S. \quad (1.40)$$

Para uma evolução *adiabática*,  $dS/d\tau = 0$  e o que importa é o gradiente inicial de entropia. Gradientes de entropia podem ser produzidos no universo primordial por transições de fase de 1ª ordem resultando em variações espaciais da razão fóton/bárion ou outras abundâncias. Se não há gradientes de entropia antes dessas transições, então as variações na entropia só podem ser criadas por processos não adiabáticos. Na prática essas flutuações na entropia são tomadas como condições iniciais para uma evolução adiabática subsequente.

A equação (1.40) não é aplicável ao universo primordial, pois a sua dedução supõe um gás não relativístico ( $c_s^2 \ll c^2$ ). No entanto, o comportamento de suas soluções é qualitativamente similar ao que se obtém no universo primitivo.

O *modo de isocurvatura* é dado pela solução da equação de evolução da densidade com  $\delta = \dot{\delta} = 0$ , mas  $\nabla^2S \neq 0$  em algum tempo inicial  $\tau_i$ . As condições iniciais podem ser encaradas como perturbações na equação de estado num universo de Robertson-Walker não perturbado (com curvatura constante), daí o nome “isocurvatura”. Variações na entropia com densidade constante correspondem a variações na pressão, que levam, através da expansão adiabática, a mudanças na densidade. Portanto, perturbações iniciais na entropia provocam perturbações na densidade.

Se conhecemos as soluções  $\delta_{\pm}(k, \tau)$ , da equação homogênea (1.25), é fácil obter as soluções da eq. (1.40). No espaço de Fourier temos (lembrando que a evolução adiabática leva  $\dot{S} = 0$ , em 1ª ordem):

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - (4\pi G\bar{\rho}a^2 - k^2c_s^2)\delta = -k^2\frac{2}{3}T(\tau)S(\vec{k}), \quad (1.41)$$

cuja solução é dada por

$$\delta_S(\vec{k}, \tau) = -\frac{2}{3}k^2 S(\vec{k}) \left[ \delta_+(k, \tau) \int_{\tau_i}^{\tau} aT\delta_- d\tau' - \delta_-(k, \tau) \int_{\tau_i}^{\tau} aT\delta_+ d\tau' \right]. \quad (1.42)$$

Note que essa expressão satisfaz as condições iniciais  $\delta_S(\vec{k}, \tau_i) = \dot{\delta}_S(\vec{k}, \tau_i) = 0$ . Vemos que tanto perturbações crescentes como decrescentes são induzidas. Depois da fonte ( $aT\delta_-$ ) se tornar pequena, as flutuações na densidade evoluem da mesma forma que as flutuações isentrópicas.

### 1.3.4 Escoamento Potencial e Vorticidade

Com as perturbações isentrópicas crescentes e decrescentes e o modo de isocurvatura, temos três dos cinco modos lineares esperados. Os outros dois graus de liberdade foram perdidos quando tomamos a divergência da equação de Euler, aniquilando qualquer contribuição transversa (rotacional) ao vetor velocidade. Consideraremos agora a parte transversa de  $\vec{v}$ .

Pelo teorema de Helmholtz qualquer campo vetorial diferenciável  $\vec{v}(\vec{x})$  pode ser escrito como a soma de suas partes longitudinal (irrotacional) e transversa (com divergência nula)  $\vec{v}_{\parallel}$  e  $\vec{v}_{\perp}$ , respectivamente:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}_{\parallel}(\vec{x}) + \vec{v}_{\perp}(\vec{x}), \quad \vec{\nabla} \times \vec{v}_{\parallel} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\perp} = 0, \quad (1.43)$$

com  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\parallel} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \theta$  e  $\vec{\nabla} \times \vec{v}_{\perp} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\omega}$ . As variáveis  $\theta$  e  $\vec{\omega}$  são chamadas escalar de expansão e vetor vorticidade co-móveis.

Em nossa discussão precedente sobre a evolução de perturbações, implicitamente só foi considerado  $\vec{v}_{\parallel}$ . Os dois graus de liberdade restantes correspondem às componentes de  $\vec{v}_{\perp}$  (a condição de transversalidade  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\perp} = 0$  remove um grau de liberdade desse campo trivetorial). Podemos obter uma equação relativamente simples para  $\vec{v}_{\perp}$ , na verdade para o seu rotacional  $\vec{\omega}$ . Calculando o rotacional da equação de Euler (1.20) e usando que

$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v} + (1/2) \vec{\nabla}(\rho^2)$  obtemos:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) + \rho^{-2} (\vec{\nabla} \rho) \times (\vec{\nabla} p). \quad (1.44)$$

Essa expressão é conhecida como equação de Kelvin-Helmholtz para o transporte de vorticidade. Para um gás ideal monoatômico, podemos substituir o gradiente da pressão utilizando a (1.23). Lembrando que  $\vec{\nabla} \rho = \bar{\rho} \vec{\nabla} \delta$ , temos:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{\omega} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) + \frac{2}{3} T (\vec{\nabla} \ln \rho) \times (\vec{\nabla} S). \quad (1.45)$$

O termo proveniente do gradiente da entropia é chamado de termo *baroclínico*.

Com a equação (1.45), podemos provar um resultado genérico muito importante: Se  $\vec{\omega} = 0$  inicialmente em todos os pontos, então  $\vec{\omega}$  permanece nulo, se o termo baroclínico é igual a zero (supondo que outros torques, como os causados por campos magnéticos, também se anulam). A importância desse resultado em cosmologia é devida à utilização de condições iniciais irrotacionais e isentrópicas em muitos modelos cosmológicos. Se a evolução é adiabática, segue que  $\vec{\omega} = 0$ . Um escoamento desse tipo também é chamado de potencial, pois o campo de velocidades pode ser obtido a partir de um potencial de velocidade  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} = -\vec{\nabla} \Phi_v$ .

Processos não adiabáticos (aquecimento e resfriamento) e ondas de choque<sup>19</sup> podem gerar vorticidade. Num fluido sem colisões, a sua velocidade é definida como a média das velocidades de todas as massas num ponto. Essa média se comporta como produtora de entropia nas regiões em que as trajetórias se interceptam e portanto a vorticidade pode ser gerada pelo campo médio de velocidades. A vorticidade também pode ser gerada por condições iniciais de isocurvatura. Para grandes comprimentos de onda, vemos pela equação (1.42) que  $\delta_S \propto \nabla^2 S$  no regime linear. O gradiente de entropia fornece um torque baroclínico proporcional a  $\vec{\nabla} \delta_S \times \vec{\nabla} S \propto \vec{\nabla}(\nabla^2 S) \times \vec{\nabla} S$ , que é diferente de zero

---

<sup>19</sup>A prova da eq. (1.44) está baseada na hipótese de que o fluido é um contínuo. Essa aproximação deixa de valer em ondas de choque.

em geral (mas ele aparece apenas na teoria de perturbação de 2ª ordem).

Na maioria dos modelos de formação de estruturas, a produção de vorticidade é pequena até a formação de choques (ou o cruzamento das trajetórias, no caso de matéria sem colisões). Desse modo, podemos obter o potencial de velocidade calculando a integral de linha do campo de velocidades:

$$\Phi_v(\vec{x}) = \Phi_v(0) - \int_0^{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (1.46)$$

Escolhendo um caminho radial em relação ao observador, é possível reconstruir o potencial de velocidade. Assim podemos obter as componentes transversais da velocidade a partir da componente radial. Essa idéia é a base do método potencial de reconstrução do escoamento, chamado de POTENT [38]. Se as flutuações médias da densidade são suficientemente pequenas para que seja válida a teoria linear, podemos estimar a flutuação na densidade a partir da divergência de  $\vec{v}$ . Se a pressão é desprezível ( $k \ll k_J$ ), não há oscilações e podemos usar  $\delta_+(\tau)$ . Assim, a equação de continuidade linearizada (1.22) fica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\dot{\delta} = -aH \left( \frac{d \ln \delta_+}{d \ln a} \right) \delta. \quad (1.47)$$

Para um grande número de modelos cosmológicos,  $d \ln \delta_+ / d \ln a \equiv f(\Omega) \approx \Omega^{0.6}$  depende principalmente do parâmetro de massa e varia pouco com os outros parâmetros cosmológicos [39]. Assim, combinando medidas de  $\vec{v}$  (componentes radiais a partir de medidas dos desvios para o vermelho de galáxias e de suas distâncias) e medidas independentes de  $\delta$  (a partir do campo de densidade das galáxias, e alguma suposição de como a matéria escura é distribuída em relação às galáxias) é possível estimar  $\Omega$  [40].

## Evolução da vorticidade

Vimos que, se a vorticidade é inicialmente nula, ela continua igual a zero ao longo da evolução (desde que o termo baroclínico se anule e que não haja nem choques, nem cruza-

mento de trajetórias). Vamos supor agora que há uma pequena vorticidade primordial. Linearizando a equação (1.44) temos

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{\omega} = 0,$$

de modo que

$$\vec{\omega} \propto a^{-1}. \quad (1.48)$$

Vemos portanto que a vorticidade co-móvel decai com o inverso do fator de escala. Além disso,  $\vec{\omega}$  não aparece nas equações de perturbação (linearizadas) da densidade, não influenciando o seu comportamento. Dessa forma, mesmo que comecemos com  $\vec{\omega} \neq 0$ , a vorticidade não terá nenhuma influência na evolução linear, e decairá à medida que o universo se expande. Entretanto, no regime não-linear, a vorticidade se acopla às outras quantidades. Numa região colapsante seria de se esperar, pela conservação do momento angular, que  $\vec{\omega}$  aumente. Essa possibilidade será discutida brevemente na seção (3.5.2).

A vorticidade co-móvel  $\vec{\omega}$  é dada pelo rotacional da velocidade peculiar em coordenadas co-móveis. Nas coordenadas  $r_i$  teremos (eqs. ?? e 1.16)

$$\vec{\omega}_r := \vec{\nabla}_r \times \vec{v} = \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \times (H\vec{r} + \vec{v}) = \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \times \vec{v} = \frac{1}{a} \vec{\omega}_x.$$

Desse modo, a vorticidade nas coordenadas fixas usuais decai com  $a^{-2}$ . Esse resultado pode ser entendido pela conservação do momento angular. Para uma região circular de raio  $r$  e massa  $m$ ,  $m r^2 \omega_r$  é constante. Para uma flutuação linear que se expande com o universo temos  $r \propto a$ , de modo que  $\omega_r \propto r^{-2} \propto a^{-2}$ .

### Relação entre velocidade e campo gravitacional

No regime linear, há uma relação direta entre a velocidade e o campo gravitacional, como veremos a seguir. Notando que  $\delta = -\vec{\nabla} \cdot \vec{g}/4\pi G a^2 \bar{\rho}$  e substituindo na equação de

As soluções dessa equação são

$$\delta_+ \propto \tau^2 \propto a \quad \text{e} \quad \delta_- \propto \tau^{-3}, \quad (1.30)$$

que são chamados de modos crescente e decrescente, respectivamente

Para  $\Omega \neq 1$ , a equação (1.29) também possui modos crescentes e decrescentes, que podem ser calculados a partir do fator de escala  $a(\tau)$ .

Vamos ver agora o papel da pressão na evolução das estruturas. Estudaremos um caso particular que permite obter uma solução analítica simples e que ilustra o comportamento geral para  $c_s^2 \neq 0$ .

Suporemos que, depois de recombinação, a temperatura dos bárions é da ordem da temperatura dos fótons ( $T_\gamma \approx T_{\text{gas}}$ ). Esta é uma aproximação razoável, já que a ionização residual acopla termicamente os dois fluidos por um longo período, mesmo havendo uma transferência de momentum desprezível. Num gás de fótons  $\rho_\gamma \propto T_\gamma^4$  além disso temos que  $\rho_\gamma \propto a^{-4}$  (veja a seção 1.1.3) logo  $T_\gamma \propto a^{-1}$ . Para um gás ideal  $p/\rho \propto T_{\text{gas}}$ . Assim  $c_s^2 = c_{0s}^2 a^{-1}$  onde  $c_{0s}$  é constante. Num universo de Einstein-de Sitter a eq. (1.26) fica:

$$\ddot{\delta} + \frac{2}{\tau} \dot{\delta} = (6 - k^2 c_{0s}^2 \tau_0^2) \frac{\delta}{\tau^2}.$$

As soluções dessa equação são potências de  $\tau$ :

$$\delta_\pm(k, \tau) \propto \tau^n, \quad n = \frac{-1 \pm \sqrt{25 - 4(kc_{0s}\tau_0)^2}}{2}. \quad (1.31)$$

Note que, neste caso,  $c_{0s}\tau_0 = c_s\tau$ . Em situações mais genéricas, as soluções dependem de  $\tau$  e  $c_s\tau$  mesmo que este último não seja constante<sup>16</sup>. Para  $kc_{s0}\tau_0 < \sqrt{6} \simeq 2.45$ , há soluções crescentes e decrescentes. Para  $kc_{s0}\tau_0 > 5/2$  temos oscilações amortecidas (pois  $n^2 < 0$  e  $\text{Re}(n) < 0$ ). Note que o número de onda crítico  $k_{\text{cr}} = (5/2)(1/c_{s0}\tau_0)$  é muito

<sup>16</sup>Por exemplo, quando a velocidade do som é constante, num universo de Einstein-de Sitter, a solução da (1.26) é  $[\delta]: \delta_+(k, \tau) \propto j_2(kc_s\tau)$ ,  $\delta_-(k, \tau) \propto y_2(kc_s\tau)$ , onde  $j_2$  e  $y_2$  são as funções esféricas de Bessel (no entanto essa solução não é realista).



próximo do número de onda de Jeans  $k_J$  (1.27):

$$k_J = \sqrt{6} \frac{1}{c_{s0} \tau_0} \cong 0.98 k_{cr}.$$

No limite  $k \ll k_J$  a solução (1.31) fica igual ao resultado (1.30). As soluções oscilatórias para  $k \gg k_J$  são ondas sonoras. Nesse limite, a (1.31) fica  $\delta_{\pm} \propto \tau^{-1/2} \exp(\pm i k c_{s0} \tau_0 \ln(\tau))$ , o que leva, para uma onda plana, a  $\delta_{\pm}(x, \tau) \propto \tau^{-1/2} \exp(i k x \pm i k c_{s0} \tau_0 \ln(\tau))$ . Para determinar a velocidade da onda, devemos calcular  $dx/d\tau$  tal que a fase seja constante. Assim a velocidade instantânea da onda é dada por  $d/d\tau(k c_{s0} \tau_0 \ln(\tau)/k) = c_s$ , que coincide com a velocidade do som no meio.

Esse comportamento se repete em situações mais genéricas, obtendo-se *oscilações acústicas* para  $k \gg k_J$ . Essas oscilações suprimem o crescimento para pequenos comprimentos de onda. No limite  $k \ll k_J$  (grandes comprimentos de onda) o comportamento fica igual ao da poeira, e  $\delta_{\pm}$  não depende de  $k$  (como podemos ver a partir das eqs. 1.26 e 1.27).

Num universo estático a amplitude acústica para uma onda plana adiabática fica constante. Já num universo em expansão, ela é geralmente amortecida (como no exemplo acima). Uma exceção importante consiste nas oscilações no fluido de bárions e fótons na era dominada pela radiação, na qual a amplitude dessas oscilações permanece constante. Para mostrar isso é preciso generalizar as equações de fluido para um gás relativístico, o que pode ser feito utilizando os resultados da seção A.3.

Como a (1.26) é uma equação diferencial linear, as duas soluções  $\delta_+(k, \tau)$  e  $\delta_-(k, \tau)$  são obtidas a menos de constantes multiplicativas  $A_{\pm}(\vec{k})$ . Essas constantes são determinadas pelas condições iniciais para cada  $k$ . A determinação de  $\delta(k, \tau_i)$  em um dado tempo inicial  $\tau_i$  é um problema fundamental em cosmologia. Uma teoria completa da formação de estruturas deve especificar essa função a partir de considerações físicas. No apêndice B apresentamos uma discussão sobre a distribuição estatística de  $\delta(k)$ .

continuidade linearizada (1.22), teremos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\dot{\delta} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{g}}{4\pi G a^2 \bar{\rho}} \right).$$

Dessa forma, podemos obter a componente longitudinal  $\vec{v}_{\parallel}$  da velocidade (a componente transversal  $\vec{v}_{\perp}$  tem divergência nula):

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\vec{g}}{4\pi G a^2 \bar{\rho}} \right). \quad (1.49)$$

Notando que  $\vec{g}_k \propto a^2 \bar{\rho} \delta_k$  (eq. 1.33), essa equação fica

$$\vec{v}_{\parallel k} = \frac{\vec{g}_k}{4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta_k} \frac{\partial \delta_k}{\partial \tau}.$$

Dessa forma, vemos que a velocidade peculiar é proporcional à aceleração peculiar, modo a modo, com uma constante de proporcionalidade dependente do tempo. Desprezando os efeitos da pressão, a constante de proporcionalidade não depende de  $k$  e podemos voltar ao espaço dos  $x$ . Assim, teremos

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{g}}{4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} = \frac{\vec{g}}{4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta} \frac{a}{\delta} \frac{d\delta}{da} = -\frac{2f}{3H\Omega a} \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \phi, \quad (1.50)$$

onde, como antes  $f = (a/\delta)(d\delta/da)$ . Se o escoamento é irrotacional, teremos  $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel}$ . Tomando a divergência dessa expressão, obtemos a equação (1.47). Extrapolando a equação (1.50) no regime não-linear, obtemos a aproximação de Zel'dovich (veja a seção 2.3.4). A relação (1.50) também dá origem a outra aproximação não-linear. Como  $\phi = \phi_0$  para pequenas flutuações num universo de EdS, temos que  $\vec{v} \propto \vec{\nabla} \phi_0$ . A aproximação do fluxo congelado [41] extrapola essa relação para o regime não-linear.

Se a velocidade tem uma componente transversal  $\vec{v}_{\perp}$  temos pelas (1.48) e (??) que  $\vec{v}_{\perp} \propto a^{-1}$ . A componente longitudinal é dada pela (1.50), assim a velocidade será dada

por (eq. 1.43)

$$\vec{v} = -\frac{2f}{3H\Omega} \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \phi + \frac{\vec{f}(\vec{x})}{a}, \quad (1.51)$$

com  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$ .

### 1.3.5 Flutuações na Radiação Cósmica de Fundo

Nas seções precedentes, estudamos o comportamento de pequenas perturbações de um universo homogêneo. Há duas formas de observar essas flutuações: nas estruturas em grandes escalas, onde as concentrações de matéria ainda são lineares e na radiação cósmica de fundo. Nesse último caso, é preciso transformar as flutuações na densidade nas variações de temperatura que são observadas.

A distribuição dos fótons da radiação cósmica de fundo (RCF) é dada por uma distribuição de corpo negro com altíssimo grau de precisão<sup>20</sup>

$$f(\vec{x}, \vec{p}, \tau) = f_{\text{Planck}}\left(\frac{E}{kT}\right) = f_{\text{Planck}}\left[\frac{p}{kT_0(1+\Delta)}\right],$$

onde  $T_0 = 2.728K$  é a temperatura média da RCF e  $\Delta(\vec{n}, \tau) = \delta T/T_0$  é a flutuação de temperatura para fótons vindos da direção  $\vec{n}$ . A densidade no espaço de fase é dada por um corpo negro, mas a temperatura depende da direção do fóton, como resultado das variações intrínsecas da temperatura de emissão e de processos gravitacionais e de espalhamento sofridos no caminho até o detector.

O campo  $\Delta$  é definido em todos os pontos  $\vec{x}$ , mas só podemos observá-lo aqui ( $\vec{x}_0$ ) e agora ( $\tau_0$ ). A única coisa com que podemos trabalhar é a variação da temperatura em função da direção  $\vec{n}$ . Desse modo, toda a riqueza que observamos vem das mudanças de temperatura em função de  $\vec{n}$ .

A densidade no espaço de fase pode ser calculada a partir das condições iniciais através

---

<sup>20</sup>De fato, a radiação cósmica de fundo oferece o melhor espectro de corpo negro já observado.

da equação de Boltzmann

$$\frac{Df}{D\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \tau} = \left( \frac{df}{d\tau} \right)_c,$$

onde o lado direito é uma integral de colisão, que vem do espalhamento Compton.

O procedimento para calcular a anisotropia da RCF é linearizar a equação de Boltzmann supondo  $\Delta^2 \ll 1$ . Integrando ao longo da linha de visão do observador otêm-se [42]

$$\Delta(\vec{n}, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} d\chi e^{-\tau_C(\chi)} \left[ -\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + an_e \sigma_C \left( \frac{1}{4} \delta_\gamma + \vec{v}_e \cdot \vec{n} \right) \right], \quad (1.52)$$

onde  $\tau_0$  é o tempo conforme hoje,  $\chi$  é a coordenada radial co-móvel e a integral é calculada no tempo retardado  $\tau = \tau_0 - \chi$ . A flutuação na densidade dos fótons é dada por  $\delta_\gamma$ ,  $\vec{v}_e$  é a velocidade média dos elétrons,  $\sigma_C$  é a seção de choque do espalhamento Compton e  $\tau_C$  é a espessura ótica de Compton:

$$\tau_C(\chi) := \int_0^\chi d\chi (an_e \sigma_C).$$

Os termos devidos à polarização e à anisotropia do espalhamento Compton foram desprezados na expressão para  $\Delta(\vec{n}, \tau_0)$ .

Vamos discutir agora a origem de cada termo na expressão (1.52). O fator  $\exp(-\tau_C)$  leva em conta a opacidade causada pelo espalhamento o que nos impede de ver além de um desvio para o vermelho  $z = 1100$ , para o qual  $\tau_C \approx 1$ . A radiação cósmica de fundo parece vir de uma fina camada chamada fotosfera, como ocorre com a radiação vinda da superfície do Sol. Os dois termos envolvendo  $\phi$  estão relacionados à variação de frequência causada pelo campo gravitacional. Os termos proporcionais à opacidade  $an_e \sigma_C$  são a emissividade efetiva devida ao espalhamento Compton. Levando em consideração que o plasma de fótons e bárions está em equilíbrio térmico quase perfeito, os fótons que vem de um dado elemento de volume possuem a temperatura de corpo negro correspondendo a esse elemento. Como a energia de corpo negro é dada por  $\rho_\gamma \propto T^4$ , vemos que o termo

$\delta_\gamma/4$  é simplesmente a variação intrínseca de temperatura desse elemento de volume ( $\delta_\gamma = \delta\rho_\gamma/\rho_\gamma = 4\delta T$ ). A densidade de energia é definida no referencial de repouso do fluido, mas como ele se move com velocidade  $\vec{v}_e$ , a temperatura medida por um termômetro com coordenadas  $\vec{x}$  fixas é alterada pelo efeito Doppler. A variação de frequência e conseqüente variação na temperatura aparente, causada pelo efeito Doppler na direção  $\vec{n}$  é dada por  $\vec{v}_e \cdot \vec{n}$ .

Quando olhamos para a superfície de uma estrela, vemos a temperatura do gás, que corresponde ao termo  $\delta_\gamma/4$ . Para estrelas normais, o efeito Doppler e o desvio para o vermelho gravitacional são desprezíveis (esses termos são importantes para supernovas e anãs brancas, respectivamente). Por outro lado, para a RCF todos quatro termos de emissão da equação (1.52) são comparáveis.

A fotosfera pode ser aproximada por uma camada infinitamente fina, supondo que a recombinação é instantânea. Nessa aproximação a fração de elétrons livres, e portanto a opacidade, caem abruptamente em  $\tau_{\text{rec}}$ , o tempo conforme na época da recombinação ( $z \approx 1100$ ):

$$\tau_C = \begin{cases} \infty, & \chi > \chi_{\text{rec}} = \tau_0 - \tau_{\text{rec}}, \\ 0, & \chi < \chi_{\text{rec}}. \end{cases}$$

Substituindo essa expressão na equação (1.52) e integrando por partes o termo do desvio para o vermelho gravitacional obtém-se

$$\Delta(\vec{n}, \tau_0) = \left( \frac{1}{4}\delta_\gamma + \phi + v_r \right)_{\text{rec}} + 2 \int_0^{\chi_{\text{rec}}} d\chi \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad (1.53)$$

onde  $v_r := \vec{v}_e \cdot \vec{n}$  é a componente radial da velocidade. Esse resultado foi obtido primeiramente por Sachs e Wolfe [43].

A radiação cósmica de fundo é causada pelos desvios em relação ao equilíbrio hidrostático. Pode-se mostrar que, se o gás de fótons estivesse em equilíbrio hidrostático, teríamos  $\delta_\gamma/4 + \phi$  (e obviamente  $v_e = 0$ ) de modo que não haveria anisotropias primárias na RCF. As flutuações seriam dadas apenas pela variação ocorrida na trajetória da luz, que é o chamado efeito Sachs-Wolfe integrado e é dado pelo último termo na expressão (1.53).

Sachs e Wolfe [43] mostraram que, para perturbações adiabáticas na era dominada pela matéria, em escalas maiores que o horizonte acústico, as contribuições intrínseca e gravitacional dominam. A soma desses fatores (os dois primeiros termos da expressão 1.53) é  $\phi/3$ . Dessa forma, em escalas maiores do que  $1^\circ$  (que equivale aproximadamente o tamanho do horizonte acústico) as anisotropias na radiação cósmica de fundo são uma medida direta do potencial gravitacional na fotosfera, na recombinação.

O fator  $\phi/3$  pode ser compreendido com a combinação do desvio para o vermelho causado pelo campo gravitacional e uma dilatação temporal. Para sair do poço de potencial o fóton perde energia, de modo que

$$\Delta_1 = \phi.$$

Além disso, como o potencial produz uma dilatação temporal, quando vemos o fóton ele viajou um caminho maior e veio portanto de uma época mais quente. A variação temporal é dada por  $\delta t/t = \phi$ . Utilizando que  $a \propto t^{2/3}$  e que  $T \propto a^{-1}$  obtemos

$$\Delta_2 = -\frac{2}{3}\phi.$$

A combinação desses dois efeitos dá

$$\Delta_{SW} = \frac{\phi}{3} \propto \frac{\delta_k}{k^2},$$

que é o chamado efeito Sachs-Wolfe. Na última relação, utilizamos a equação (1.33). Desse modo, as flutuações na temperatura se relacionam diretamente com as perturbações na densidade.

Em escalas angulares menores que  $1^\circ$  predomina o efeito Doppler. Nessas regiões menores do que o horizonte acústico, ocorrem as oscilações acústicas discutidas na seção 1.3.2. Essas oscilações dão origem aos picos no espectro da radiação cósmica de fundo que foram detectados recentemente [20, 21].

## O espectro da radiação cósmica de fundo

O espectro de potência angular fornece a amplitude quadrática média da radiação cósmica de fundo por componente de esférico harmônico. Expande-se a anisotropia da temperatura em esféricos harmônicos

$$\Delta(\vec{n}) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\vec{n}).$$

Os dados observacionais proporcionam valores bem definidos de  $a_{lm}$ . No entanto, teoricamente só é possível prever a distribuição de probabilidade de  $a_{lm}$ . Para flutuações estatisticamente isotrópicas (que não possuem nenhuma direção privilegiada *a priori*), os  $a_{lm}$  são variáveis estocásticas com covariância

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (1.54)$$

de modo que eles não são correlacionados. A variância de cada harmônico é dada pelo *espectro de potência* angular  $C_l$ . A simetria rotacional faz com que ele seja independente de  $m$ .

O espectro de potência da RCF pode ser calculado a partir da estatística das flutuações primordiais e da evolução temporal dessas flutuações. Pode-se mostrar que [42]:

$$C_l = 4\pi \int d^3k P_\phi(k) D_l^2(k), \quad (1.55)$$

onde  $P_\phi(k)$  é o espectro das flutuações primordiais no potencial gravitacional<sup>21</sup>. A *função de transferência*  $D_l$  está relacionada à evolução das perturbações até o desacoplamento.

No limite de grandes escalas angulares a função de transferência é dada por  $D_l = j_l[k(\tau_0 - \tau_{\text{rec}})]/3$  [42]. Nesse caso a (1.55) pode ser calculada analiticamente para  $P_\phi \propto$

<sup>21</sup>O espectro  $P_\phi(k)$  está associado ao espectro das flutuações primordiais na densidade  $P(k) = \sigma_k^2$ , pela relação  $P_\phi(k) \propto P(k)/k^2$  (eq. 1.33).

Veja o apêndice 1 para a definição de  $\sigma_k$  a partir do funcional de probabilidade das condições iniciais. Aqui supõe-se que as flutuações em diferentes  $\vec{k}$  não estão correlacionadas.

$k^{n-4}$ . Quando  $n = 1$  o resultado é  $l(l+1)C_l = \text{const.}$  O satélite COBE varreu escalas angulares equivalentes a  $2 \leq l \leq 34$  e os resultados obtidos são consistentes com  $n = 1$ , o que é predito pelo modelo inflacionário para flutuações quânticas primordiais. Vemos que as variações na temperatura da radiação cósmica de fundo permitem sondar o espectro primordial das flutuações.

Para pequenas escalas angulares, o espectro  $l(l+1)C_l$ , apresenta uma série de picos. Esses picos são devidos às oscilações acústicas, que modificam o potencial  $\phi$  e a velocidade  $v_r$  na recombinação.

O primeiro pico no espectro da RCF está associado ao comprimento de Jeans. A posição angular desse primeiro pico depende do tamanho aparente de  $\lambda_J$ . A curvatura do universo afeta diretamente os tamanhos angulares, de modo que a determinação de sua posição coloca limites muito fortes sobre  $K$  e portanto sobre  $\Omega_{\text{tot}}$ . Segundo o modelo inflacionário, que prevê curvatura nula, esse pico estaria em  $l \approx 200$ . O experimento de Balão MAXIMA [19], explorou escalas angulares equivalentes a  $36 \leq l \leq 785$  e, juntamente com o BOOMERANG [18], detectou o primeiro pico na posição esperada para um universo chato. Como a instabilidade de Jeans só ocorre na matéria bariônica, a determinação dos picos no espectro da RCF também permite calcular a  $\Omega_b$  (na verdade  $\Omega_b H_0^2$ ). Esse parâmetro está associado à diferença de altura entres os picos pares e ímpares.

As medidas em grandes escalas angulares fornecem informações sobre o espectro das flutuações primordiais na densidade, que incluem tanto a CDM como a matéria bariônica. Já em pequenas escalas angulares, podemos ter informação sobre  $\Omega_b$  e  $\Omega_{\text{Tot}}$ . O espectro da radiação cósmica de fundo permite estabelecer limites sobre todos os parâmetros cosmológicos. Espera-se que os novos experimentos possam ajudar a determinar esses parâmetros com grande precisão.

Para calcular a função de transferência, é preciso evoluir as flutuações primordiais até o desacoplamento matéria-radiação. Para isso é preciso utilizar a teoria de perturbação relativística (sec. A.5). No entanto, a discussão das seções precedentes fornece a imagem correta dos processos que ocorrem na época dominada pela matéria. Além disso, é



possível fazer um tratamento newtoniano das perturbações na componente relativística, desde que se incluam alguns efeitos relativísticos da pressão (veja a seção A.3).

## 1.4 Simulações Computacionais

A análise linear das perturbações ajuda a compreender as primeiras fases da formação de estruturas e a radiação cósmica de fundo. Nas maiores escalas observáveis, as flutuações na densidade são pequenas e a teoria linear ainda pode ser aplicada. No entanto, em escalas menores - talvez já nos *voids* e certamente nos super-aglomerados de galáxias - a aglomeração de matéria não é linear ( $\delta\rho/\rho > 1$ ). Portanto, para compreender a estrutura em grande escala, é preciso fazer simulações computacionais, ou recorrer a aproximações para a evolução não-linear.

Nas simulações numéricas utilizam-se condições de contorno periódicas para representar um universo infinito. Como o volume simulado é fixo nas coordenadas  $\vec{x}$ , na verdade temos uma fronteira que evolui acompanhando a expansão média. A equação de Poisson (1.13) é resolvida numericamente, utilizando a transformada de Fourier, ou algum método hierárquico<sup>22</sup>. Em geral, para simular a matéria escura utilizam-se algoritmos de *N*-corpos. Cada partícula segue uma trajetória dada pela equação (1.13). A matéria bariônica (gás) é simulada utilizando algoritmos de fluidos para resolver as eqs. (1.17) e (1.20), como por exemplo SPH (*Smooth Particle Hydrodynamics*<sup>23</sup> [44]). A referência [45] é excelente artigo de revisão sobre simulações numéricas em cosmologia.

Para se ter uma idéia, num cálculo de grande porte [46] é simulado um cubo de 500 milhões de anos luz ( $\sim 150Mpc$ ), dividido em 134 milhões de elementos de volume, com 1 milhão de anos luz ( $\sim 300Kpc$ ) e um total de 50 milhões de partículas de matéria escura (1/3 de não relativísticas e 2/3 de neutrinos). Existem várias colaborações visando a realização de simulações de grande porte [46, 47, 48].

As simulações com matéria escura e gás são feitas para determinar a temperatura final

---

<sup>22</sup>Para uma breve discussão sobre o cálculo da força gravitacional, veja seção 3.5.1.

<sup>23</sup>Para uma discussão do método SPH, veja a seção 4.6.1.

do gás (e comparar com os resultados das observações de raios-X), ou para acompanhar a formação de galáxias. Nas escalas maiores a dinâmica é dominada pela matéria escura, e portanto o gás não teria muita influência. Por isso muitas simulações da formação de estruturas utilizam apenas matéria com  $p = 0$  ( $N$ -corpos).

As simulações computacionais são fundamentais para o estudo da evolução de estruturas, mas também têm suas desvantagens: ocupam muito tempo de cálculo, o que limita a varredura de condições iniciais e a resolução espacial. Além disso, elas não fornecem uma compreensão física transparente do problema. É portanto fundamental o desenvolvimento e estudo de aproximações para a aglomeração não-linear da matéria.



# Capítulo 2

## Aproximações para a Evolução Não-Linear das Estruturas

Neste capítulo, introduziremos alguns métodos utilizados para investigar a evolução não-linear das estruturas. Na seção 2.1, apresentaremos algumas motivações para o estudo de aproximações para a evolução não-linear. Também recapitularemos as equações básicas da cosmologia newtoniana para um fluido com pressão nula, apresentaremos algumas relações úteis num universo de Einstein-de Sitter e fixaremos a notação a ser utilizada no resto deste capítulo e no próximo. Na seção 2.2, faremos uma revisão da dinâmica lagrangiana de fluidos que fundamenta a maioria das aproximações não-lineares. Em particular ela é a base das aproximações locais, que serão nosso principal objeto de estudo. Na seção 2.3 introduziremos essas aproximações e discutiremos alguns de seus aspectos. Uma análise completa das aproximações locais é desenvolvida no capítulo 3.

### 2.1 Introdução

Acredita-se que as estruturas em grande escala se formaram pela amplificação gravitacional de pequenas flutuações primordiais. Num primeiro estágio, o processo de aglomeração gravitacional pode ser investigado utilizando a teoria de perturbação linear, como vimos na seção 1.3. Entretanto, à medida que as estruturas evoluem, con-

centrações não-lineares de matéria, com  $\delta\rho/\rho \gtrsim 1$ , começam a surgir. A aglomeração atual de matéria está longe de ser uma pequena perturbação de um universo homogêneo e isotrópico. Muitas estruturas observadas correspondem a flutuações várias ordens de magnitude superiores à média. Por exemplo, os aglomerados de galáxias têm tipicamente  $\rho_{\text{aglomerado}}/\rho_{\text{universo}} \sim 10^2 - 10^3$ . Para estruturas maiores essa razão diminui, esperando-se que se aproxime de um à medida que a escala aumenta. Os detalhes da fase não-linear da formação de estruturas são extremamente importantes já que é aí onde está a ligação entre as condições iniciais e o universo que observamos em escalas intermediárias.

Como é impossível obter um tratamento analítico exato para o regime não-linear, em geral recorre-se a simulações de  $N$ -corpos. As simulações numéricas tiveram um grande desenvolvimento nesta última década, sendo capazes de reproduzir vários aspectos da estrutura em grande escala (veja por exemplo a referência [45]). No entanto, elas não fornecem uma interpretação física clara do processo de aglomeração não-linear. Além disso, elas ocupam muito tempo de cálculo, tornando difícil varrer um grande intervalo no espaço de parâmetros dos modelos cosmológicos.

Por isso, métodos semi-analíticos têm sido projetados para lidar com esse difícil problema. A primeira aproximação desenvolvida para estudar o regime não-linear foi introduzida por Zel'dovich em 1970 [51]. Hoje temos vários esquemas de aproximação para analisar diferentes aspectos da aglomeração não-linear, incluindo extensões da aproximação de Zel'dovich (para um retrospecto, veja a referência [4]). Entre elas estão as aproximações locais, que foram introduzidas recentemente e que serão discutidas em detalhe a partir da seção 2.3.

De agora em diante, consideraremos apenas a evolução da matéria escura fria (CDM). Como vimos na seção 1.1, 80 a 90% da matéria que se aglomera é formada por CDM. Enquanto as trajetórias não se cruzarem, a matéria escura pode ser tratada como um fluido sem colisões<sup>1</sup> ( $p = 0$ ). Além disso, consideraremos apenas o caso de um universo plano e dominado pela matéria (também conhecido como universo de Einstein-de Sitter,

---

<sup>1</sup>Como estamos tratando as partículas que compõem a CDM como um contínuo, neste e no próximo capítulo nos referiremos indistintamente a “partículas” ou “elementos de volume”.

ou EdS). Na seção 1.1.2 mostramos que as evidências observacionais são consistentes com um universo de curvatura nula. Mesmo se vivêssemos num universo que não fosse chato, para utilizar o tratamento a seguir só precisaríamos que a curvatura fosse desprezível na escala de interesse.

Poderia parecer pouco realista trabalhar num universo dominado pela matéria, já que as observações indicam que o universo é atualmente dominado por um termo cosmológico repulsivo. Essa componente seria responsável por uns dois terços do conteúdo energético do universo. No entanto, como vimos na seção 1.1.3, a densidade de energia desse termo decai mais lentamente que a densidade da matéria. No caso de uma constante cosmológica, teríamos  $\rho_\Lambda = \text{const.}$  enquanto para a matéria temos  $\rho_M \propto a^{-3}$ , onde  $a$  é o fator de escala do universo. Como essas duas densidades são comparáveis agora, isso significa que no passado a densidade de matéria dominou. Na época da formação das estruturas em grande escala o termo cosmológico teria sido desprezível. Por exemplo, há evidências observacionais de que a maioria das galáxias teria se formado até  $z \approx 3$  [49]. Nessa época a razão  $\Omega_\Lambda/\Omega_M$  seria da ordem de  $10^{-2}$ .

As velocidades peculiares no universo são muito menores que a velocidade da luz. Além disso, os campos gravitacionais dos objetos que têm interesse cosmológico são fracos ( $R \gg MG/c^2$ , onde  $R$  é uma dimensão típica do objeto e  $M$  a sua massa). Por isso, para perturbações menores que o raio de Hubble, podemos utilizar a cosmologia newtoniana para descrever a aglomeração gravitacional (veja as seções 1.2 e 1.3, ou a seção A.5). As equações básicas da cosmologia newtoniana para um fluido não relativístico sem pressão (poeira) são a equação de continuidade (1.17), a equação de Euler (1.20) e a equação de Poisson (1.13):

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(1 + \delta)v_i] = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{dv_i}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a}v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x_i} = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta, \quad (2.3)$$

onde  $\delta$  é o contraste de densidade  $\delta = (\rho - \bar{\rho}) / \bar{\rho}$  ( $\bar{\rho}$  é a densidade média do universo);  $\vec{v} = d\vec{x}/d\tau$  é a velocidade peculiar,  $\tau$  é o tempo conforme<sup>2</sup>, e  $\phi$  é o potencial gravitacional peculiar. Note que, como a curvatura é desprezível, usamos coordenadas cartesianas, de modo que  $x_i = x^i$ , e  $i = 1, 2, 3$ . Em geral, escreveremos os índices em cima e em baixo na convenção de soma, seguindo o costume da relatividade.

Nas próximas seções, vamos utilizar, além do tempo conforme  $\tau$ , uma nova variável temporal  $t$ , definida por

$$dt := \frac{d\tau}{a} = \frac{d\tau}{a}. \quad (2.4)$$

A escolha dessa nova variável simplifica algumas relações. Ela será útil para definirmos algumas aproximações locais (seções 2.3.1 e 2.3.2) e no estudo da solução do elipsóide (3.3.1). Com a nova coordenada temporal, a velocidade peculiar fica

$$v^i := \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{a} \frac{dx^i}{dt} \quad (2.5)$$

de modo que

$$\frac{dv_i}{d\tau} + \dot{a} v_i = \frac{1}{a} \frac{d(av_i)}{d\tau} = \frac{d^2 x_i}{dt^2}.$$

Assim, a equação de Euler (2.2), na coordenada  $t$  fica

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -a^2 \frac{\partial \phi}{\partial x^i}. \quad (2.6)$$

Note que, se definimos um novo potencial  $\Phi := a^2 \phi$ , essa equação é formalmente idêntica à equação de Euler em coordenadas fixas, em particular o termo com o amortecimento de Hubble não aparece explicitamente. Devido à simplicidade da equação de Euler nessas coordenadas, a variável  $t$  é a mais utilizada nas simulações numéricas [45]. Ela foi introduzida por Drury e Stewart [50] no estudo da turbulência cósmica.

---

<sup>2</sup>O tempo conforme é dado por  $d\tau = dt/a$ , onde  $t$  é o tempo cosmológico.

Num universo de Einstein-de Sitter (EdS)  $a \propto \tau^2 \propto t^{2/3}$  (eq. 1.9) de forma que, pela (2.4),  $t \propto \tau^{-1}$ . Assim, teremos  $a \propto t^{-2}$ , de modo que o domínio de variação da nova variável temporal vai de  $-\infty$  até zero.

O importante é ver como as quantidade variam com o fator de escala  $a$ , que é independente da escolha da variável temporal. Além disso  $a$  está relacionado com uma quantidade observável que é o desvio para o vermelho  $z$ . Este é dado por  $z = a_0/a - 1$  e, como escolhemos  $a_0 = 1$  hoje, então

$$z = a^{-1} - 1.$$

As variáveis  $\tau$  e  $t$  serão consideradas variáveis auxiliares para resolver as equações de movimento. Nos resultados finais, estaremos interessados nas quantidades em função de  $a$ . Tanto  $a$  como  $z$  são medidas da época em que um determinado evento ocorre, por isso, às vezes nos referiremos a eles como “tempo”.

A equação de Friedmann (1.5), num fundo de EdS é  $4\pi G\bar{\rho}a^2 = (3/2)(da/d\tau)^2/a^2$ , cuja solução é dada por  $a(\tau) = (\tau/\tau_0)^2$ . Dessa forma, temos

$$4\pi G\bar{\rho}a^2 = 6/\tau^2. \quad (2.7)$$

Essa relação simplifica muito as equações. Na variável  $t$ ,  $a(t) = (t_0/t)^2$ , de modo que  $4\pi G\bar{\rho}a^2 = 6t^2/t_0^4$ . Como sempre podemos redefinir  $a$  multiplicando-o por uma constante, escolheremos  $\tau_0 = 1$  e  $t_0 = 1$ , de modo que

$$4\pi G\bar{\rho}a^2 = \frac{6}{a}, \quad (2.8)$$

nessas duas variáveis temporais.

No restante deste capítulo utilizaremos um ponto para denotar a derivada em relação ao tempo conforme  $\tau$  e uma linha para denotar a derivada com relação à coordenada



temporal  $t$ :

$$\dot{h} := \frac{\partial h}{\partial \tau}, \quad h' := \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Ao estudar pequenas perturbações de um universo homogêneo, na seção 1.3, utilizamos uma abordagem euleriana para a dinâmica de fluidos. No entanto, a forma mais apropriada para obter aproximações para a evolução não-linear é através da hidrodinâmica lagrangiana, como veremos na próxima seção.

## 2.2 Dinâmica Lagrangiana de Fluidos

A trajetória de um elemento de fluido é dada por  $\vec{x}(\vec{q}, \tau)$  onde  $\vec{q}$  é coordenada lagrangiana que rotula esse elemento. Podemos escolher  $\vec{q}$  como sendo a posição inicial de cada partícula. Por exemplo, se a expansão do universo é homogênea, teremos  $\vec{r} = a(\tau)\vec{q}$  e, pela definição da coordenada co-móvel  $\vec{x}$ , obtemos  $\vec{x}(\vec{q}, \tau) = \vec{q}$ .

Aplicando o comutador  $[d/d\tau, \partial/\partial q^i]$  a uma função qualquer  $F = F(\vec{x}, \tau)$ , vemos que a derivada convectiva  $d/d\tau \equiv \partial/\partial\tau + v^j\partial_j$  comuta com  $\partial/\partial q^i$ , se definimos a velocidade por  $v_i = \partial x_i / \partial \tau|_{q_i = \text{const}}$ . Dessa forma, a derivada total em relação ao tempo é dada pela derivada parcial com  $\vec{q}$  fixo:

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} \Big|_{q=\text{const}}. \quad (2.9)$$

Por isso, a derivada natural no formalismo lagrangiano é a derivada convectiva. Nas seções anteriores a derivada parcial em relação a  $\tau$  era calculada com  $\vec{x}$  fixo:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} \Big|_{x=\text{const}}.$$

Nas próximas seções, utilizaremos a vírgula para denotar a derivada em relação à coordenada  $x^i$  e a barra para denotar a derivada em relação à coordenada lagrangiana

$q^i$ :

$$f_{,i} := \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad f_{|i} := \frac{\partial f}{\partial q^i}.$$

### Parâmetros cinemáticos e equação de continuidade

O gradiente da velocidade pode ser decomposto em seu traço, parte simétrica sem traço e parte anti-simétrica. Estas partes formam os parâmetros cinemáticos<sup>3</sup> e são respectivamente: o escalar de expansão  $\theta$ , o cisalhamento  $\sigma_{ij}$  e a vorticidade  $\omega_i$ :

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = v_{j,i} = \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} + \sigma_{ij} + \omega_{ij} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \omega_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega^k = -\omega_{ji}. \quad (2.10)$$

Na seção (2.3.4) deduziremos equações de evolução para essas quantidades<sup>4</sup>. Os parâmetros cinemáticos são a base da decomposição irreduzível, a partir da qual discutiremos algumas aproximações locais (veja a seção 2.3.4).

Podemos utilizar a definição de  $\theta$  para reescrever a equação de continuidade (1.17). Convertendo as derivadas temporais eulerianas em lagrangianas (eq. ??) essa equação fica

$$\frac{d\delta}{d\tau} + (1 + \delta)\theta = 0. \quad (2.11)$$

Podemos escrever os parâmetros cinemáticos em termos da transformação de variáveis  $\vec{q} \rightarrow \vec{x}$ . Para isso vamos utilizar o *tensor de deformação*  $J_{ij}$  definido por

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q^j}. \quad (2.12)$$

<sup>3</sup>Num abuso de linguagem, muitas vezes incluiremos o contraste de densidade  $\delta$  e o campo de maré  $E_{ij} := \partial_i \partial_j \phi - (1/3)\delta_{ij} \partial^k \partial_k \phi$  ao nos referirmos aos parâmetros cinemáticos, e não apenas a  $\theta$ ,  $\sigma_{ij}$  e  $\omega^i$ .

<sup>4</sup>Veja também o apêndice 1, seção A.1.

O gradiente da velocidade fica:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial q^k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial q^k} = \frac{\partial q^k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial q^k} \left( \frac{dx_j}{d\tau} \right) = \frac{\partial q^k}{\partial x_i} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial x_j}{\partial q^k} \right) = (J_{ki})^{-1} \frac{dJ_j^k}{d\tau}, \quad (2.13)$$

onde usamos a comutação entre  $d/d\tau$  e  $\partial/\partial q$ .

Vamos mostrar agora que, através do tensor de deformação (2.12), é possível obter a *solução exata* para equação de continuidade (2.11). A massa de um elemento de volume é dada por  $dM = \rho(\vec{x}, \tau) a^3 d^3x$ . Como a massa é conservada e as posições iniciais são dadas pelas coordenadas lagrangianas, teremos  $dM = \rho(\vec{q}, \tau_i) a_i^3 d^3q$  (onde  $\tau_i$  é o tempo inicial). Escolhemos como condição inicial um universo homogêneo de modo que  $\rho(\vec{q}, \tau_i) = \bar{\rho}(\tau_i)$ . Assim a densidade será dada por

$$\rho(\vec{x}, \tau) = \frac{\bar{\rho}(\tau_i) a^3(\tau_i) d^3q}{a^3(\tau) d^3x}.$$

Como  $\bar{\rho} \propto a^{-3}$ ,  $\bar{\rho}(\tau_i) a^3(\tau_i) / a^3(\tau) = \bar{\rho}(\tau)$ . A relação entre os elementos de volume nas duas coordenadas é dada pelo jacobiano da transformação  $\vec{q} \rightarrow \vec{x}$ :

$$\frac{d^3q}{d^3x} = \left| \frac{\partial q^i}{\partial x^j} \right| = J^{-1},$$

onde  $J = \det J_{ij}$ . Assim, a densidade no tempo  $\tau$  será dada por  $\rho(\vec{x}, \tau) = \bar{\rho}(\tau) J^{-1}$ , de forma que

$$\delta := \frac{(\rho - \bar{\rho})}{\bar{\rho}} = J^{-1} - 1. \quad (2.14)$$

Podemos verificar que essa expressão para o contraste densidade satisfaz automaticamente a equação de continuidade. Basta substituí-la na equação (2.11):

$$\frac{d\delta}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{J} - 1 \right) = -\frac{1}{J} \frac{d \ln J}{d\tau} = -\frac{1}{J} \text{Tr} \left( J_{ik}^{-1} \frac{dJ_{kj}}{d\tau} \right) = -\frac{1}{J} \theta = -(1 + \delta) \theta,$$

onde usamos que<sup>5</sup>  $\delta \ln \det J_{ij} = \text{Tr} (J_{ik}^{-1} \delta J_{kj})$ . O fato da equação de continuidade ser identicamente satisfeita na abordagem lagrangiana é uma das vantagens desse formalismo, como veremos a seguir.

Note que o formalismo lagrangiano só é válido até o cruzamento de trajetórias (o que só é possível num fluido sem pressão). Depois, a descrição de fluido não pode ser mais utilizada. A transformação de coordenadas  $x^i \rightarrow q^i$  deixa de ser bem definida, pois podemos ter diferentes  $q_i$  na mesma posição  $x_i$ . Quando isso ocorre, o jacobiano  $|\partial q^i / \partial x^j|$  fica singular e a densidade diverge. Portanto, quando  $\delta$  começa a divergir isso é a indicação de que houve o cruzamento das trajetórias e de que não podemos mais utilizar o formalismo lagrangiano. Dizemos que o elemento de volume colapsou, mas na verdade isso significa que as trajetórias das partículas começaram a se cruzar, provavelmente levando à virialização e à formação de um objeto ligado.

## Equações de Euler e de Raychaudhuri

Também podemos resolver formalmente a equação de Euler em termos de  $J_{ij}$ . Utilizando a comutação entre  $d/d\tau$  e  $\partial/\partial q$  e a definição do tensor de deformação temos

$$\frac{d^2 J_{ij}}{d\tau^2} = \frac{\partial}{\partial q^j} \left( \frac{d^2 x_i}{d\tau^2} \right) = \frac{\partial}{\partial q^j} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} - \frac{\dot{a}}{a} v_i \right),$$

onde a última igualdade vem da equação de Euler (2.2), com  $p = 0$ . Transformando de derivadas lagrangianas para eulerianas e utilizando a equação (2.13), teremos

$$\frac{d^2 J_{ij}}{d\tau^2} = -J^k_j \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial x^i} + \frac{\dot{a}}{a} J_{kl}^{-1} \frac{dJ_i^l}{d\tau} \right).$$

---

<sup>5</sup>Essa relação pode ser facilmente deduzida utilizando a expressão da matriz em termos dos seus autovalores. Alternativamente podemos calcular  $\delta \ln \det J_{ij} \equiv \ln \det (J_{ij} + \delta J_{ij}) - \ln \det J_{ij} = \ln \left( \frac{\det(J_{ij} + \delta J_{ij})}{\det J_{ij}} \right) = \ln \det [J_{ij}^{-1} (J_{ij} + \delta J_{ij})] = \ln \det (\delta_{ij} + J_{ij}^{-1} \delta J_{ij})$ . Note que  $\det (\delta_{ij} + J_{ij}^{-1} \delta J_{ij}) = 1 + \text{Tr} (J_{ik}^{-1} \delta J_{kj})$ , pois todos os outros termos são de 2ª ordem. Finalmente, utilizamos a expressão  $\ln(1 + \varepsilon) \simeq \varepsilon$  e chegamos no resultado citado.

Dessa forma obtemos

$$\frac{d^2 J_{ij}}{d\tau^2} + \frac{\dot{a}}{a} \frac{dJ_{ij}}{d\tau} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 J_{ij}}{dt^2} = -J_{kj} F^k{}_i, \quad (2.15)$$

onde  $F_{ij} := \partial^2 \phi / \partial x^k \partial x^i$ . A equação de Poisson em termos do tensor  $F_{ij}$  fica

$$F_i{}^i = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta = 4\pi G a^2 \bar{\rho} (J^{-1} - 1). \quad (2.16)$$

É interessante identificar em que equações os efeitos não-lineares se manifestam primeiro. Isso pode ser feito inserindo a solução linear nos termos não-lineares das equações que governam a instabilidade gravitacional e vendo quando ficam comparáveis aos termos lineares. Não apenas deixa a aproximação de ser válida naquele ponto, mas é provável que em qualquer expansão perturbativa, todos os termos sejam comparáveis nesse ponto. Isso dá uma idéia do raio de convergência da expansão.

Das três equações para a instabilidade gravitacional (eqs. 2.11, 2.2 e 2.3), o termo não-linear da equação de continuidade fica comparável ao linear quando  $\delta \sim 1$  e a equação de Euler chega a esse ponto quando  $v_i \partial v_j / \partial x_i \sim g_j$ . Se o escoamento é irrotacional, o termo com o gradiente da velocidade pode ser escrito como  $\partial(v^2/2) / \partial x_j$ . Espera-se então que a equação de Euler linearizada falhe quando a energia cinética (peculiar) por unidade de massa seja da ordem do potencial gravitacional peculiar. Simulações computacionais de  $N$ -corpos e modelos analíticos simples (como o modelo do colapso esférico) mostram que isso ocorre para  $\delta \sim 4$  [55].

Essa é uma grande vantagem do formalismo lagrangiano: ele resolve exatamente a equação de continuidade, que é a primeira onde a não-linearidade se manifesta. Já a teoria de perturbação Euleriana não pode ir além de  $\delta \sim 1$ . Algumas aproximações lagrangianas como a introduzida por [55] aproximam a equação de Euler e portanto deixam de valer para  $\delta \sim 4$ . Já as aproximações locais e a teoria de perturbação lagrangiana (seção 2.2.2) resolvem exatamente a essa equação, permitindo avançar na evolução não-linear. Por outro lado elas se baseiam numa solução aproximada para o campo gravitacional, tornando difícil estimar o seu raio de convergência. Note que a equação de Poisson é

linear, mas é não local.

Multiplicando a (2.15) pela inversa do tensor de deformação, tomando o traço e usando a (2.16) obtemos a equação de Raychaudhuri:

$$J_{ij}^{-1} \frac{d^2 J_{ji}}{dt^2} = -4\pi G a^4 \bar{\rho} (J^{-1} - 1). \quad (2.17)$$

Note que essa é uma equação local para  $J_{ij}$  já que não parecem derivadas espaciais (no espaço lagrangiano). No entanto ela não permite determinar o tensor de deformação, já que temos apenas uma equação para as nove componentes do tensor de deformação. A equação (2.17) será o ponto de partida para várias aproximações locais e também para a teoria de perturbação lagrangiana. A equação (2.15) e a expressão acima para a equação de Raychaudhuri foram obtidas primeiramente por Lachièze-Ray [56].

### Campo de deslocamento e solução linear

Como, por construção, as posições iniciais são dadas pelas coordenadas lagrangianas, é útil escrever as posições de cada partícula na forma

$$x^i(\vec{q}, \tau) = q^i + \Psi^i(\vec{q}, \tau), \quad (2.18)$$

onde  $\Psi^i \rightarrow 0$  quando  $\tau \rightarrow 0$ . O campo  $\Psi^i(\vec{q}, \tau)$  é conhecido como campo de deslocamento. Além disso, escolheremos como configuração inicial uma distribuição homogênea (como na seção 2.2). Dessa forma, as heterogeneidades serão produzidas apenas pelos deslocamentos. Quando os deslocamentos são pequenos, também teremos pequenas flutuações de um universo homogêneo. Logo o regime linear das flutuações corresponde à solução linear em  $\Psi^i$ .

Note que sempre é possível escrever a expressão (2.18), mesmo que a distribuição inicial não seja homogênea. Ainda assim é possível resolver a equação de continuidade através do jacobiano da transformação  $\vec{q} \rightarrow \vec{x}$ . Mas nesse caso não teremos  $\delta \rightarrow 0$  quando  $a \rightarrow 0$ , que é o que esperaríamos de um universo com pequenas perturbações iniciais.

A densidade perturbada é gerada pelos deslocamentos  $\Psi^i$  produzidos durante a evolução. Por isso, as coordenadas “naturais” em que ela é obtida são as posições  $x^i$ . A função  $\rho(\vec{q}, t)$  não pode ser calculada no espaço lagrangiano, pois como as posições não mudam em coordenadas lagrangianas teríamos sempre  $\rho = \bar{\rho}$ . Na verdade a função  $\rho$  só tem o seu significado no espaço euleriano  $\vec{x}$ . Devemos primeiro calcular  $\rho(\vec{x}, t)$  para depois voltar ao espaço lagrangiano. No entanto é óbvio que podemos obter a evolução temporal da densidade nas coordenadas lagrangianas:  $\rho(\vec{q}, \tau) = \rho(\vec{x}(\vec{q}, \tau), \tau)$ . De fato, nas aproximações locais, obteremos  $\delta(\vec{q}, \tau)$ . Nas simulações de  $N$ -corpos deve-se calcular primeiro  $\delta(\vec{x}, \tau)$  para depois voltar ao espaço lagrangiano (veja seção 3.5.1).

Vamos agora obter a solução linear para o campo  $\Psi^i(\vec{q}, \tau)$ . Em termos do campo de deslocamento, a velocidade é dada por

$$v^i = \frac{d\Psi^i}{d\tau}. \quad (2.19)$$

Utilizando a (2.19), podemos reescrever a equação (2.2) na forma

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Psi_i + \frac{\dot{a}}{a} \frac{d}{d\tau}\Psi_i = -\phi_{,i}. \quad (2.20)$$

Como vimos na seção (1.3.4), no regime linear existe uma relação entre a parte transversal da velocidade e o campo gravitacional (eq. 1.49). Vamos considerar escoamentos irrotacionais, de modo que  $v_{\parallel}^i = v^i$ . Assim, substituindo a (2.19) na (1.49), e notando que em 1ª ordem em  $\Psi^i$   $d\Psi_i/d\tau = \partial\Psi_i/\partial\tau$  obtemos:

$$\frac{\partial\Psi_i}{\partial\tau} = -\frac{\partial}{\partial\tau} \left( \frac{\phi_{,i}}{4\pi G a^2 \bar{\rho}} \right).$$

Temos portanto que  $\Psi_i = \phi_{,i}/4\pi G a^2 \bar{\rho} + F$ , onde  $F$  é função apenas das posições. Como devemos ter  $\Psi_i \rightarrow 0$  quando  $a \rightarrow 0$ , então  $F$  deve se anular em todo o espaço. Assim, temos

$$\phi_{,i} = -4\pi G a^2 \bar{\rho} \Psi_i. \quad (2.21)$$

Substituindo este resultado na equação (2.20), obtemos

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\Psi_i + \frac{\dot{a}}{a}\frac{d}{d\tau}\Psi_i = 4\pi G a^2 \bar{\rho}\Psi_i,$$

que é idêntica à equação (1.29) para perturbações lineares em<sup>6</sup>  $\delta$ . Na seção 1.3.2 vimos que essa equação possui duas soluções independentes  $\delta_{\pm}$ , que são os modos crescentes e decrescentes. Escolhendo a solução crescente podemos escrever

$$\Psi^i(\vec{q}, \tau) = \delta_+(\tau)\Psi_0^i(\vec{q}). \quad (2.22)$$

Assim, a velocidade é dada por:

$$v^i = \frac{d\Psi^i}{d\tau} = \dot{\delta}_+(\tau)\Psi_0^i(\vec{q}) = \frac{\dot{\delta}_+}{\delta_+}\Psi^i. \quad (2.23)$$

Como vimos na seção 1.3.2, num universo de Einstein-de Sitter temos  $\delta_+ \propto a$ , de modo que  $\Psi^i = a\Psi_0^i(\vec{q})$ .

### Diagonalização do tensor de deformação

O tensor de deformação escrito em termos do campo de deslocamento (2.18), fica

$$J_{ij} := \frac{\partial x_i}{\partial q^j} = \delta_{ij} + \Psi_{i|j}. \quad (2.24)$$

Em primeira ordem em  $\Psi^i$ , a derivada em relação a  $q^i$  é igual à derivada em relação a  $x^i$ :

$$\Psi^i_{,j} = \left(\frac{\partial\Psi^i}{\partial q^k}\right)\left(\frac{\partial q^k}{\partial x^j}\right) = \Psi^i_{|j} + O(\Psi^2). \quad (2.25)$$

---

<sup>6</sup>A única diferença é que lá tínhamos  $\partial/\partial\tau|_{\mathbf{x}}$  e aqui temos  $\partial/\partial\tau|_q$ . Como a equação é linear, o comportamento temporal podia ser multiplicado por qualquer função de  $\vec{x}$ , aqui deveremos multiplicar por uma função de  $\vec{q}$ .



O gradiente da velocidade, nessa ordem, é

$$v_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{d\Psi_i}{d\tau} \simeq \frac{\partial}{\partial q^j} \frac{d\Psi_i}{d\tau} = \frac{d\Psi_{i|j}}{d\tau}.$$

Se  $v_i$  é longitudinal, podemos utilizar a equação (2.22), de modo que

$$v_{i,j} \simeq \delta_+ \Psi_{i|j}^0. \quad (2.26)$$

Assim, se o escoamento é irrotacional ( $v_{i,j} = v_{j,i}$ ) o campo de deslocamento inicial também será, tanto no espaço  $x_i$  quanto no espaço  $q_i$ . Dessa forma  $\Psi_{i|j}^0$  é simétrico e pode ser diagonalizado. Na solução linear, a diagonalidade do tensor de deformação se mantém, já que  $\Psi_{i|j} = \delta_+ \Psi_{i|j}^0$ . Todas as aproximações locais mantêm essa propriedade, seja por hipótese, ou como consequência da aproximação introduzida. Na base em que  $J_{ij}$  é diagonal, teremos

$$J_{ij} = (1 + w_i) \delta_{ij}, \quad (2.27)$$

onde  $w_i$  são os autovalores de  $\Psi_{i|j}$ .

Usando as equações (2.13), (2.14) e (2.15), os parâmetros cinemáticos e o tensor  $F_{ij}$  serão dados por:

$$\delta = \frac{1}{J} - 1 = \frac{1}{(1 + w_1)(1 + w_2)(1 + w_3)} - 1, \quad (2.28)$$

$$\theta = \sum_{i=1,3} \frac{w'_i}{a(1 + w_i)}, \quad (2.29)$$

$$\sigma_i = \sigma_{ii} = \frac{w'_i}{a(1 + w_i)} - \frac{1}{3}\theta, \quad (2.30)$$

$$F_i = F_{ii} = -\frac{w''_i}{a^2(1 + w_i)}. \quad (2.31)$$

Essas quantidades satisfazem automaticamente a equação Euler e a equação de continuidade. Note que é sempre possível escrever os parâmetros cinemáticos na forma acima para condições iniciais lineares e irrotacionais. No entanto a base que diagonaliza

$J_{ij}$  pode ser diferente em cada ponto.

Utilizando as expressões (2.28) e (2.31), a equação de Poisson (2.16) fica:

$$-\sum_{i=1,3} \frac{w_i''}{a^2(1+w_i)} = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \left( \frac{1}{(1+w_1)(1+w_2)(1+w_3)} - 1 \right), \quad (2.32)$$

que é a equação de Raychaudhuri para  $J_{ij}$  na forma (2.27).

Para simetria esférica  $w_1 = w_2 = w_3$  e essa equação é suficiente para determinar a dinâmica. Da (2.31) é fácil ver que, se  $w_i$  é nulo,  $F_i = 0$ , assim o campo  $\phi_{,i}$  não depende de  $x_i$  e temos uma simetria de translação em relação a esse eixo. Para a simetria plana teremos  $w_i = w_j = 0$  e a (2.32) determina completamente a dinâmica. Na simetria cilíndrica, teremos  $w_i = 0$ ,  $w_j = w_k$ . Novamente a equação (2.32) é suficiente para resolver o problema.

A solução linear para  $w_i$  é dada pela (2.22):

$$w_i \simeq -\delta_+(t) \lambda_i^0, \quad (2.33)$$

onde  $\lambda_i^0$  são os autovalores de  $\Psi_{ij}^0$ . O sinal menos nessa expressão é escolhido por razões históricas (e para ficar em acordo com a maior parte da literatura).

No regime linear as equações (2.28) e (2.31) ficam:

$$\delta \simeq \delta_+ (\lambda_1^0 + \lambda_2^0 + \lambda_3^0), \quad (2.34)$$

$$\theta \simeq -\frac{\delta'_+}{a} (\lambda_1^0 + \lambda_2^0 + \lambda_3^0) = -\dot{\delta}_+ (\lambda_1^0 + \lambda_2^0 + \lambda_3^0), \quad (2.35)$$

$$\sigma_i \simeq \frac{-\delta'_+}{a} \lambda_i^0 - \frac{1}{3} \theta, \quad (2.36)$$

$$F_i \simeq \frac{\delta''_+}{a^2} \lambda_i^0. \quad (2.37)$$

Note que  $\delta \propto \delta_+(t)$  e  $\theta \simeq -\dot{\delta}$ , como deveria ser no regime linear. As condições iniciais lineares do modo crescente dependem apenas dos três parâmetros  $\lambda_i^0$ .

## Parametrização das condições iniciais

Nós estamos interessados na evolução não-linear de pequenas flutuações primordiais, logo, as condições iniciais serão escolhidas no regime linear. Como vimos na seção 1.3.2, a solução linear tem modos crescentes e decrescentes. Conservaremos apenas os modos crescentes, pois são os que sobrevivem para  $a \gg a_i$ .

Note que, quando  $a$  vai a zero, a própria perturbação se anula. Dessa forma, o que nós devemos definir como condições iniciais são as razões entre a perturbação e o seu fator de crescimento para  $a \rightarrow 0$ . No caso das posições, por exemplo, a perturbação é dada pelo campo de deslocamento  $\Psi_i = x_i - q_i$ . No caso irrotacional,  $\Psi_i = \delta_+(\tau) \Psi_i^0$  (eq. 2.22), de modo que  $\lim_{a \rightarrow 0} (\Psi_i/\delta_+) = \Psi_i^0$ . O mesmo ocorre para as outras quantidades, assim  $\delta_0 := \lim_{a \rightarrow 0} (\delta/\delta_+)$ ,  $\sigma_i^0 = \lim_{a \rightarrow 0} (\sigma_i^0/\delta_+)$ , etc.

Uma exceção são as perturbações de vorticidade, que sempre decaem com o tempo no regime linear. Nesse caso, temos (eq. 1.48)

$$\vec{\omega}(x, \tau) = \frac{a(\tau_i) \vec{\omega}(x, \tau_i)}{a(\tau)}.$$

Se as flutuações primordiais são geradas por flutuações quânticas amplificadas pela inflação, qualquer perturbação de vorticidade se anularia após o período inflacionário. Entretanto a vorticidade pode ser criada por outros mecanismos de geração de perturbações, que teriam ocorrido após a inflação, como por exemplo os defeitos topológicos. Mesmo assim, essas perturbações deveriam ser muito pequenas na época do desacoplamento, a ponto de não serem detectadas pelas observações atuais da radiação cósmica de fundo. No restante deste capítulo, e também no capítulo 3, consideraremos apenas condições iniciais irrotacionais. Os possíveis efeitos de uma vorticidade primordial não nula, e propostas para estudar esse efeito no regime não-linear serão brevemente discutidos na seção (3.5.2).

Agora surge a seguinte pergunta: quantos parâmetros são necessários para determinar completamente as condições iniciais? Se analisamos do ponto de vista de um fluido,

teríamos  $\rho(\vec{x})$  e  $\vec{v}(\vec{x})$  livres. Entretanto, como  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ , temos  $\vec{v} = \vec{\nabla}\psi$ . Assim, haveriam duas funções livres. No entanto, como estamos interessados em condições iniciais lineares, temos  $E_{ij} \propto \sigma_{ij}$  e  $\delta \propto \theta$  de modo que  $\phi_{,i,j} \propto \psi_{,i,j}$ . Portanto, *podemos deduzir todas as quantidades a partir de uma única função*: o potencial gravitacional peculiar  $\phi$ . Este pode ser determinado a partir de  $\delta(x)$  pela equação  $\nabla^2\phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}\delta$ . Dessa forma, a quantidade básica é o contraste de densidade. Podemos obter uma dada distribuição  $\delta(x)$  a partir do espectro inicial de flutuações (veja o apêndice B). Na prática, utilizamos  $\delta_k$  e podemos determinar  $\phi_k$  diretamente da equação (1.33).

Se estamos interessados nas flutuações *num ponto*  $q_i$ , estas são completamente determinadas pelos três autovalores  $\lambda_i^0$  e pela orientação dos eixos principais de  $\Psi_{ij}^0$ . Nas aproximações não-lineares a serem estudadas a partir da seção 2.3, a evolução é local, ou seja, dado  $\lambda_i^0$  num ponto podemos determinar a evolução dos parâmetros cinemáticos nesse ponto. Podemos escolher arbitrariamente os valores de  $\lambda_i^0$ , ou deduzi-los a partir de uma dada distribuição espacial. Pelas equações (2.21) e (2.22) teremos

$$\Psi_{ij}^0 = -\frac{1}{6\Omega}\phi_{,i,j}, \quad (2.38)$$

onde utilizamos que  $\delta_+ \rightarrow a \rightarrow \tau^2$ , quando  $a \rightarrow 0$ . Note que, no regime linear, o potencial  $\phi$  é constante (eq. 1.33).

### 2.2.1 A Aproximação de Zel'dovich

A *aproximação de Zel'dovich* [51] consiste em extrapolar a solução linear (2.22):

$$x^i = q^i + \Psi^i(\vec{q}, \tau) = q^i + \delta_+(\tau)\Psi_0^i(\vec{q}), \quad (2.39)$$

para valores não pequenos  $\Psi^i$ , ou seja, supor que a relação acima é válida mesmo no regime não-linear. O contraste de densidade é calculado pela (2.14)

$$\delta = \frac{1}{\det \Psi_{ij}} - 1. \quad (2.40)$$

Essa expressão pode levar a  $\delta \gg 1$  para  $\delta_+$  suficientemente grande. A aproximação de Zel'dovich (ZA<sup>7</sup>) pode ser obtida supondo apenas que a relação entre a velocidade e o campo gravitacional no regime linear (eq. 1.49) é mantida mesmo para  $\delta > 1$ . Essa é uma característica importante da ZA: o campo de velocidade é sempre proporcional ao campo gravitacional. Geometricamente, fica claro que esse resultado vale para escoamentos com simetria plana, cilíndrica ou esférica. No entanto o coeficiente de proporcionalidade só é correto para escoamentos planos e portanto a ZA é exata (até o cruzamento das órbitas) em uma dimensão. Isso pode ser visto calculando o tensor de deformação pela (2.39) e notando que ele satisfaz exatamente a equação de Raychaudhuri (2.17), se  $\delta_+$  satisfaz a equação de perturbação linear (1.29).

Se  $\Psi_0^i(\vec{q})$  é longitudinal, ele pode ser escrito como o gradiente de uma função

$$\Psi_i^0 = \Phi_{|i},$$

onde  $\Phi(\vec{q})$  é um “potencial” de deslocamento, fixado pelas condições iniciais. No espaço dos  $\vec{x}$  teremos:

$$\Psi_i(\vec{q}(\vec{x}, \tau), \tau) = \delta_+(\tau)\Phi_{,i} \quad \text{com} \quad \frac{d\Phi(\vec{x}, \tau)}{d\tau} = 0.$$

Se  $\Psi_{ij}^0(\vec{q})$  é diagonalizado, então  $\Psi_{ij}$  continuará diagonal ao longo da evolução (pois  $\Psi^i = \delta_+ \Psi_0^i$ ). Dessa forma o tensor de deformação é sempre diagonal e valem as expressões (2.28) a (2.16), com a (2.33), em particular, o contraste de densidade será dado por

$$\delta = \frac{1}{(1 - \delta_+ \lambda_1^0)(1 - \delta_+ \lambda_2^0)(1 - \delta_+ \lambda_3^0)} - 1.$$

Como  $\delta_+$  cresce com o tempo, um valor positivo de  $\lambda_i^0$  corresponde ao colapso no eixo  $i$  e um valor negativo corresponde a uma expansão nessa direção. Como os três autovalores

---

<sup>7</sup>As siglas das aproximações seguirão a origem inglesa, para não confundir com a notação utilizada na literatura. Assim a aproximação de Zel'dovich será referida por ZA (de *Zel'dovich approximation*), o mesmo se dará para as siglas de todas as aproximações locais a serem introduzidas.

são em geral diferentes, uma direção colapsará primeiro: aquela para a qual  $\delta_+ \lambda_i^0 = 1$ . Portanto a maior parte das perturbações colapsará em estruturas achatadas, ou panquecas. Essas são as primeiras estruturas não-lineares a se formarem quando a instabilidade gravitacional amplifica as perturbações na densidade.

Uma diferença importante entre a aproximação de Zel'dovich e o regime linear é que a primeira prediz que os objetos não-lineares se formam primeiro nos picos de  $\lambda_i^0$ , enquanto a teoria linear prediz a formação de estruturas nos picos de  $\delta_0 \propto \lambda_1^0 + \lambda_2^0 + \lambda_3^0$  (eq. 2.34).

A distribuição dos  $\lambda_i^0$  pode ser utilizada para obter uma imagem qualitativa do colapso. Para fazermos uma estimativa simples, vamos supor que os  $\lambda_i^0$  não estão correlacionados (na verdade há uma correlação, veja o apêndice B). Nesse caso, a probabilidade de algum  $\lambda_i^0$  ser positivo ou negativo é 1/2. Um conjunto de pontos que se expanda nas três direções vai acabar como um *void*, isso ocorreria para uma fração  $(1/2)^3 = 1/8$  da massa. Os 7/8 restantes vão colapsar em pelo menos uma direção.

A aproximação de Zel'dovich foi testada com simulações numéricas para um grande número de condições iniciais (veja ref. [57]). Encontrou-se que no início da fase não-linear ela reproduz muito bem a distribuição da densidade e a formação, aparência e localização das panquecas. Em tempos posteriores a ZA faz com que as panquecas engrossem, enquanto as simulações de  $N$ -corpos mostram que as panquecas permanecem relativamente finas. Acontece que a espessura das panquecas se estabiliza rapidamente, mesmo num meio sem colisões, devido à ação da gravidade. Partículas caindo nas panquecas oscilam em torno da região central, em vez de mover-se progressivamente para fora ao longo da direção inicial da velocidade como é predito pela expressão (2.39). A formação de panquecas ocorre no cruzamento das trajetórias, quando estritamente a ZA deixaria de valer, pois o mapeamento  $\vec{q} \rightarrow \vec{x}$  não existe mais. Ainda assim é possível utilizar a expressão (2.39) para calcular as posições, depois desse ponto, o que leva à dissipação das panquecas. Isso pode ser resolvido modificações da ZA [52, 53, 54].

Neste trabalho não estaremos interessados no que ocorre após o cruzamento das trajetórias. A intenção aqui é estudar aproximações que forneçam bons resultados nas fases não-lineares do colapso, antes o cruzamento das trajetórias. Veremos por exemplo que a

ZA superestima o tempo de colapso para configurações não planas.

A aproximação de Zel'dovich, que é baseada na solução linear para os deslocamentos, descreve a evolução das perturbações com boa aproximação mesmo quando os contrastes de densidade não são lineares. Cabe perguntar: porque a ZA funciona?

Há várias maneiras de entender isso. Primeiro note que, mesmo  $\Psi^i$  sendo pequeno, a perturbação na densidade não precisaria ser pequena, já que ela depende de suas derivadas. Assim, mesmo que as posições não sejam significativamente perturbadas, os contrastes de densidade podem ser não-lineares. Outra maneira de enxergar o problema é notar que a quantidade básica que é utilizada na aproximação de Zel'dovich é o potencial newtoniano extrapolado da teoria linear. O potencial verdadeiro pode não se desviar muito da teoria linear, mesmo quando o contraste de densidade é bem não-linear, porque os potenciais são funções mais suaves que as densidades. A forma mais simples de entender porque a ZA pode fornecer bons resultados mesmo quando  $\delta \gg 1$  é ver que trajetórias lineares podem acabar convergindo levando a grandes densidades. É como no caso de lentes gravitacionais, em que pequenos desvios na trajetória da luz acabam produzindo efeitos não-lineares.

Estimativas analíticas da precisão da ZA são discutidas em [4] e [5]. Neste trabalho faremos apenas uma comparação entre a ZA e as aproximações locais (veja seção 3.3). Uma boa discussão sobre a aproximação de Zel'dovich pode ser encontrada nas referências [4] e [58]. Inúmeras aplicações da ZA são encontradas na literatura. Também foram desenvolvidas várias extensões. Uma extensão incorporando o modo decrescente pode ser encontrada em [59, 62]. Tentativas de incluir a vorticidade são discutidas nas referências [59] e [60] (veja também a seção 3.5.2). Um tratamento para matéria escura quente é introduzido em [61]. Uma aplicação para cordas cósmicas é apresentada em [62] e [63].

Nesta seção apresentamos a aproximação de Zel'dovich a partir da solução linear do campo de deslocamentos. Na seção 2.3.4 estudaremos a ZA sob um outro ponto de vista. Nosso objetivo será motivar aperfeiçoamentos da aproximação de Zel'dovich inserindo-a no contexto das *aproximações locais*.

A seguir vemos uma extensão da aproximação de Zel'dovich, seguindo a mesma idéia

de perturbar as trajetórias.

## 2.2.2 Teoria de Perturbação Lagrangiana

O grande sucesso da aproximação de Zel'dovich é, em boa parte, devido a ela ser formulada no espaço lagrangiano, em vez do espaço euleriano. Isso permite seguir as trajetórias das partículas e acompanhar a evolução da densidade por um período muito maior do que é possível na abordagem de perturbação euleriana, que deixa de valer para  $\delta \sim 1$ . De fato a ZA continua boa quase até o cruzamento das trajetórias. Seguindo essa lógica esperaríamos que um formalismo lagrangiano de perturbação, onde como na ZA, a quantidade fundamental perturbada seja o campo de deslocamentos, deva ser bem acurado.

Novamente vamos utilizar a equação (2.18) para expressar a posição como uma perturbação das posições iniciais. Escreveremos  $\Psi_i$  como uma série:  $\Psi_i = \psi_i^{(1)} + \psi_i^{(2)} + \psi_i^{(3)} + \dots$ . O primeiro termo  $\psi_i^{(1)} = \delta_+ \Psi_i^0$  é a aproximação de Zel'dovich. Vamos supor, por simplicidade, um universo plano dominado pela matéria (EdS). Nesse caso  $\delta_+ \propto a$  e pode-se mostrar que a solução  $\psi_i^{(j)}$  é separável em todas as ordens:

$$\Psi_i = \sum_n a^n \Psi_i^{(n)}(q). \quad (2.41)$$

O tensor de deformação será dado por<sup>8</sup>

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q^j} = \delta_{ij} + a \Psi_{ij}^{(1)} + a^2 \Psi_{ij}^{(2)} + a^3 \Psi_{ij}^{(3)} + \dots \quad (2.42)$$

Vamos utilizar esta expressão na equação de Raychaudhuri (2.17) e obter os termos de ordens mais altas. Para isso precisamos calcular o determinante de  $J_{ij}$ . É fácil mostrar que  $\det(I + A) = 1 + I_1 + I_2 + I_3$ , onde  $I$  é a matriz identidade e  $I_n$  são os invariantes

---

<sup>8</sup>Nesta notação, temos  $\Psi_{ij}^{(1)} \equiv \Psi_{ij}^0$ .



da matriz  $A$ :

$$I_1 = \text{Tr}(A), \quad I_2 = \frac{1}{2} [\text{Tr}(A)^2 - \text{Tr}(A^2)], \quad I_3 = \det A. \quad (2.43)$$

Calculando  $J$  até segunda ordem em  $a$  e expandindo a sua inversa, teremos<sup>9</sup>

$$J^{-1} \simeq 1 - a\Psi_{i|i}^{(1)} - a^2\Psi_{i|i}^{(2)} + \frac{1}{2}a^2 \left[ \left(\Psi_{i|i}^{(1)}\right)^2 + \Psi_{i|j}^{(1)}\Psi_{j|i}^{(1)} \right]. \quad (2.44)$$

Substituindo na equação (2.17) obtemos

$$\Psi_{i|i}^{(2)} = -\frac{3}{14} \left[ \left(\Psi_{i|i}^{(1)}\right)^2 - \Psi_{i|j}^{(1)}\Psi_{j|i}^{(1)} \right]. \quad (2.45)$$

Note que, como esse resultado foi obtido a partir da equação de Raychaudhuri, não é possível determinar cada  $\Psi_{i|j}^{(2)}$  de modo independente. Temos uma equação que tem que ser resolvida integrando em todo o espaço, conhecendo  $\Psi_{i|j}^{(1)}$ . De qualquer forma, isso é bem mais simples do que integrar numericamente as equações de movimento, porque aqui só precisamos calcular a integral uma única vez. A evolução será dada pela (2.41).

É interessante notar que, se temos  $\Psi_{i|i}^{(n)}$  e  $\Psi_{i|j}^{(n-1)}$  podemos calcular o contraste de densidade até ordem  $n$ , sem precisarmos calcular cada  $\Psi_{i|j}^{(n)}$ . Por exemplo, sabendo a soma (2.45) já é possível calcular a densidade em segunda ordem (eq. 2.44).

Seguindo o mesmo procedimento, podemos calcular os termos de ordens mais altas. Na solução de terceira ordem calculamos o determinante  $J$  até essa ordem e substituímos na equação de Raychaudhuri, o resultado é

$$\Psi_{i|i}^{(3)} = -\frac{5}{9} \left( \Psi_{i|i}^{(1)}\Psi_{j|j}^{(2)} - \Psi_{i|j}^{(2)}\Psi_{j|i}^{(1)} \right) - \frac{1}{3} \det \left( \Psi_{i|j}^{(1)} \right). \quad (2.46)$$

As equações (2.45) e (2.46) não são suficientes para calcular  $\Psi_i$  nessas ordens. Precisamos de uma condição sobre  $\Psi_{i|j}^{(n)}$ . Vamos supor que o escoamento é irrotacional, de modo  $v_{i,j} = v_{j,i}$ . O gradiente da velocidade pode ser calculado em termos de  $\Psi_{i|j}^{(n)}$  pela

---

<sup>9</sup>Com soma em  $i$  e  $j$ .

(2.13). Em segunda ordem teremos

$$\begin{aligned} v_{i,j} &= \frac{1}{a} \frac{dJ_i^k}{dt} J_{kj}^{-1} \simeq \frac{1}{a} \left( -2t^{-3} \Psi_{i|k}^{(1)} - 4t^{-5} \Psi_{i|k}^{(2)} \right) \left( \delta_{k|j} - a \Psi_{k|j}^{(1)} \right) = \\ &= 2t^{-1} \left( \Psi_{i|j}^{(1)} + 2a \Psi_{i|j}^{(2)} - a \Psi_{i|k}^{(1)} \Psi_{k|j}^{(1)} \right). \end{aligned}$$

Dessa forma, a condição de irrotacionalidade implica em

$$\Psi_{i|j}^{(2)} - \Psi_{j|i}^{(2)} = 0. \quad (2.47)$$

Podemos utilizar essa relação para escrever  $\Psi_i^{(2)}$  como um gradiente em coordenadas lagrangianas:  $\Psi_i^{(2)} = \phi_{|i}$  de modo que a (2.45) se torna uma equação de Poisson em  $q_i$ .

Em terceira ordem, a condição de irrotacionalidade leva a

$$\Psi_{i|j}^{(3)} - \Psi_{j|i}^{(3)} = \frac{1}{3} \left( \Psi_{i|k}^{(2)} \Psi_{k|j}^{(1)} - \Psi_{j|k}^{(2)} \Psi_{k|i}^{(1)} \right). \quad (2.48)$$

Vemos portanto que, em geral, a partir de terceira ordem, o campo de deslocamento não é mais potencial na teoria de perturbação lagrangiana. Dessa forma, o tensor de deformação  $J_{ij}$  não é mais simétrico a partir dessa ordem.

Uma vez obtido  $\Psi_i$  até uma dada ordem  $n$ , podemos calcular as trajetórias pela (2.18). O contraste de densidade deve ser calculado utilizando a (2.40) e não a expansão de  $J$  até essa ordem.

A solução de primeira ordem é a aproximação de Zel'dovich [51], a de segunda ordem é conhecida com pós-Zel'dovich (PZA, refs. [64], [59] e [65]), e a de terceira é a pós-pós-Zel'dovich (PPZA, refs. [66] e [67]). Muitos resultados originalmente obtidos com a aproximação de Zel'dovich foram estendidos para ordens mais altas na teoria de perturbação lagrangiana, em especial para a PZA (veja a ref. [4] e referências nela citadas). Do mesmo modo que ZA, a teoria de perturbação lagrangiana deixa de valer depois do cruzamento das trajetórias.

Na seção (3.4) faremos uma comparação entre a teoria de perturbação lagrangiana e as aproximações locais, que serão introduzidas a seguir.

## 2.3 Aproximações Locais

A aproximação de Zel'dovich (ZA) tem uma propriedade muito interessante: a partir do valor de  $\Psi_{ij}^0$  em um dado ponto  $q_i$ , podemos obter a evolução do tensor de deformação  $J_{ij}$  em  $q_i$ , sem a necessidade de informações sobre os outros pontos. Além disso, temos uma expressão analítica simples para  $J_{ij}$  em função de  $\Psi_{ij}^0$  e  $\tau$ , que corresponde à solução linear  $J_{ij} = \delta_{ij} + \delta_+(\tau) \Psi_{ij}^0$  (eq. 2.39). Mesmo assim, a ZA fornece bons resultados e é amplamente utilizada no regime não-linear em cosmologia.

Definiremos como *local* qualquer aproximação que, como a ZA, permita calcular a evolução de  $J_{ij}$  num dado elemento de volume em função apenas das condições iniciais nesse elemento, dadas por  $\Psi_{ij}^0$ . A localidade tem duas conseqüências importantes. Como a evolução não depende dos vizinhos, o tempo de cálculo aumenta linearmente com o número  $N$  de partículas. Já nas simulações de  $N$ -corpos, o tempo de cálculo aumenta com  $N^2$ , ou no melhor dos casos, com  $N \log N$ , devido à necessidade de calcular o campo gravitacional gerado pela distribuição de matéria (veja seção 3.5.1). Além disso, o cálculo com as aproximações locais é bem mais rápido do que nas simulações numéricas, porque não é preciso calcular o campo gravitacional gerado por todas as partículas. Assim, se uma aproximação local for acurada, ela poderia ser, em alguns casos, uma alternativa às simulações computacionais, oferecendo um tempo de cálculo menor. Outra vantagem da evolução local é a possibilidade de estudar propriedades da aglomeração não-linear sem a necessidade de utilizar alguma distribuição específica  $\delta(x)$ . Poderíamos, por exemplo, determinar se um elemento de volume vai colapsar ou se expandir, baseados apenas no valor de  $\Psi_{ij}^0$  nesse elemento. Seria possível estudar a influência das condições iniciais na evolução do sistema e procurar propriedades genéricas da evolução não-linear. Se tivermos a distribuição estatística das condições iniciais, poderemos calcular várias quantidades interessantes, como por exemplo a função de massa.

Assim, motivados pelas suas possibilidades de aplicação e pelo sucesso da aproximação de Zel'dovich, somos levados a buscar novas aproximações locais que sejam ainda melhores que a ZA. Note que a teoria de perturbação lagrangiana (TPL), discutida na seção

anterior, não se enquadra nesta categoria. Apesar da evolução ser fixada pelas condições iniciais, devemos resolver equações não locais do tipo Poisson no tempo  $\tau_i$ . Dessa forma, não podemos estudar a evolução de um elemento de volume baseados apenas em  $\Psi_{ij}^0$  nesse elemento, mas precisamos da distribuição em todos os pontos para resolver o problema. A vantagem da TPL sobre as simulações de  $N$ -corpos é que só precisamos resolver a equação de Poisson em  $\tau_i$ , enquanto nas simulações é preciso fazê-lo para todo  $\tau$ .

A partir da estatística das flutuações primordiais é possível determinar a distribuição de probabilidades dos autovalores de  $\Psi_{ij}^0$  (veja o apêndice B). Essa é mais uma vantagem das aproximações locais: como os autovalores determinam a evolução, é possível obter uma série de resultados estatísticos fazendo uma média nas condições iniciais com as suas probabilidades. Um exemplo é o cálculo da função de massa, que será discutido na seção 3.3.3. Como uma distribuição de probabilidades para  $\Psi_{ij}^{(n)}$ , ainda não foi determinada, esse tipo de resultado não pode ser obtido com a TPL.

Evidentemente a evolução exata não pode ser local [82], pois precisamos resolver a equação de Poisson, cuja solução envolve contribuições de todos os elementos. O interessante é que a evolução aproximada pode ser local, como na ZA, e ainda assim fornecer bons resultados. Também é importante que utilizemos o tensor de deformação, ou diretamente os parâmetros cinemáticos, como variáveis, porque é com essa escolha que a solução poderá ser aproximadamente local. Uma certa informação sobre os elementos de volume vizinhos está codificada em  $\Psi_{ij}^0$ , pois ele é o gradiente da perturbação na posição  $\Psi_i^0$ .

Discutimos acima algumas motivações práticas para procurar aproximações locais. Vamos ver agora uma motivação baseada nas equações de movimento. Como vimos na seção 2.2, a abordagem lagrangiana permite resolver formalmente as equações de Euler e de continuidade. O que está faltando é uma equação local para determinar o campo gravitacional  $F_i$ , que deveria ser obtido integrando a equação de Poisson. É possível obter uma equação local para  $J_{ij}$  (eq. 2.17), no entanto ela não permite calcular todas as componentes do tensor de deformação. Na seção 2.2 mostramos que, se  $\omega = 0$ , o tensor de deformação pode ser inicialmente diagonalizado. Supondo que essa diagonalização é

mantida, ou seja, que os autovetores de  $J_{ij}$  não mudam, teremos apenas três incógnitas (os três  $w_i$ ). Ainda assim, a equação (2.32) não contém informação suficiente para determinar a evolução de cada componente  $w_i$ . Apenas nas simetrias plana, esférica e cilíndrica, essa equação permite determinar completamente a dinâmica.

As aproximações locais a serem discutidas aqui tentarão extrair alguma informação da equação (2.32) ou providenciarão alguma equação de evolução local para  $F_i$ . Na prática, a localidade se refletirá em que teremos uma expressão analítica para  $w_i$  em função de  $\lambda_i^0$  e  $\tau$ , como na ZA; ou um conjunto fechado de equações de evolução *sem gradientes espaciais*, para determinar  $w_i$ .

Nas próximas subseções, apresentaremos cinco aproximações locais que foram propostas recentemente na literatura [68, 69, 70, 71, 72]. Até onde sabemos, elas englobam todas as aproximações que satisfazem a nossa definição de localidade, além da ZA. Depois, aplicaremos as aproximações locais a várias situações, investigaremos algumas características gerais e faremos algumas comparações com resultados conhecidos.

Todas as aproximações locais propostas foram desenvolvidas para o caso irrotacional, que é o que se espera de flutuações primordiais que evoluem pela ação da gravidade. Na seção 3.5.2 apresentamos uma breve discussão sobre o caso rotacional.

### 2.3.1 A Aproximação de Zel'dovich Modificada

A aproximação de Zel'dovich pode ser definida como o *Ansatz* de que a parte temporal do tensor de deformação seja a mesma em todas as direções:

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial q^j} = \delta_{ij} + F(\tau, \vec{q}) \Psi_{ij}^0(\vec{q}).$$

Substituindo este *Ansatz* na equação de Raychaudhuri linearizada obtem-se que  $F$  não depende das condições iniciais  $\Psi_0^i$  e é dado por  $F = \delta_+$ . Dessa forma, na ZA, o tensor de deformação escrito nos eixos principais é (eqs. 2.27 e 2.33):

$$J_{ij} = (1 - \delta_+ \lambda_i^0) \delta_{ij}.$$

Uma generalização natural da aproximação de Zel'dovich seria manter essa expressão para o tensor de deformação, mas utilizar a equação de Raychaudhuri (2.17) completa, sem linearizá-la, para determinar o fator temporal. Assim, vamos procurar uma solução na forma

$$J_{ij} = [1 - D(\vec{q}, t) \lambda_i^0] \delta_{ij}, \quad (2.49)$$

onde a função  $D$  pode depender da posição através das condições iniciais  $\lambda_i^0$ . Substituindo o *Ansatz* (2.49) na equação (2.32) obtemos ( $w_i = -D\lambda_i^0$ ):

$$\frac{d^2 D}{dt^2} = 4\pi G \bar{\rho} a^4 \frac{\eta_1 D - \eta_2 D^2 + \eta_3 D^3}{\eta_1 - 2\eta_2 D + 3\eta_3 D^2}, \quad (2.50)$$

com  $\eta_1 = \lambda_1^0 + \lambda_2^0 + \lambda_3^0$ ,  $\eta_2 = \lambda_1^0 \lambda_2^0 + \lambda_1^0 \lambda_3^0 + \lambda_2^0 \lambda_3^0$  e  $\eta_3 = \lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0$ . (note que os  $\eta$ 's são os invariantes do tensor  $J_{ij}$ ). Essa equação determina completamente a função  $D(\lambda_i, t)$  e define a *Aproximação de Zel'dovich Modificada* (MZA, ref. [68]).

Usando a (2.13) temos

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{a} (J_{kj})^{-1} \frac{dJ_i^k}{dt} = -\frac{1}{a} \frac{dD}{dt} \frac{\lambda_i}{1 - D\lambda_i} \delta_{ij},$$

a partir do qual podemos calcular os parâmetros cinemáticos. Note que, segundo a MZA, o gradiente da velocidade (dado pela expressão acima) é proporcional à segunda derivada do campo gravitacional  $\phi$  (2.31):

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \alpha(\vec{x}, t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2.51)$$

onde  $\alpha = -a(dD/dt)/(d^2 D/dt^2)$ . Essa relação é satisfeita nas simetrias plana, cilíndrica e esférica, e portanto a MZA é exata para essas simetrias<sup>10</sup>. A aproximação de Zel'dovich tem  $\alpha = -2f/(3H\Omega a)$ , que é independente das condições iniciais  $\lambda_i^0$ . Esse fator só é correto para a simetria plana.

---

<sup>10</sup>Pode-se verificar que a equação para  $-D\lambda_i^0$  é igual à equação (2.32) para  $w_i$  nessas simetrias.

Num universo chato, dominado pela matéria a solução em primeira ordem (linear em  $D$ ) fica independente de  $\eta_i$  e é dada por

$$D = a \quad \text{ou} \quad D = a^{-3/2}, \quad (2.52)$$

que corresponde exatamente aos modos crescente e decrescente da solução linear (e de Zel'dovich). Trabalharemos sempre com os modos crescentes de forma que escolhermos como solução de primeira ordem  $D = a$ .

Expandindo a (2.50) em  $2^a$  ordem e procurando uma solução na forma  $D = a + D^{(2)}$ , com  $D^{(2)} = Ca^2$ , obtemos

$$D^{(2)} = \frac{3\eta_2}{7\eta_1} a^2. \quad (2.53)$$

Em terceira ordem teremos  $D = a + D^{(2)} + D^{(3)}$ , com:

$$D^{(3)} = \frac{1}{3} \left[ \frac{10}{7} \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 - \frac{\eta_3}{\eta_1} \right] a^3 \quad (2.54)$$

Note que, se  $\eta_1 = 0$  a solução linear da (2.50) não será mais dada pela expressão (2.52). A solução de ordem mais baixa nesse caso fica:  $D = a^{-1/4 \pm \sqrt{13}}$ , ou seja  $a \simeq a^{3.3}$  ou  $D \simeq a^{-3.8}$  (modos crescentes e decrescentes). No entanto, seria correto obtermos a solução de Zel'dovich para  $a \rightarrow 0$ , e portanto a MZA não pode ser utilizada com a condição inicial  $\eta_1 = 0$ . O que vemos aqui é que fazer o limite  $\eta_1 \rightarrow 0$  não comuta com o limite  $a \rightarrow 0$  na MZA.

A MZA não pode ser utilizada em todas as regiões subdensas. Quando  $\delta_0 < 0$ , mas pelo menos um autovalor  $\lambda_i^0$  é positivo, o denominador da (2.50) acaba se anulando para algum valor de  $a$  [68]. Dessa forma, a MZA não pode ser utilizada com esse tipo de condições iniciais.

### 2.3.2 A Aproximação do Tensor de Deformação

Nas duas aproximações locais discutidas anteriormente (ZA e MZA) a mesma função do tempo podia ser fatorada dos três  $w_i$ . Assim, foi possível determinar completamente essa função através da equação (2.32), ou da sua versão linearizada (no caso da ZA). A *aproximação do tensor de deformação* (DTA, ref. [69]) consiste em utilizar um *Ansatz* para separar a (2.32) em três equações para cada  $w_i$ . Como uma permutação dos eixos não muda a dinâmica, se é possível escrever uma equação para  $w_i$  em termos de todos os  $w_j$ , essa equação terá de ser invariante sob uma permutação dos índices. A equação para  $w_1$  por exemplo, tem que ser invariante sob a troca  $w_2 \leftrightarrow w_3$ . Além disso, se mudamos a legenda 1 por 2 devemos obter a equação para  $w_2$ .

Para começar, vamos reescrever a (2.32) multiplicando ambos lados por  $(1 + w_1)(1 + w_2)(1 + w_3)$ , e agrupando do lado direito os termos proporcionais a cada  $w_i$ :

$$\sum_{i=1,3} (1 + w_j + w_k + w_j w_k) w_i'' = \sum_{i=1,3} 4\pi G a^4 \bar{\rho} \left( 1 + \frac{w_j + w_k}{2} + \frac{w_j w_k}{3} \right) w_i, \quad (2.55)$$

onde  $(i, j, k)$  é uma permutação  $(1, 2, 3)$ . Vemos que cada termo da soma é invariante sob a troca  $w_j \leftrightarrow w_k$ . A DTA consiste em separar essa equação numa equação para cada  $w_i$ :

$$(1 + w_j + w_k + w_j w_k) w_i'' = 4\pi G a^4 \bar{\rho} \left( 1 + \frac{w_j + w_k}{2} + \frac{w_j w_k}{3} \right) w_i. \quad (2.56)$$

Temos assim um conjunto local de equações que permitem determinar cada  $w_i$  completamente. Esse sistema de equações para  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ , além ser invariante na mudança  $w_j \leftrightarrow w_k$ , tem a propriedade mencionada acima de que trocando  $i$  por  $j$  leva à equação par  $w_j$ . Uma motivação é que essa equação é exata para simetria esférica, plana e cilíndrica. Para simetria esférica ( $w_1 = w_2 = w_3$ ) as equações (2.55) e (2.56) são idênticas. Na a simetria plana (colapso unidimensional), temos  $w_1 = w_2 = 0$  e novamente a (2.55) e (2.56) são equivalentes. Para a simetria cilíndrica,  $w_i = 0$ ,  $w_j = w_k$  e a equação aproximada é exata nesse caso. Nesses três casos temos apenas um  $w_i$  independente de modo



que a (2.55) permite resolver completamente o problema.

De certo modo obter a equação (2.56) é como transformar a condição sobre o traço de  $\partial^2\phi/\partial x^i\partial x^j$  numa condição para cada uma de suas componentes. Obviamente é possível acrescentar outros termos locais à (2.56) que preservem as simetrias e que se anulem na soma (2.55), embora não haja nenhuma motivação física que leve a uma dada expressão para esses termos. Por exemplo, poderíamos adicionar, ao lado direto da (2.56), um termo com a forma:  $g [w_i^2 (w_j + w_k) - w_i (w_j^2 + w_k^2)]$ .

### Condições iniciais

Nas simulações cosmológicas, começaremos a integração do sistema no regime linear. Para condições iniciais lineares teremos  $w_i \ll 1$ . A equação (2.56) fica

$$w_i'' = 4\pi G a^4 \bar{\rho} w_i,$$

cuja solução dá os modos crescentes e decrescentes da teoria de perturbação linear que, num universo de Einstein-de Sitter, são dados por

$$w_i = -\lambda_i^0 t^{-2} = -\lambda_i^0 a \quad \text{ou} \quad w_i = -\lambda_i^0 t^3. \quad (2.57)$$

Utilizaremos como condições iniciais os modos crescentes. Para integrar o sistema (2.56) a partir de algum tempo  $t_i$  precisamos de  $w_i$  e  $\dot{w}_i$ . Este último pode ser obtido diretamente do comportamento linear (2.57).

Para condições iniciais genéricas devemos determinar  $w_i$  e  $\dot{w}_i$  de maneira independente. A equação (2.56) dá o campo  $F_i$  em termos dos  $w_i$ :

$$F_i = -\frac{4\pi G a^2 \bar{\rho} \left(1 + \frac{w_j + w_k}{2} + \frac{w_j w_k}{3}\right) w_i}{(1 + w_1)(1 + w_2)(1 + w_3)} \quad (2.58)$$

Os  $w_i$  são determinados a partir do tensor de maré  $E_i = F_i - 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta/3$ . Note que um dos  $w_i$  deve ser obtido através da equação (2.28), já que  $\sum_{i=1,3} E_i = 0$ .

$$E_i = \frac{2\pi G a^2 \bar{\rho}}{3} \frac{2(w_k + w_j + w_j w_k) - w_i(4 + w_j + w_k)}{(1 + w_1)(1 + w_2)(1 + w_3)}.$$

Eliminando  $w_i$ , obtemos:

$$\frac{3E_i(1 + w_j)(1 + w_k)}{2\pi G a^2 \bar{\rho}} = [2(w_k + w_j + w_j w_k)(1 + w_j)(1 + w_k) - (4 + w_j + w_k)(1 + \delta)].$$

Esse conjunto de duas equações cúbicas acopladas deve ser resolvido numericamente. As derivadas  $\dot{w}_i$  podem então ser obtidas a partir das equações (2.29) e (2.30). Vemos que trabalhar com condições iniciais lineares simplifica enormemente o problema. Como a motivação deste trabalho é estudar a evolução não-linear de pequenas flutuações iniciais para investigar formação de estruturas em grande escala, nos restringiremos a condições iniciais lineares.

### Solução de segunda ordem para o modo crescente

Podemos escrever a solução como uma soma de termos de ordens diferentes:  $w_i = w_i^{(1)} + w_i^{(2)} + \dots$ , onde  $w_i^{(1)} = -\lambda_i^0 \delta_+$  é de 1ª ordem ( $\mathcal{O}_\varepsilon$ ),  $w_i^{(2)}$  é  $\mathcal{O}_{\varepsilon^2}$ , etc. A equação para  $w_i^{(2)}$  fica

$$\left(w_i^{(2)}\right)'' = 4\pi G a^4 \bar{\rho} \left(w_i^{(2)} - \frac{w_j^{(1)} + w_k^{(1)}}{2} w_i^{(1)}\right).$$

Num universo de Einstein-de Sitter temos  $w_i^{(1)} = -\lambda_i^0 a$  e  $4\pi G a^4 \bar{\rho} = 6/t^2$  de modo que

$$w_i^{(2)} = -\frac{3}{14} (\lambda_j^0 + \lambda_k^0) \lambda_i^0 a^2, \quad (2.59)$$

### Comportamento Assintótico

Quando  $\delta$  diverge, significa que pelo menos um  $w_i$  tende para o valor  $-1$ . Se os três tendem a esse valor, dizemos que o colapso é esférico. Se dois tendem a  $-1$ , o colapso é bidimensional (tende a uma linha). Finalmente, se apenas um vai para esse valor, o

colapso é unidimensional, formando uma panqueca. Vamos tentar determinar o comportamento assintótico para cada um desses casos:

- **Colapso esférico**

Nesse caso teremos  $w_i \rightarrow -1 + \varepsilon_i$ , com  $0 < \varepsilon_i \ll 1$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Em ordem mais baixa em  $\varepsilon_i$  a (2.56) fica

$$\varepsilon_i'' = -\frac{4\pi G a^4 \bar{\rho}}{3} \frac{1}{\varepsilon_j \varepsilon_k}$$

Supondo que

$$\varepsilon_i \rightarrow C_i (t_c - t)^{d_i}, \quad \text{quando} \quad t \rightarrow t_c \quad (2.60)$$

obtemos, pela equação acima:

$$d_i (d_i - 1) C_i (t_c - t)^{d_i - 2} = -\left(\frac{4\pi G a^4 \bar{\rho}}{3}\right) \frac{1}{C_j C_k} (t_c - t)^{-(d_j + d_k)}.$$

Assim, devemos ter que  $d_1 + d_2 + d_3 = 2$ . Se supusermos que cada eixo vai a zero seguindo a mesma lei de potência, teremos  $d_i = 2/3$ . Cada  $\varepsilon_i$  pode ter um coeficiente diferente, mas eles estão relacionados por  $C_i C_j C_k = -(4\pi G a^4 \bar{\rho}/3) [d_i (d_i - 1)]^{-1} = 9a_c$  (onde  $a_c = t_c^{-2}$ ). Dessa forma, quando  $t \rightarrow t_c$ , os parâmetros cinemáticos ficam:

$$\delta \simeq \frac{1}{\varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k} = (C_i C_j C_k)^{-1} (t_c - t)^{-2} = \frac{(t_c - t)^{-2}}{9a_c}, \quad (2.61)$$

$$\theta \simeq \sum_{i=1,3} \frac{1}{a} \frac{\varepsilon_i'}{\varepsilon_i} = -\sum_{i=1,3} \frac{1}{a_c} d_i (t_c - t)^{-1} = -\frac{2}{a_c} (t_c - t)^{-1}, \quad (2.62)$$

$$\sigma_i \simeq \frac{1}{a} \frac{\varepsilon_i'}{\varepsilon_i} - \frac{1}{3} \theta = 0, \quad (2.63)$$

$$E_i \simeq -\frac{1}{a^2} \frac{\varepsilon_i''}{\varepsilon_i} - \frac{4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta}{3} = \frac{2}{9} \frac{(t_c - t)^{-2}}{a_c} - \frac{4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta}{3} = 0. \quad (2.64)$$

Note que  $\sigma_i$  e  $E_i$  foram calculados utilizando a (2.60). O resultado obtido implica em que essas quantidades não divergem nessa ordem. A solução de segunda ordem é  $\varepsilon_i =$

$C_i(t_c - t)^{2/3} + C_i^{(2)}(t_c - t)^2$ , de modo que

$$\frac{\varepsilon'_i}{\varepsilon_i} = \frac{(-2/3)C_i(t_c - t)^{-1/3} + 2C_i^{(2)}(t_c - t)}{C_i(t_c - t)^{2/3} + C_i^{(2)}(t_c - t)^2} \simeq -\frac{2}{3}C_i(t_c - t)^{-1} + 2\frac{C_i^{(2)}}{C_i}(t_c - t)^{1/3}.$$

Assim, o termo de segunda ordem não contribui para a divergência. O mesmo ocorre para  $E_i$  e também para os termos de ordem mais alta  $C_i^{(n)}(t_c - t)^n$ . Dessa forma, o cisalhamento e o campo de maré não divergem quando o colapso ocorre nos três eixos.

### • Colapso bidimensional

Nesse caso, dois autovalores,  $w_i$  e  $w_j$  convergem para  $-1$  em  $t \rightarrow t_c$ , enquanto o terceiro tem um valor diferente  $w_k^c$ . E equação (2.56) para os dois  $\varepsilon_i$  fica, em ordem mais baixa em  $\varepsilon$

$$\varepsilon_i'' = -4\pi G a^4 \bar{\rho} \frac{1/2 + w_k^c/6}{\varepsilon_j(1 + w_k^c)}. \quad (2.65)$$

Supondo que  $\varepsilon_i$  e  $\varepsilon_j$  seguem uma lei de potência próximo do colapso (eq. 2.60), teremos

$$d_i(d_i - 1)C_i(t_c - t)^{d_i-2} = -4\pi G a^4 \bar{\rho} \left( \frac{1}{2} + \frac{w_k^c}{1 + w_k^c} \frac{1}{3} \right) \frac{1}{C_j} (t_c - t)^{-d_j}.$$

Se cada eixo seguisse a mesma lei de potência, teríamos  $d_i = d_j = 1$ , mas justamente esse valor não satisfaz a equação (2.65). No caso da simetria cilíndrica  $\varepsilon_i = \varepsilon_j$  e o comportamento tem que ser o mesmo nos dois eixos, de modo que a solução não pode ser escrita como uma lei de potência. O mesmo deve ocorrer no caso geral do colapso bidimensional e não apenas nessa simetria. Não encontramos nenhuma solução analítica para a equação (2.65).

### • Colapso unidimensional

Neste caso, apenas um autovalor  $w_1$  tende a  $-1$ , e a equação (2.56) para  $\varepsilon_1 = 1 + w_1$  fica, em ordem mais baixa em  $\varepsilon$

$$\varepsilon_1'' = -4\pi G a^4 \bar{\rho} \left( \frac{1 + (w_2 + w_3)/2 + w_2 w_3/3}{1 + w_2 + w_3 + w_2 w_3} \right).$$

Supondo que  $\varepsilon_i$  segue a lei de potência (2.60), teremos, para  $t \rightarrow t_c$

$$d(d-1)D(t_c - t)^{d-2} = -4\pi G a^4 \bar{\rho} \left( \frac{1 + (w_2^c + w_3^c)/2 + w_2^c w_3^c/3}{1 + w_2^c + w_3^c + w_2^c w_3^c} \right),$$

de modo que  $d = 2$  e  $D$  é igual ao lado direito dessa equação dividido por dois. Também podemos adicionar a essa solução um termo  $C(t_c - t)$ . Assim, a solução até segunda ordem é:

$$\varepsilon_1 = C(t_c - t) + D(t_c - t)^2. \quad (2.66)$$

Para  $t \rightarrow t_c$ , os parâmetros cinemáticos ficam:

$$\delta \simeq \frac{(t_c - t)^{-1}}{C(1 + w_2^c)(1 + w_3^c)} \propto (t_c - t)^{-1}, \quad (2.67)$$

$$\theta \simeq \sum_{i=1,3} \frac{1}{a} \frac{\varepsilon_i'}{\varepsilon_i} \simeq -\frac{1}{a_c} (t_c - t)^{-1}, \quad (2.68)$$

$$\sigma_i \simeq \begin{cases} -2/3 a_c^{-1} (t_c - t)^{-1}, & i = 1, \\ 1/3 a_c^{-1} (t_c - t)^{-1}, & i = 2, 3, \end{cases} \quad (2.69)$$

$$F_1 \simeq -\frac{1}{a^2} \frac{\varepsilon_1''}{\varepsilon_1} \simeq -\frac{2D}{a_c^2 C} (t_c - t)^{-1}. \quad (2.70)$$

Para  $i = 2, 3$  o campo  $F_i$  também diverge. Pela expressão (2.58), quando  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  teremos

$$F_2 = -4\pi G \bar{\rho} a_c^2 \frac{w_2^c/2 + w_2^c w_3^c/6}{(1 + w_2^c)(1 + w_3^c) C(t_c - t)}, \quad (2.71)$$

e analogamente para  $F_3$ . Note que isso implica em que  $w_1''$  e  $w_2''$  devem divergir. Podemos verificar que a equação de Poisson  $F_1 + F_2 + F_3 = 4\pi G \bar{\rho} \delta$  é satisfeita, com  $\delta$  dado pela 2.67. Apesar de  $D$  ser determinado em termos de  $w_2^c$  e  $w_3^c$ , não temos nenhuma restrição sobre  $C$ . É interessante notar que  $\sigma_i$  e  $\theta$  só dependem de  $a_c$ . Nós voltaremos a discutir o comportamento assintótico no quadro geral das aproximações locais na seção 3.1.1.

### 2.3.3 A Aproximação Completa de Zel'dovich

A *Aproximação Completa de Zel'dovich* (CZA, ref. [70]) consiste em uma expansão em série de potências em termos da solução linear (2.33), mais um termo de correção a essa série. A CZA tem duas etapas fundamentais: supor que a evolução é local, de modo que é possível escrever  $w_i$  em termos das condições iniciais  $\lambda_i^0$  e usar o comportamento de  $w_i$  nas simetrias plana, esférica e cilíndrica para propor o termo de correção à série. É útil fatorar a solução linear da expressão de  $w_i$

$$w_i = -\lambda_i^0 a r_i. \quad (2.72)$$

Na MZA (seção 2.3.1) fizemos uma separação semelhante, onde tínhamos  $ar_i = D$ . A diferença é que aqui teremos uma função diferente multiplicando cada  $\lambda_i$ . No caso da MZA a função  $D$  dependia das condições iniciais  $\lambda_i^0$  e do tempo. Aqui vamos supor que a solução para  $r_i$  pode se expandir em uma série de potências de  $\lambda_i^0$  e que, num universo de Einstein-de Sitter, podemos separar a parte temporal em potências do fator de crescimento  $a$  (como no caso da TPL, seção 2.2.2). Para satisfazer os critérios de simetria discutidos na seção 2.3.2, a forma geral da expansão deve ser

$$r_i(\lambda_i^0, \lambda_j^0, \lambda_k^0) = 1 + \sum_{l,m,n=0}^{\infty} C_{l,m,n}^p (\lambda_j^0 + \lambda_k^0)^l (\lambda_j^0 - \lambda_k^0)^{2n} (\lambda_i^0)^m a^p, \quad (2.73)$$

onde  $C_{l,m,n}^p$  são os coeficientes de ordem  $p$ , com  $p \equiv l + 2n + m$ . Assim, essa equação é invariante pela troca de índices  $j \leftrightarrow k$  e a expressão para  $r_i$  leva à expressão para  $r_j$  pela troca  $i \leftrightarrow j$ . Para simplificar a notação, vamos definir a solução linear

$$\lambda_i := \lambda_i^0 a,$$

de modo que a equação (2.73) fica uma expansão em termos de  $\lambda_i$  apenas. A aproximação de Zel'dovich corresponde a  $r_i = 1$ . Assim, para configurações com simetria plana ( $\lambda_j = \lambda_k = 0$ ) devemos ter  $C_{0,m,0}^p = 0$ , já que a solução de Zel'dovich é exata nesse caso. Os

outros coeficientes da expansão da CZA seriam determinados a partir das equações de Euler (2.2) e Poisson (2.3) através de um esquema recursivo, embora os seus autores não tenham mostrado esse procedimento. Eles apresentam o resultado da expansão até quarta ordem [70]:

$$\begin{aligned}
r_i(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = & 1 + \frac{3}{14}(\lambda_j + \lambda_k) + \frac{18}{245}(\lambda_j + \lambda_k)^2 + \frac{157}{4410}(\lambda_j + \lambda_k)\lambda_i + \frac{3}{245}(\lambda_j - \lambda_k)^2 \\
& + 0.03371(\lambda_j + \lambda_k)^3 + 1.63 \times 10^{-2}(\lambda_j + \lambda_k)^2\lambda_i + 2.75 \times 10^{-2}(\lambda_j + \lambda_k)\lambda_i^2 + 10^{-3}(\lambda_j - \lambda_k)^2\lambda_i \\
& + 1.2 \times 10^{-2}(\lambda_j - \lambda_k)^2(\lambda_j + \lambda_k) + 1.94 \times 10^{-2}(\lambda_j + \lambda_k)^4 + 9.4 \times 10^{-3}(\lambda_j + \lambda_k)^3\lambda_i \\
& + 1.58 \times 10^{-2}(\lambda_j + \lambda_k)^2\lambda_i^2 + 1.3 \times 10^{-2}(\lambda_j + \lambda_k)\lambda_i^3 + 4.3 \times 10^{-3}(\lambda_j - \lambda_k)^4 \\
& + 8.4 \times 10^{-3}(\lambda_j - \lambda_k)^2(\lambda_j + \lambda_k)^2 + 7.2 \times 10^{-4}(\lambda_j - \lambda_k)^2(\lambda_j + \lambda_k)\lambda_i + R(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k).
\end{aligned}$$

Note que a solução de ordem  $n$  para  $r_i$  significa uma solução de ordem  $n + 1$  para  $w_i$ .

Quando os termos de ordens mais altas ficam importantes, todos contribuem mais ou menos da mesma forma. Assim escolheu-se truncar a série até a quarta ordem e aproximar o resto por uma função  $R(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k)$  [70]. Essa função é parametrizada de modo que o resultado esteja em acordo com a dinâmica das simetrias plana esférica e cilíndrica. Para melhor entender a CZA e a motivação para o termo  $R$ , vamos estudar o comportamento de  $r_i$  nessas três simetrias.

Nesses três casos a equação de Raychaudhuri (2.32) é suficiente para obter  $r_i$ . Em termos dessa quantidade, e utilizando a definição (2.72), teremos

$$w_i'' = -\lambda_i^0 \left( 2a^2 \frac{d^2 r_i}{da^2} + 7 \frac{dr_i}{da} a + 3r_i \right) 2a^2,$$

onde usamos o fator de escala  $a$  como variável temporal. Nas três simetrias, temos apenas um  $\lambda_i^0$  independente; como veremos, será útil usarmos como variável a solução linear  $\lambda := \lambda^0 a$ . A grande vantagem é que nesses três casos, podemos transformar a (2.32) numa equação em que aparece apenas  $r$  e  $\lambda$ . As condições iniciais lineares implicam que  $r(a = 0) = 1$ . Assim a solução das equações em termos de  $\lambda$  será a mesma, para qualquer

condição inicial  $\lambda^0$ , sem nenhuma dependência explícita nessa quantidade.

- **Simetria plana**

Nesse caso temos  $r_i = r$ ,  $r_j = r_k = 0$ , e a equação (2.32) fica

$$2\lambda^3 \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + 7 \frac{dr}{d\lambda} \lambda^2 = 0,$$

cuja solução é  $r = A\lambda^{-5/2} + B$ . Como  $r(\lambda = 0) = 1$ , teremos  $A = 0$ ,  $B = 1$ . De modo que  $r(\lambda) = 1$ , como era de se esperar, já que a solução linear é exata no caso da simetria plana.

- **Simetria esférica**

Neste caso temos  $r_i = r_j = r_k = r$ , e a equação (2.32) fica

$$\lambda \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{7}{2} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{r^2}{2} \frac{3 - 2\lambda r}{(1 - \lambda r)^2}. \quad (2.74)$$

Uma solução em série de potências dessa equação pode ser obtida facilmente, usando algum algoritmo básico de equações diferenciais ou um programa de computação algébrica, como o Maple. A solução até quinta ordem, com a condição inicial  $r = 1$ , é

$$r_{\text{esf}} = 1 + \frac{3}{7}\lambda + \frac{23}{64}\lambda^2 + \frac{1894}{4851}\lambda^3 + \frac{3293}{7007}\lambda^4 + \frac{2418092}{3972969}\lambda^5 + \mathcal{O}(\lambda^6). \quad (2.75)$$

Note que esta expressão está em acordo com a expansão (2.73). O coeficiente do primeiro termo é exato ( $3/7$ ), o do segundo termo da (2.73) fica igual a  $23/63$ , diferindo de 1.6% da expansão acima, os demais termos diferem de 0.14% e 1%. Em termos do contraste linear de densidade  $\delta_L := \delta_0 a = 3\lambda$  teremos

$$r_{\text{esf}}^{(5)} = 1 + \frac{1}{7}\delta_L + \frac{23}{567}\delta_L^2 + \frac{1894}{130977}\delta_L^3 + \frac{3293}{567567}\delta_L^4 + \frac{2418092}{965431467}\delta_L^5. \quad (2.76)$$

É importante notar que, para  $\lambda^0 > 0$ , o colapso ocorre para um valor finito de  $\lambda$ , tal que



$\lambda r(\lambda) = 1$ . Como  $r > 1$ , vemos que o colapso ocorre para  $\lambda < 1$ , e portanto a expansão (2.75) pode ser boa até o colapso.

Nós resolvemos numericamente a equação (2.74) com a condição inicial  $r = 1$ , e comparamos com a expansão (2.76). O resultado é mostrado na figura (2-1).

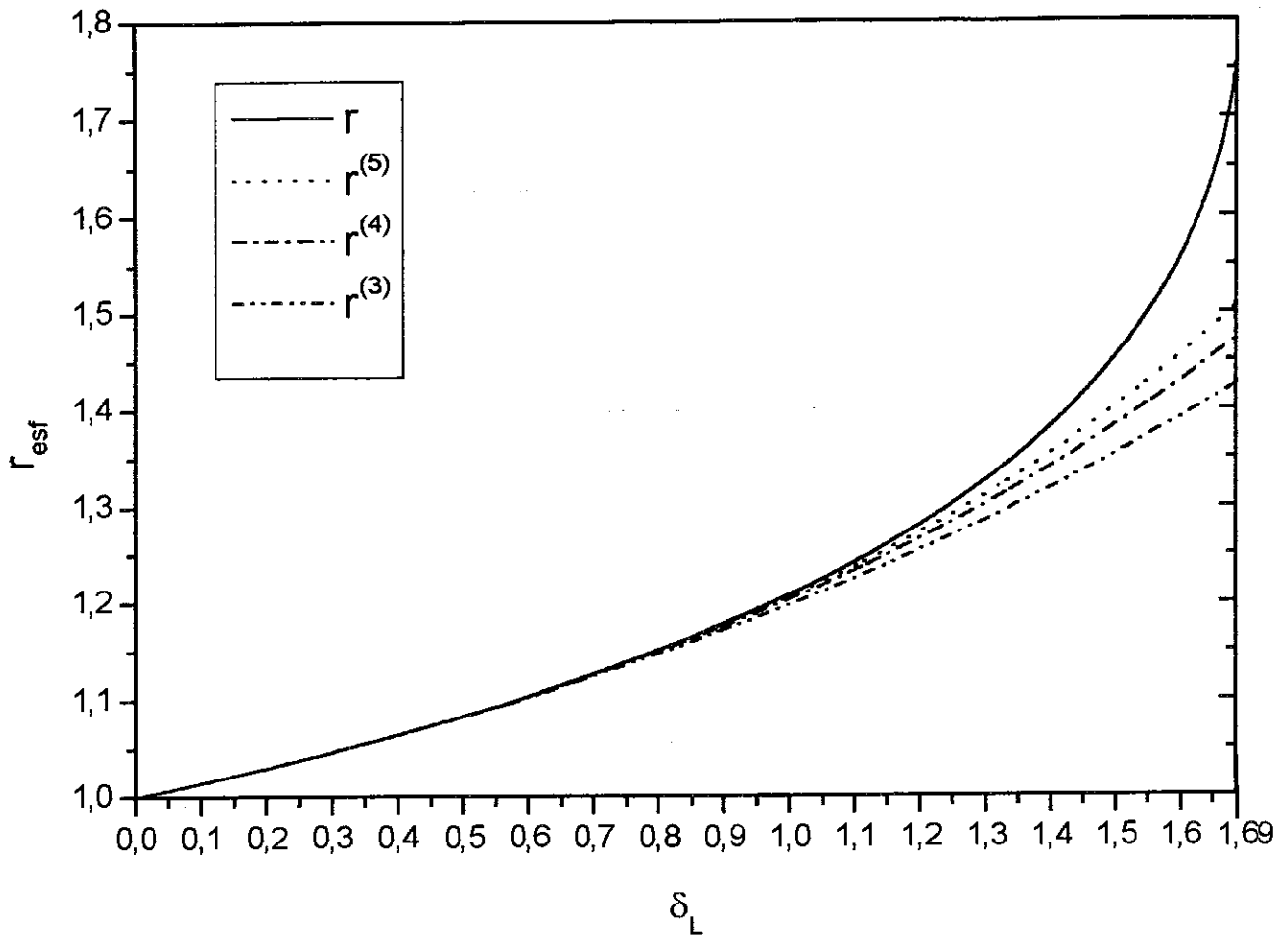


Figura 2-1: Gráfico de  $r$  em função do contraste linear de densidade  $\delta_L$ , para a simetria esférica. O resultado numérico  $r$  (linha contínua) é comparado com as expansões até terceira ordem  $r^{(3)}$  (traço-ponto-ponto), quarta ordem  $r^{(4)}$  (traço-ponto) e quinta ordem  $r^{(5)}$  (pontilhado, eq. 2.76). O colapso ocorre para  $\delta_L = 1.686$  na solução exata.

Próximo do colapso, a diferença entre a série  $r_{\text{esf}}^{(5)}$  e o resultado exato  $r_{\text{esf}}$  aumenta, e não adianta acrescentar muitos termos. Podemos no entanto truncar a série até a quarta ordem e tentar ajustar  $(r_{\text{esf}} - r_{\text{esf}}^{(4)}) / \delta_L^5$  como função de  $\delta_L$  próximo do colapso. Um bom ajuste é dado por

$$R_{\text{esf}} := \left( r_{\text{esf}} - r_{\text{esf}}^{(4)} \right) = \delta_L^5 \frac{3.66 \times 10^{-3} - 1.45 \times 10^{-3} \delta_L}{1 - 0.558 \delta_L}. \quad (2.77)$$

Assim podemos truncar a série até a quarta ordem, acrescentando o termo  $R_{\text{esf}}$ . A expressão para  $R_{\text{esf}}$  no trabalho original da CZA [70] é

$$R_{\text{esf}} = \delta_L^5 \frac{2.58 \times 10^{-3}}{1 - 0.485 \delta_L}, \quad (2.78)$$

mas essa expressão fornece resultados bem piores que o ajuste (2.77), como pode ser visto na figura (2-2).

- **Simetria cilíndrica**

Aqui temos  $r_i = 0$ ,  $r_j = r_k = r$ , e a equação (2.32) fica

$$\lambda \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{7}{2} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{3}{4} r^2 \frac{1}{(1 - \lambda r)}. \quad (2.79)$$

A solução em série de potências até quarta ordem, com a condição inicial  $r = 1$ , é

$$r_{\text{cil}} = 1 + \frac{3}{14} \lambda + \frac{5}{42} \lambda^2 + \frac{103}{1176} \lambda^3 + \frac{379}{5096} \lambda^4 + \frac{1107371}{16052400} \lambda^5 + \mathcal{O}(\lambda^6). \quad (2.80)$$

Vemos que a expansão está em acordo com a expressão (2.73). O coeficiente do primeiro termo novamente é exato, os demais coeficientes diferem de 1.9%, 3.2% e 4.7%. Em função do contraste de densidade linear  $\delta_L = 2\lambda$  teremos

$$r_{\text{cil}}^{(5)} = 1 + \frac{3}{28} \delta_L + \frac{5}{168} \delta_L^2 + \frac{103}{9408} \delta_L^3 + \frac{379}{81536} \delta_L^4 + \frac{1107371}{513676800} \delta_L^5 \quad (2.81)$$

Novamente, poderíamos truncar a série até a quarta ordem e ajustar  $R_{\text{cil}} := \left( r_{\text{cil}} - r_{\text{cil}}^{(4)} \right) / \delta_L^5$  próximo do colapso. No entanto, se utilizamos a expressão para  $R_{\text{esf}}$  obtemos um resultado muito bom (veja fig. 2-3). Além disso, as expressões (2.77) e (2.78) fornecem

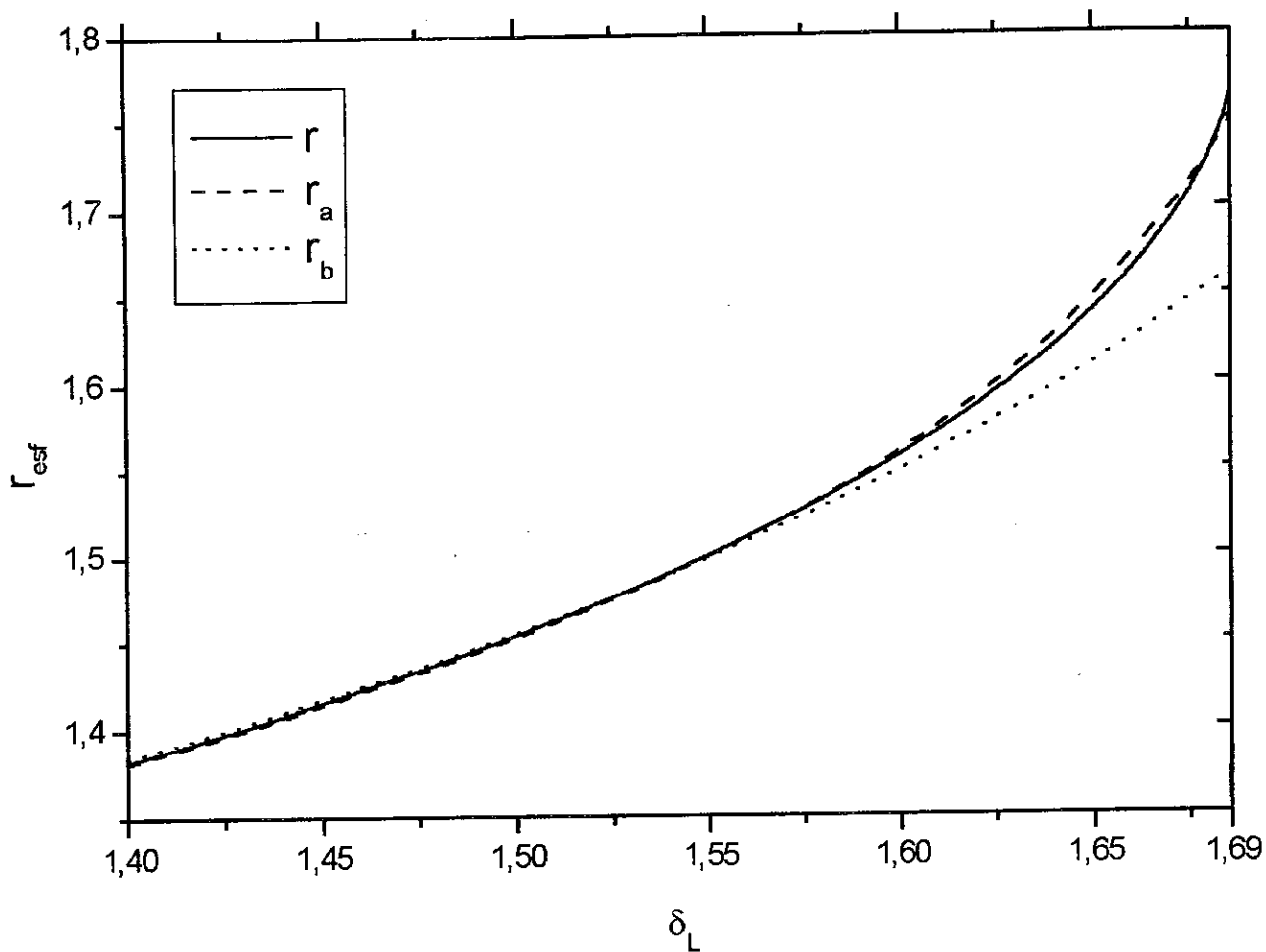


Figura 2-2: Gráfico de  $r_{\text{esf}}$  em função de  $\delta_L$ . O resultado numérico  $r$  (linha contínua) é comparado com  $r^{(4)} + R_{\text{esf}}$ . A curva  $r_a$  (tracejada) é calculada utilizando a equação (2.77), enquanto a  $r_b$  (linha pontilhada) é calculada usando a expressão de  $R_{\text{esf}}$  da referência [70].

um resultado quase idêntico até  $\delta_L = 1.466$ , que é quando ocorre o colapso na simetria cilíndrica.

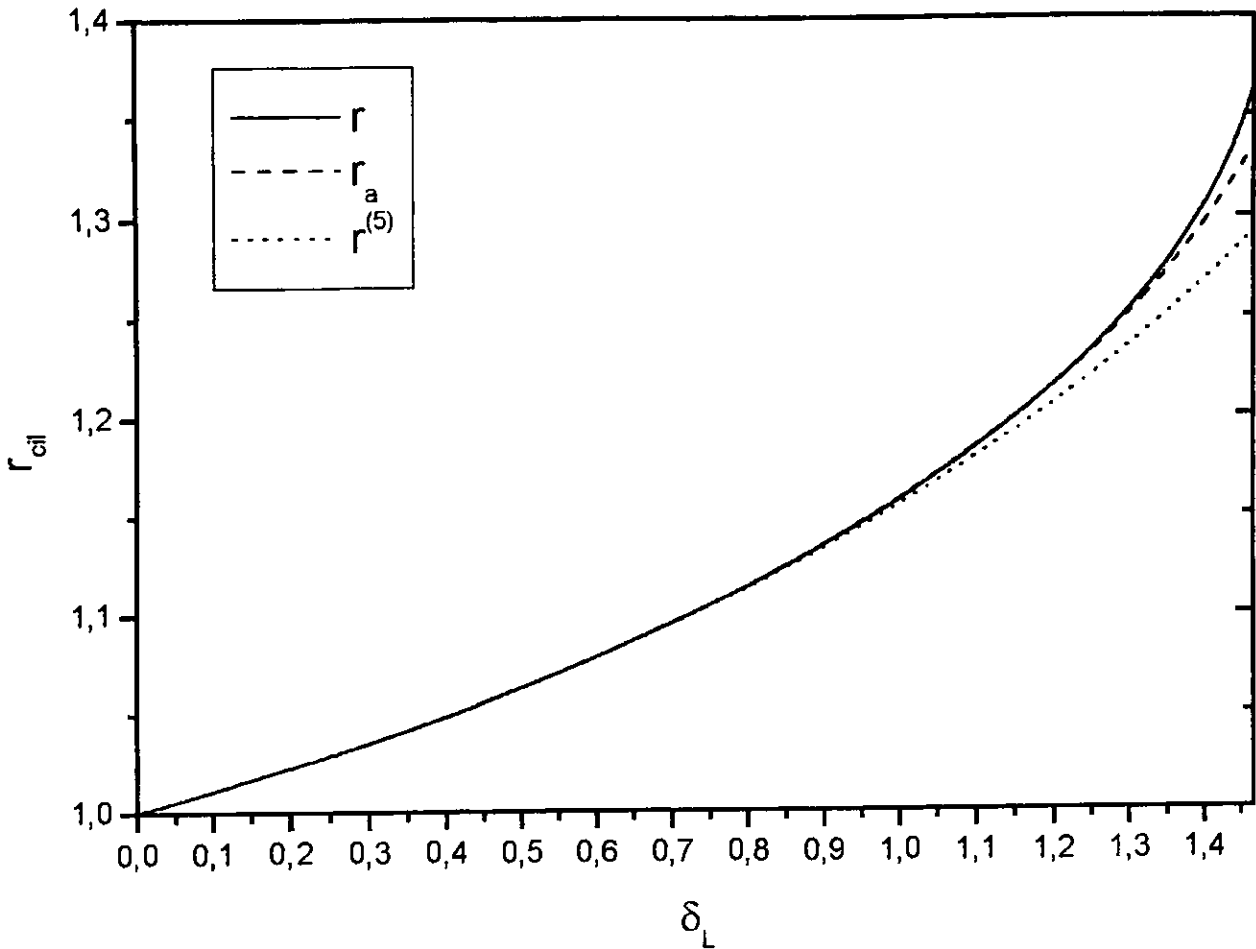


Figura 2-3: Gráfico de  $r$  em função do contraste linear de densidade  $\delta_L$ , para a simetria cilíndrica. O resultado numérico  $r$  (linha contínua) é comparado com a expansão até quinta ordem  $r^{(5)}$  (pontilhado, eq. 2.81) e a soma  $r_a = r^{(4)} + R_{esf}$  (tracejado). O colapso ocorre para  $\delta_L = 1.466$  na solução exata.

A análise dos três casos acima pode motivar uma expressão geral para  $R(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k)$ . Devemos exigir que ela se reduza a  $R_{esf}$  no caso da simetria esférica, que ele se anule para a simetria plana e que forneça um resultado próximo de  $R_{esf}$  na simetria cilíndrica.

Betancort-Rijo e López-Corredoira [70] propuseram a seguinte forma para essa função

$$R(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = \left[ 1 - 9 \left( \lambda_i - \frac{\lambda_j + \lambda_k}{2} \right) \left( 1 - \frac{\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k}{1.3} \right) \right] \times \left( R_{\text{esf}}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k) - R_{\text{esf}}(\lambda_i) + R_{\text{esf}} \left( \frac{\lambda_j + \lambda_k}{2} \right) \right). \quad (2.82)$$

Os seus autores não explicitam como chegar a essa expressão, mas nós verificamos numericamente que ela fornece o resultado exato para o colapso com simetria cilíndrica. Como na simetria esférica essa função se reduz a  $R_{\text{esf}}$ , obtemos resultados melhores com a nossa expressão (2.77). Na seção (3.3.1) veremos que a expressão (2.73) junto com o termo (2.82) fornece excelentes resultados no caso de um elipsóide homogêneo.

Os seus autores sustentam que CZA é exata quando o tensor de deformação não depende da posição. Eles também argumentam essa aproximação é exata em segunda ordem. Na seção 3.4.1 faremos uma comparação das aproximações locais, em particular da CZA, com a teoria de perturbação lagrangiana aplicada a um elipsóide, e mostraremos que isso não é verdade.

Vamos ver que a CZA não pode ser utilizada para perturbações subdensas, pelo menos quando os três  $\lambda_i$  são negativos. Como  $\lambda_i = a\lambda_i^0$ , ele nunca muda de sinal e é sempre uma função crescente de  $a$ . Se há colapso no eixo  $i$ , este ocorre quando  $\lambda_i r_i(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = 1$ . Quando os três autovalores  $\lambda_j^0$  são positivos,  $r_i$  é uma função crescente de  $\lambda_j$ , de modo que o colapso acontece para  $\lambda_i < 1$ . Como o colapso ocorre no eixo com maior valor de  $\lambda_j$  isso significa que todos os  $\lambda_j$  serão menores do que um, de modo que a expansão (2.73) sempre pode ser usada.

Já se os três autovalores  $\lambda_j^0$  são negativos, não há colapso, e os  $\lambda_i$  podem crescer indefinidamente. Nesse caso, a expansão (2.73) deixa de valer. Se pelo menos um  $\lambda_i^0$  for maior que zero, a aplicabilidade da (2.73) dependerá do tempo em que ocorre o colapso no maior  $\lambda_i^0$ . Para  $\lambda_i^0$  suficientemente grande, o colapso ocorre antes dos  $\lambda_j$  crescerem substancialmente e a CZA ainda pode ser aplicada. Assim, a CZA pode ser utilizada nas regiões sobredensas, mesmo quando um ou dois autovalores são negativos. Isto porque é possível mostrar que o colapso sempre ocorre para  $\delta_L < 1.686$  (veja seção 3.3.2), de

modo que a expansão (2.73) pode ser sempre utilizada. Já nas regiões subdensas, a aplicabilidade vai depender dos valores de  $\lambda_i^0$ .

Uma possível solução para estender a CZA para quaisquer condições iniciais poderia ser alcançada através de uma expansão do tipo

$$r_i = \frac{1 + \sum_{l,m,n=0}^N E_{l,m,n}^p (\lambda_j + \lambda_k)^l (\lambda_j - \lambda_k)^{2n} \lambda_i^m}{1 + \sum_{l,m,n=0}^M D_{l,m,n}^p (\lambda_j + \lambda_k)^l (\lambda_j - \lambda_k)^{2n} \lambda_i^m}. \quad (2.83)$$

Para estar em acordo com a solução perturbativa (2.73) devemos ter

$$E_{l,m,n}^1 - D_{l,m,n}^1 = C_{l,m,n}^1. \quad (2.84)$$

Para ordens mais altas, a determinação desses coeficientes é bem mais complicada.

Os coeficientes  $E$  e  $D$  devem ser escolhidos de forma a ajustar o comportamento assintótico. Novamente, poderíamos utilizar o comportamento nas simetrias esférica e cilíndrica para limitar esses coeficientes. Para obter a solução com  $\delta_0$  negativo nessas simetrias, basta resolver as equações (2.74) e (2.79) para  $\lambda < 0$ . Os resultados numéricos mostram que  $r$  diminui com o tempo, mas continua sempre positivo (figuras 2-4 e 2-5). Se utilizássemos as expansões (2.75) e (2.80) o termo de ordem mais alta acabaria sempre por dominar. Se truncamos a série num termo de ordem ímpar,  $r$  muda de sinal e a perturbação acaba colapsando, o que está em contradição com a solução numérica. Se truncamos num termo de ordem par,  $r$  aumenta rapidamente e a expansão ocorre mais rápido do que a solução exata. O termo que mais se aproxima da solução correta é o de ordem zero, que corresponde à solução de Zel'dovich. Um resultado semelhante foi obtido por Sahni e Shandarin [108]. Eles mostraram que na teoria de perturbação lagrangiana (TPL), a melhor solução nos *voids* era a solução de Zel'dovich. Os termos ímpares da TPL induzem uma mudança de sinal, de modo que o colapso acaba ocorrendo, e os pares induzem uma expansão demasiadamente acelerada.

É possível obter analiticamente o comportamento assintótico de  $r$ . Se a expansão ocorre indefinidamente, os autovalores do tensor de deformação  $\lambda_i r_i$  crescem sem limites.

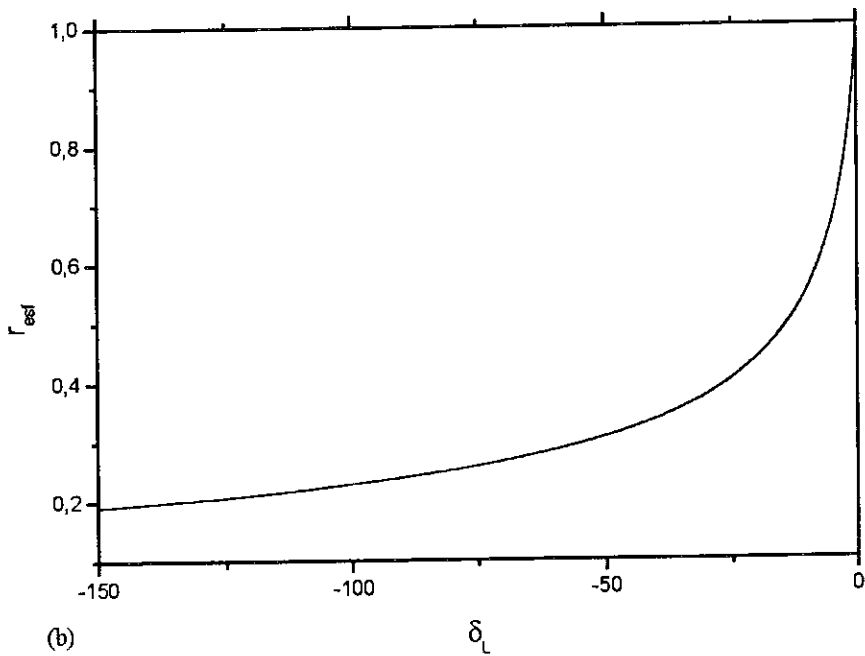
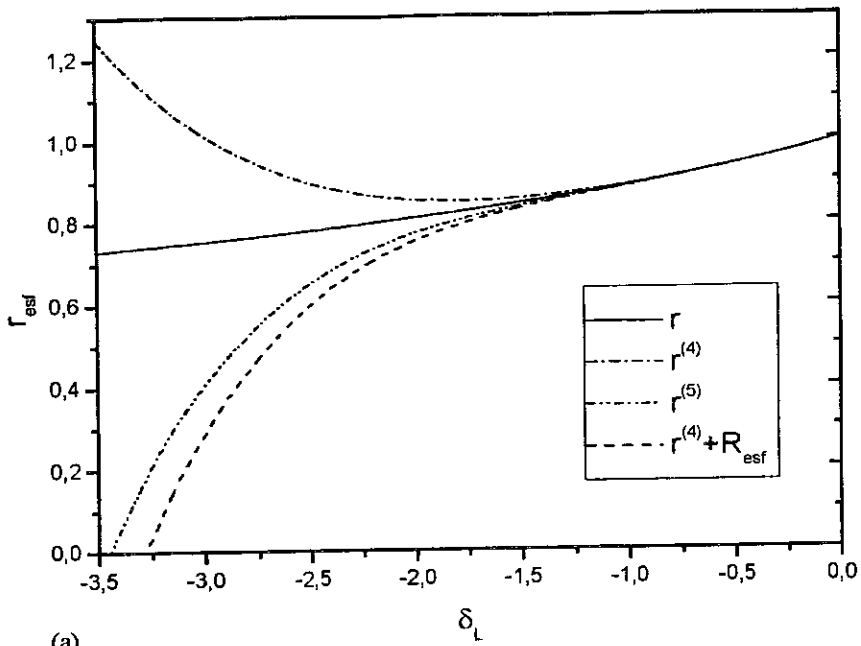


Figura 2-4: (a) Gráfico de  $r_{\text{esf}}$  (linha contínua, eq. 2.74) em função de  $\delta_L$ , para contrastes de densidade negativos. Nesta figura mostramos também as expansões até a quarta ordem  $r^{(4)}$  (traço-ponto), quinta ordem  $r^{(5)}$  (traço-ponto-ponto, eq. 2.76) e  $r^{(4)} + R_{\text{esf}}$  (tracejado). (b) O mesmo que em (a), mas para valores bem mais negativos de  $\delta_L$ . Vemos que  $r$  decresce lentamente, sem nunca se anular. Não mostramos as séries de potência nesta figura porque  $r$  seria desprezível comparado com elas.

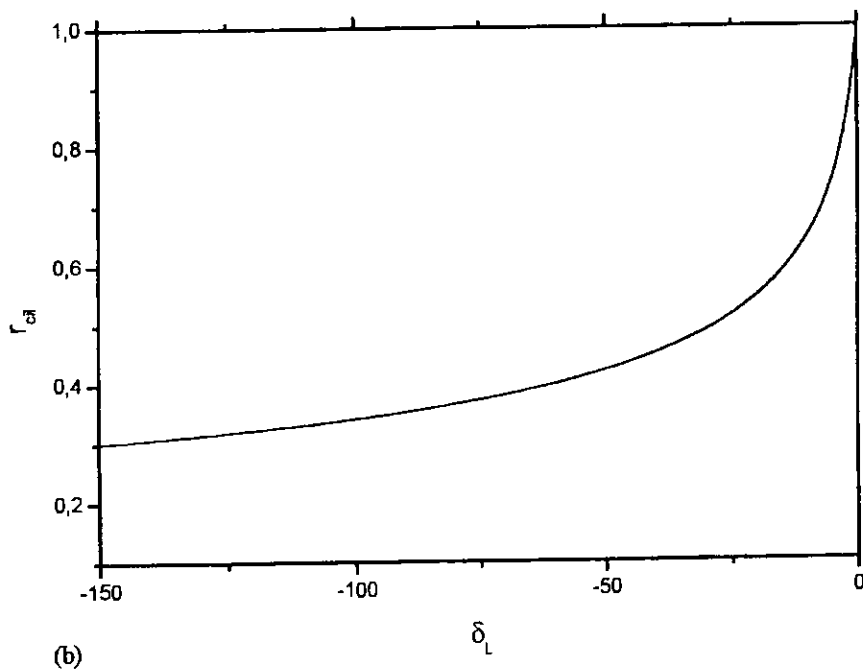
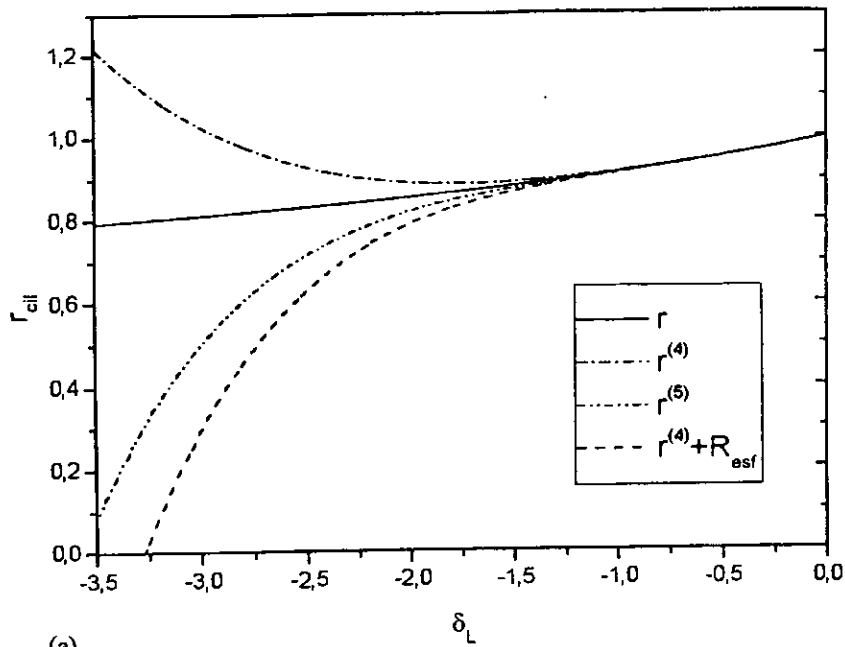


Figura 2-5: (a) O mesmo que na figura 2-4, mas desta vem com simetria cilíndrica. A solução da equação (2.79)  $r_{cil}$  (linha contínua) é mostrada para diferentes valores do contraste de densidade. Mostramos também as expansões até a quarta ordem  $r^{(4)}$  (traço-ponto), quinta ordem  $r^{(5)}$  (traço-ponto-ponto) e  $r^{(4)} + R_{esf}$  (eqs. 2.81 e 2.77, tracejado). (b) O mesmo que em (a), mas para valores muito negativos de  $\delta_L$ . Vemos que  $r$  decresce lentamente, sem nunca se anular. O comportamento na simetria esférica é muito semelhante ao da simetria cilíndrica.



A solução da equação (2.74) para  $\lambda r \gg 1$  é dada por<sup>11</sup>  $r \propto a^{-1/2}$  ou  $r \propto a^{-2}$ . Como por hipótese  $\lambda r \propto ar$  tem que aumentar com o fator de escala, devemos escolher a primeira solução. Nesse caso, o contraste de densidade será dado por (eq. 2.28)

$$\delta + 1 \rightarrow (\lambda r)^{-3} \propto a^{-3/2}, \quad \text{quando} \quad a \rightarrow \infty \quad (2.85)$$

que é um resultado conhecido para o comportamento assintótico de *voids* esféricos. Na verdade essa solução deve aplicar-se a condições bem mais gerais do que a simetria esférica. Da equação da MZA (eq. 2.3.1), vemos que o comportamento de  $D$ , para  $D \gg 1$  não depende de  $\lambda_i$  quando  $\eta_3 \neq 0$ . Se resolvemos a equação (2.3.1) nesse limite, em EdS, obteremos o resultado (2.85), lembrando que  $D = ar$ . É natural que a evolução de uma região que se expanda em todas as direções ( $\lambda_i^0 < 0$ ) seja a mesma. Num *void* genérico, se as forças de maré geradas pelos objetos colapsados próximos da borda são desprezadas, as partículas deveriam manter as suas velocidades, no limite em que a densidade no *void* é muito baixa. Assim, a evolução não deve depender da forma do *void*. Os  $w_i$  do tensor de deformação devem ser multiplicados pelo mesmo fator, que é a suposição da CZA.

Se a expansão não ocorre em todas as direções, ou seja se algum  $\lambda_j^0$  é nulo, a evolução não terá a mesma forma. No caso da simetria plana, teremos  $r = 1$  sempre. Para a simetria cilíndrica, podemos resolver a (2.79) no limite  $\lambda r \gg 1$ . O resultado é  $r \propto a^{(-5 \pm \sqrt{13})/4}$ . Pelo mesmo argumento do caso esférico, devemos escolher a solução da raiz positiva, de modo que  $r \propto a^{-0.35}$ . O contraste de densidade fica  $1 + \delta \propto a^{-1.95}$ .

Podemos utilizar o comportamento assintótico de  $r$  no caso genérico e nas simetrias plana e cilíndrica para ajudar a determinar os coeficientes da expansão (2.83) para  $\lambda_i^0 < 0$ , ou para determinar a correção à série truncada até uma dada ordem.

Dada a vantagem da CZA para aplicações numéricas, e dado que ela fornece resultados tão bons quanto as outras aproximações locais (como veremos nas próximas seções), é importante procurar generalizações que possam lidar com perturbações sobre e subdensas.

---

<sup>11</sup>Note que, nesse caso, a equação em termos de  $\lambda = \lambda^0 a$ , passa a depender apenas de  $a$ . De modo que podemos escrever  $r = r(a)$ .

Mais investigações sobre essa possibilidade serão desenvolvidas no futuro.

### 2.3.4 Aproximações do Campo de Maré

Uma dificuldade prática no estudo da formação de estruturas na cosmologia newtoniana, está na necessidade de resolver a equação de Poisson para obter o campo gravitacional  $\phi$ . Na relatividade geral, em vez da equação de Poisson, temos equações de evolução e equações de vínculo, para determinar os campos gravitacionais (veja a seção A.2). Como a abordagem relativística é conceitualmente diferente da newtoniana, essa diferença na construção formal pode levar a novos métodos de aproximação. Um exemplo é uma classe de aproximações baseada no formalismo de projeção da relatividade geral. Uma das motivações para essas aproximações é que as equações de evolução dos parâmetros cinemáticos na relatividade geral são muito similares aos seus análogos newtonianos<sup>12</sup>.

#### Equações de evolução para os parâmetros cinemáticos

Para entender as aproximações do campo de maré é útil escrever as equações de evolução para os parâmetros cinemáticos (2.10). Elas podem ser obtidas partindo das equações de fluido em coordenadas co-móveis (2.1) a (2.3).

Derivando a equação de Euler (2.2), com  $p_{,i} = 0$ , obtemos<sup>13</sup>:

$$\frac{dv_{i,j}}{d\tau} + v_{i,k}v^k_{,j} + \frac{\dot{a}}{a}v_{i,j} = -\phi_{,i,j}. \quad (2.86)$$

Tomando o traço dessa equação e usando a equação de Poisson (2.3) e a decomposição (2.10), obtemos a equação de Raychaudhuri<sup>14</sup>

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a}\theta + \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma^{ij}\sigma_{ij} - 2\omega^2 = -4\pi G a^2 \bar{\rho}\delta, \quad (2.87)$$

<sup>12</sup>Essa similaridade é discutida no apêndice 1, nas seções A.1 a A.3.

<sup>13</sup>Lembrando que  $dv_i/d\tau = \partial v_i/\partial\tau + v^k\partial v_i/\partial x^k$ .

<sup>14</sup>Esta é a forma mais conhecida de equação de Raychudhuri. Ela pode ser obtida a partir da expressão (2.17) utilizando a equação (2.13).

onde  $\omega^2 \equiv \omega^i \omega_i$ . Calculando as partes anti-simétricas e simétricas sem traço da equação de Euler (2.86) e usando a eq. (2.10), obtemos respectivamente

$$\frac{d\omega^i}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} \omega^i + \frac{2}{3} \theta \omega^i - \sigma^i_j \omega^j = 0 \quad (2.88)$$

e

$$\frac{d\sigma_{ij}}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} \sigma_{ij} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{ij} + \sigma_{ik} \sigma^k_j + \omega_i \omega_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} (2\sigma^2 + \omega^2) = -E_{ij} , \quad (2.89)$$

onde  $E_{ij} \equiv \phi_{,i,j} - (1/3) \delta_{ij} \nabla^2 \phi$  é o campo de maré.

As equações (2.87) a (2.89), junto com a equação de continuidade (2.11)

$$\dot{\delta} = (1 + \delta) \theta, \quad (2.90)$$

formam uma hierarquia de equações lagrangianas de fluido. É um conjunto incompleto pois não especificamos uma forma de calcular  $E_{ij}$ . Na teoria newtoniana ele é obtido através do potencial gravitacional  $\phi$  que é a solução da equação de Poisson. Na relatividade geral há uma equação de evolução para o análogo dessa quantidade. Esse fato motivou novas aproximações, que estudaremos mais à diante.

A aproximação de Zel'dovich (seção 2.2.1) consiste em utilizar a relação entre  $\vec{v}$  e  $\vec{\nabla}\phi$  do regime linear (1.50). Dessa forma, o tensor de maré gravitacional é obtido a partir do cisalhamento:

$$E_{ij} = -\frac{4\pi G a \bar{\rho}}{H f} \sigma_{ij} \quad (2.91)$$

e a flutuação de densidade é dada pelo escalar de expansão:

$$\delta = -\frac{1}{a f H} \theta .$$

Usando esses resultados nas (2.89) e (2.87), vemos que a ZA é equivalente a resolver as

equações locais

$$\frac{d\sigma_{ij}}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} \sigma_{ij} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{ij} + \sigma_{ik} \sigma^k_j + \omega_i \omega_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} (2\sigma^2 + \omega^2) = \frac{4\pi G a \bar{\rho}}{H f} \sigma_{ij} , \quad (2.92)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} \theta + \frac{1}{3} \theta^2 + 2 (\sigma^2 - \omega^2) = \frac{4\pi G a \bar{\rho}}{H f} \theta . \quad (2.93)$$

Junto com as equações (2.90) e (2.88), temos um conjunto fechado de equações locais. Como utilizamos a condição inicial de escoamento irrotacional, teremos  $\omega_{ij} = 0$  para qualquer tempo antes da interseção das trajetórias (o que pode ser visto da eq. 2.88). A equação (2.92) também pode ser escrita como uma equação de evolução para  $E_{ij}$ , utilizando a (2.91) [82]. Assim, mostramos que a ZA é uma aproximação local que consiste em aproximar o termo de fonte gravitacional na equação de Raychaudhuri e fazer  $E_{ij}$  proporcional a  $\sigma_{ij}$  (o que elimina a necessidade da equação de evolução para  $E_{ij}$ ).

Seria natural investigar a possibilidade de melhorar a aproximação de Zel'dovich, usando a equação de Raychaudhuri exata e alguma equação de evolução para  $E_{ij}$ .

Há um argumento simples pelo qual esperaríamos poder melhorar a ZA. É sabido que a ZA fornece resultados incorretos para o colapso esférico. A aproximação de Zel'dovich superestima o tempo de colapso para uma configuração com simetria esférica. Isto ocorre porque a ZA não obedece à equação de Poisson, de modo que o lado direito da (2.93) não é exato. Podemos pelo menos corrigir esse termo, utilizando a equação (2.87) no lugar da (2.93), e a (2.92) para a evolução do cisalhamento. Essa aproximação foi testada na referência [72] e encontrou-se que não é boa, exceto para o caso esfericamente simétrico (para o qual  $\sigma_{ij} = 0$  e  $E_{ij} = 0$ ). Precisamos portanto de aproximações melhores, baseadas num tratamento mais adequado do tensor de maré.

## Transformação dos parâmetros cinemáticos para coordenadas co-móveis

Vamos mostrar a relação entre os parâmetros cinemáticos nas coordenadas  $r_i$  e essas quantidades nas coordenadas co-móveis  $x_i$ . Essas transformações serão úteis para obter uma equação para  $E_{ij}$  a partir das equações relativísticas.

Utilizando a equação (1.4) o gradiente da velocidade fica

$$\frac{1}{a} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial r_j} - H \delta_{ij},$$

onde  $v_i$  é a velocidade em coordenadas co-móveis (velocidade peculiar), e  $\tilde{v}_i$  é a velocidade nas coordenadas  $r_i$ . Utilizando a expressão acima, os parâmetros cinemáticos em coordenadas co-móveis serão dados por:

$$\theta : = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = a\tilde{\theta} - 3\frac{\dot{a}}{a} \quad (2.94)$$

$$\sigma_{ij} : = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} = a\tilde{\sigma}_{ij} \quad (2.95)$$

$$\omega_i : = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = a\tilde{\omega}_i \quad (2.96)$$

onde  $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}$  e  $\tilde{\omega}_i$  são os parâmetros cinemáticos nas coordenadas  $r_i$  e  $t$ .

Para evitar a divergência do campo gravitacional causada por uma distribuição uniforme de matéria, utilizamos o campo peculiar  $g_i = -\phi_{,i}$ . Esse campo peculiar é dado pelo campo gravitacional  $\tilde{g}_i = -\tilde{\phi}_{,i}$  menos a parte correspondente a um universo homogêneo de densidade  $\bar{\rho}$  (que pelo teorema de Gauss dá  $(4\pi/3)G\bar{\rho}r_i$ ):

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r_i} = \frac{4\pi G}{3} \bar{\rho} a x_i + \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial x_i},$$

Assim o laplaciano de  $\phi$  fica:  $\nabla_r^2 \tilde{\phi} = (4\pi G/3)\bar{\rho} + a^{-2} \nabla_x^2 \phi$ . Utilizando a expressão acima, o tensor de maré fica

$$\tilde{E}_{ij} := \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial r_i \partial r_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla_\tau^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{4\pi G}{3} \bar{\rho} \delta_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \left( 4\pi G \bar{\rho} + \frac{1}{a^2} \nabla_x^2 \phi \right) = \frac{1}{a^2} E_{ij}, \quad (2.97)$$

onde  $\tilde{E}_{ij}$  é o tensor de maré nas coordenadas  $r_i$  e  $E_{ij}$  é o tensor de maré em coordenadas co-móveis.

Poderíamos ter utilizado essas expressões para deduzir as equações (2.87) a (2.90), a partir dos resultados da seção A.1.

### Relatividade geral e teoria newtoniana

No caso newtoniano, o potencial gravitacional é determinado por uma equação de vínculo, a equação de Poisson. Já na relatividade geral temos equações de evolução para o campo gravitacional, especificado pelas partes elétrica  $E_{\mu\nu}$  e magnética  $H_{\mu\nu}$  do tensor de Weyl<sup>15</sup> (seção A.2). O limite newtoniano da parte elétrica  $E_{\mu\nu}$  no referencial do fluido, corresponde ao campo de maré  $E_{ij}$ . Poderíamos então pegar as equações relativísticas para  $H_{\mu\nu}$  e  $E_{\mu\nu}$  e ver se podemos desenvolver novas aproximações baseadas nessas equações. Para fechar o conjunto de equações (2.87) a (2.90) precisamos primeiramente de uma equação para  $E_{ij}$ . A equação de evolução para  $E_{\mu\nu}$  é dada na seção A.2.1. Escrita no referencial co-móvel ( $u^\alpha = (1/\sqrt{g_{00}}, 0, 0, 0)$ ), para um fluido irrotacional com  $P = 0$  e velocidades não relativísticas essa equação fica (eq. A.60):

$$\frac{dE_{ij}}{d\tau} - (\text{rot } H)_{ij} + \frac{\dot{a}}{a} E_{ij} + \theta E_{ij} + \delta_{ij} \sigma^{kl} E_{kl} - 3E_i^k \sigma_{jk} = -4\pi G a^2 \rho \sigma_{ij}, \quad (2.98)$$

onde utilizamos as equações (2.94) a (2.97) para transformar os parâmetros cinemáticos para coordenadas co-móveis.

Ainda não temos um conjunto completo, pois precisamos da equação de evolução

---

<sup>15</sup>Há também equações de vínculo que devem ser obedecidas mas, uma vez que os vínculos são inicialmente satisfeitos, eles são preservados subseqüentemente ao longo da evolução. Dessa forma, se as condições iniciais são dadas de forma consistente, pode-se utilizar apenas as equações de evolução.

para parte magnética  $H_{ij}$ . No entanto, o termo com  $H_{ij}$  na equação acima, envolve derivadas espaciais. Assim, se queremos ter uma equação local devemos encontrar alguma aproximação para  $(rot H)_{ij}$ , ou desprezar esse ou mais termos, de modo a eliminar a nossa necessidade de determiná-lo.

A primeira tentativa seria desprezar  $H_{ij}$  já que ele não tem análogo newtoniano. Essa aproximação foi introduzida por Bertschinger e Jain [71] e é chamada de *aproximação não magnética* (NMA). Nesse caso resolvemos as equações (2.87) a (2.90) com

$$\frac{dE_{ij}}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a}E_{ij} = -4\pi G a^2 \bar{\rho} (1 + \delta) \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma^{kl} E_{kl} + 3E_i^k \sigma_{jk} - \theta E_{ij}. \quad (2.99)$$

Embora forneça o resultado linear correto e seja exata nas simetrias plana e esférica, a NMA não é boa no caso geral. Ela prediz que a maioria dos elementos de fluido deveria colapsar numa forma alongada [72], o que não é correto (veja a seção 3.1). Além disso ela não é boa quando aplicada a um elipsóide homogêneo [72].

Uma outra motivação para fazer  $H_{ij} = 0$  veio justamente do fato de que as equações relativísticas com essa condição são locais. Na verdade essa aproximação foi introduzida primeiramente no contexto relativístico (veja a seção A.2.3) e apenas depois foi aplicado às cosmologia newtoniana.

Uma dedução mais rigorosa da equação para  $E_{ij}$  no limite newtoniano da relatividade geral mostra que  $H_{ij}$  não é desprezível (veja discussão na seção A.5 e a ref. [219]). Uma aproximação melhor consiste em descartar mais termos na equação (2.98) para obter

$$\frac{dE_{ij}}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a}E_{ij} = -4\pi G a^2 \bar{\rho} (1 + \delta) \sigma_{ij}. \quad (2.100)$$

Essa equação define a *aproximação de maré local* (LTA, ref. [72]). Ela é exata sempre que a orientação e a razão entre os eixos das equipotenciais da velocidade e do campo gravitacional forem iguais e constantes, para o elemento de volume em consideração, ou seja, sempre que  $\phi_{,i,j}/\nabla^2\phi = v_{j,i}/\theta = const.$  [72]. Em particular, isso é válido para as simetrias plana, esférica e cilíndrica.

## Diagonalização da LTA e NMA

Sendo simétricos por construção,  $\sigma_{ij}$  e  $E_{ij}$  podem ser sempre diagonalizados. Além disso, no regime linear esses dois tensores são proporcionais (eq. 2.91), de modo que a base em que os dois são diagonais é a mesma. Assim, começando com condições iniciais lineares, na base em que  $\sigma_{ij}$  é diagonal, vemos das equações (2.89) e (2.99) ou (2.100) que não são gerados termos fora da diagonal ao longo da evolução de acordo com a NMA e LTA. Dessa forma, os autovetores de  $\sigma_{ij}$  e  $E_{ij}$  são sempre os mesmos nessas aproximações.

Com esse resultado, cada uma das equações tensoriais (2.89) e (2.100) ou (2.99) pode ser reduzida à equação de movimento para dois dos autovalores desses tensores (já que a soma dos autovalores se anula pois essas matrizes tem traço nulo). É conveniente escrever os tensores na forma [71]:

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{3}\sigma Q_{ij}(\alpha), \quad E_{ij} = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}a^2\varepsilon(1+\delta)Q_{ij}(\beta), \quad (2.101)$$

onde  $\sigma \leq 0$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , e  $Q_{ij}(\alpha)$  são os elementos da matriz quadrupolar sem traço

$$Q_{ij}(\alpha) = \text{diag} \left[ \cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\alpha-2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right]. \quad (2.102)$$

A representação em termos dessa matriz é conveniente porque todos os autovalores possíveis são varridos por  $qQ_{ij}(\alpha)$ , com  $q \in [0, \infty)$  e  $\alpha \in [0, \pi]$ . Embora  $Q_{ij}$  tenha período  $6\pi$ ,  $Q_{ij}(\alpha \pm 2\pi)$  e  $Q_{ij}(-\alpha)$  diferem de  $Q_{ij}(\alpha)$  somente por uma permutação das coordenadas. A redução do intervalo angular por um fator 6 equivale a ordenar os autovalores de modo que  $Q_{11} \leq Q_{22} \leq Q_{33}$ . Dois autovalores são negativos para  $\alpha \in [0, \pi/2)$ , enquanto dois são positivos para  $\alpha \in (\pi/2, \pi]$ . Vamos mostrar algumas relações envolvendo a matriz  $Q_{ij}$  que serão úteis para deduzir as equações da LTA e NMA nas novas variáveis. Primeiramente, notemos que

$$\cos\left(\frac{\alpha \pm 2\pi}{3}\right) = \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right),$$



de forma que a soma dos autovalores se anula, como deveria ser. O quadrado e o determinante de  $Q_{ij}$  são:

$$Q_{ij}(\alpha) Q^{ji}(\alpha) = \frac{3}{2}, \quad \det [Q_{ij}(\alpha)] = \frac{1}{4} \cos \alpha.$$

O produto e a diferencial de  $Q_{ij}$  são dados por

$$\begin{aligned} dQ_{ij}(\alpha) &= \frac{1}{3} Q_{ij} \left( \alpha + \frac{3\pi}{2} \right) d\alpha, \\ Q_{ik}(\alpha) Q_j^k(\beta) &= \frac{1}{2} \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{3} \right) \delta_{ij} + \frac{1}{2} Q_{ij}(-\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Utilizando essas relações, podemos substituir as definições (2.101) nas equações (2.87), (2.89) e (2.100) ou (2.99), para obter as seguintes equações de movimento nas novas variáveis:

$$\dot{\delta} = -(1 + \delta) \theta, \quad (2.103)$$

$$\dot{\theta} + \frac{\dot{a}}{a} \theta + \frac{1}{3} \theta^2 + \frac{2}{3} \sigma^2 = -4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta, \quad (2.104)$$

$$\dot{\sigma} + \frac{\dot{a}}{a} \sigma + \frac{1}{3} \sigma (2\theta + \sigma \cos \alpha) = -4\pi G \bar{\rho} a^2 \varepsilon (1 + \delta) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{3} \right), \quad (2.105)$$

$$\dot{\alpha} - \sigma \sin \alpha = 12\pi G \bar{\rho} a^2 \frac{\varepsilon (1 + \delta)}{\sigma} \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{3} \right). \quad (2.106)$$

No caso da NMA, a (2.99) leva a

$$\dot{\varepsilon} - \sigma \varepsilon \cos \left( \frac{\alpha + 2\beta}{3} \right) = -\sigma \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{3} \right), \quad (2.107)$$

$$\dot{\beta} + 3\sigma \sin \left( \frac{\alpha + 2\beta}{3} \right) = -\frac{3\sigma}{\varepsilon} \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{3} \right). \quad (2.108)$$

Já para a LTA, a equação (2.100) fica

$$\dot{\epsilon} - \theta\epsilon = -\sigma \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right), \quad (2.109)$$

$$\dot{\beta} = -\frac{3\sigma}{\epsilon} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right). \quad (2.110)$$

Agora vamos utilizar o resultado de que a diagonalização  $\sigma_{ij}$  é mantida, para mostrar que  $J_{ij}$  também é diagonal nessas aproximações. No regime linear temos<sup>16</sup> (seção 2.2)  $J_{ij} \simeq \delta_{ij} + \delta_+(\tau)\Psi_{i,j}^0$ , e  $v_{i,j} \simeq \dot{\delta}_+\Psi_{i,j}^0$  (eq. 2.26). Se  $v_{i,j}$  é simétrico (ou seja, se o escoamento é irrotacional) ele pode ser diagonalizado. Vemos dessas expressões, que a base que diagonaliza  $v_{i,j}$  é a mesma que diagonaliza  $J_{ij}$ . Será que essa propriedade se mantém no regime não-linear, ou seja, será que se  $v_{i,j}$  continua diagonal na mesma base,  $J_{ij}$  também continuará?

Podemos escrever o gradiente de  $v_i$  em termos de  $J_{ij}$  utilizando a relação (2.13). Dessa equação temos que

$$\dot{J}_{ij} = v_{i,k} J^k_j. \quad (2.111)$$

Se inicialmente  $J_{ij}$  e  $v_{i,j}$  são diagonais, vemos pela equação (2.111) que não haverá termos não diagonais em  $J_{ij}$ . Se  $v_{i,j}$  permanece sempre diagonal, o tensor de deformação continuará diagonal, em qualquer ordem. Esse é o caso da NMA e LTA, já que o gradiente de velocidade  $v_{i,j} = \theta \delta_{ij}/3 + \sigma_{ij}$  (eq. 2.10) é diagonal se  $\sigma_{ij}$  também é. Vemos portanto que a hipótese de partida das outras aproximações locais ( $J_{ij}$  diagonal) aparece como uma consequência da manutenção dos autovetores de  $\sigma_{ij}$  nas aproximações do campo de maré.

Na aproximação de Zel'dovich tínhamos  $E_{ij} \propto v_{i,j}$ , e era mantida a mesma proporcionalidade que no regime linear. Já no caso da MZA, a constante de proporcionalidade passou a ser uma função da configuração. Aqui essa condição é relaxada um pouco mais,

---

<sup>16</sup>Note que, para  $a \ll 1$ , temos  $\Psi_{ij}^0 \simeq \Psi_{i,j}^0$ .

já que  $E_{ij}$  e  $v_{ij}$  não são necessariamente proporcionais, apesar de seus autovetores serem iguais. O mesmo ocorre na DTA e na CZA.

A seguir nós investigaremos o conjunto de equações (2.103) a (2.110) no regime quase linear e o comportamento assintótico próximo do colapso. Entretanto não conhecemos nenhuma solução exata da LTA ou NMA fora das simetrias esférica, plana e cilíndrica. Poderíamos procurar uma solução para  $\alpha_0 = 0$  ou  $\alpha_0 = \pi$ . Nesse caso, as equações (2.106) e (2.108), ou (2.106) e (2.110) levam a  $\alpha(\tau) = \beta(\tau) = 0$ , ou  $\alpha(\tau) = \beta(\tau) = \pi$ , respectivamente. Assim reduzimos o sistema a quatro equações acopladas, o que pode auxiliar na procura de uma solução analítica. Essas condições são ainda bastante mais gerais do que as simetrias plana ( $\alpha_0 = 0$ ,  $\delta_0 = \varepsilon_0$ ) e cilíndrica ( $\alpha_0 = \pi$ ,  $\delta_0 = \varepsilon_0/2$ ).

### Solução linear

Para flutuações de um universo homogêneo, todas as quantidades perturbadas  $\delta$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  e  $\varepsilon$ , são inicialmente pequenas. Vamos agora obter a solução linear das equações (2.103) a (2.106); com as (2.107) e (2.108), no caso da NMA; ou com as (2.109) e (2.110), para a LTA. A equação (2.103) leva a  $\dot{\delta}^{(1)} = -\theta^{(1)}$ . Substituindo este resultado na equação (2.104) linearizada obtemos, num universo de Einstein-de Sitter,

$$\ddot{\delta}^{(1)} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}^{(1)} = \frac{6}{a}\delta^{(1)}.$$

As soluções dessa equação são  $\delta^{(1)} \propto \tau^2$  ou  $\delta^{(1)} \propto \tau^{-3}$ , que são os modos crescentes e decrescentes discutidos na seção (1.3.2). Vamos considerar aqui apenas os modos crescentes. Dessa forma teremos

$$\delta^{(1)} = a\delta_0, \quad \theta^{(1)} = -\dot{\delta}^{(1)} = -\dot{a}\delta_0. \quad (2.112)$$

Note que as perturbações  $\delta$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  e  $\varepsilon$  vão a zero quando  $a \rightarrow 0$ . Já os ângulos podem ter qualquer valor em  $a = 0$ , de modo que  $\alpha = \alpha_0 + \alpha^{(1)}$  e  $\beta = \beta_0 + \beta^{(1)}$ . Vamos encontrar a solução de ordem zero para  $\alpha$  e  $\beta$ . Quando  $a$  vai a zero, o lado esquerdo das equações

(2.106), (2.108) e (2.110) deve se anular. Já o lado direito vai depender da razão  $\varepsilon/\sigma$  e de  $\sin[(\alpha_0 - \beta_0)/3]$ . Em quaisquer das três situações possíveis  $\varepsilon/\sigma \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon/\sigma \rightarrow \infty$ , ou  $\varepsilon/\sigma \rightarrow \text{const.}$  o seno de  $(\alpha_0 - \beta_0)/3$  deve se anular. Como, pela nossa ordenação dos eixos,  $\alpha$  e  $\beta$  estão entre 0 e  $\pi$ , obtemos o resultado

$$\alpha_0 = \beta_0.$$

Com isso a equação (2.105), em primeira ordem, é dada por

$$\dot{\sigma}^{(1)} + \frac{\dot{a}}{a}\sigma^{(1)} = -\frac{6}{a}\varepsilon^{(1)}. \quad (2.113)$$

No regime linear, as equações (2.107) e (2.109) ficam iguais:

$$\dot{\varepsilon}^{(1)} = -\sigma^{(1)}. \quad (2.114)$$

Combinando as equações (2.113) e (2.114), obtemos

$$\ddot{\varepsilon}^{(1)} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\varepsilon}^{(1)} = \frac{6}{a}\varepsilon^{(1)}.$$

A solução do modo crescente é

$$\varepsilon^{(1)} = a\varepsilon_0, \quad \sigma^{(1)} = -\dot{\varepsilon}^{(1)} = -\dot{a}\varepsilon_0.$$

A solução linear em termos de  $\sigma_{ij}$  é

$$\sigma_{ij} = -\frac{2}{3}\dot{a}\varepsilon_0 Q_{ij}(\alpha_0). \quad (2.115)$$

Vemos que são necessárias três constantes para especificar as condições iniciais do modo crescente no regime linear:  $\delta_0$ ,  $\varepsilon_0$  e  $\alpha_0$ .

A solução linear deduzida nesta seção é exatamente a mesma que a discutida nas seções (2.2) e (2.2). Comparando as equações (2.112) e (2.115) com as (2.34) e (2.36)

vemos que<sup>17</sup>

$$\delta_0 = \lambda_1^0 + \lambda_2^0 + \lambda_3^0,$$

e

$$\lambda_i^0 = \frac{2}{3}\varepsilon_0 Q_i(\alpha_0) + \frac{1}{3}\delta_0, \quad (2.116)$$

onde  $Q_i$  são os elementos da diagonal de  $Q_{ij}$ . As condições iniciais podem ser parametrizadas por  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ ; ou por  $\delta_0, \varepsilon_0$  e  $\alpha_0$ ; ou ainda por  $\delta_0, \sigma_2^0$  e  $\sigma_3^0$ , onde  $\sigma_2^0$  e  $\sigma_3^0$  são duas componentes independentes do tensor de cisalhamento diagonalizado. No regime linear temos

$$\sigma_i = \sigma_i^0 \dot{a}, \quad \text{com} \quad \sigma_i^0 = -\lambda_i^0 + \frac{1}{3}\delta_0 = -\frac{2}{3}\varepsilon_0 Q_i(\alpha_0). \quad (2.117)$$

Em termos de  $\delta_0, \varepsilon_0$  e  $\alpha_0$  as três simetrias serão dadas por:

- Simetria plana  $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 0 \rightarrow \alpha_0 = 0, \varepsilon_0 = \delta_0$ ;
- Esférica  $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = \lambda_3^0 \rightarrow \varepsilon_0 = 0$ ;
- Cilíndrica  $\lambda_1 = 0, \lambda_2^0 = \lambda_3^0 \rightarrow \alpha_0 = \pi, \varepsilon_0 = \delta_0/2$ .

## Solução de segunda ordem

Vamos obter agora a solução de segunda ordem da LTA e da NMA num fundo de Einstein-de Sitter partindo dos modos crescentes. Escrevemos os parâmetros cinemáticos como

$$\delta = a\delta_0 + \delta^{(2)}, \quad \theta = -\dot{a}\delta_0 + \theta^{(2)}, \quad (2.118)$$

$$\varepsilon = a\varepsilon_0 + \varepsilon^{(2)}, \quad \sigma = -\dot{a}\varepsilon_0 + \sigma^{(2)}, \quad (2.119)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha^{(1)}, \quad \beta = \alpha_0 + \beta^{(1)}, \quad (2.120)$$

---

<sup>17</sup>Lembrando de transformar a derivada em relação a  $t$  para  $\tau$  nas (2.34) e (2.36).

e consideraremos apenas os termos até segunda ordem nas equações (2.103) a (2.106), com as (2.107) e (2.108), ou com as (2.109) e (2.110).

Substituindo a expressão (2.118) na equação (2.103), obtemos

$$\dot{\delta}^{(2)} = a\dot{a}\delta_0^2 - \theta^{(2)}. \quad (2.121)$$

Da equação (2.104) com as (2.118) e (2.119) obtemos

$$\dot{\theta}^{(2)} + \frac{\dot{a}}{a}\theta^{(2)} + \frac{1}{3}\dot{a}^2(\delta_0^2 + 2\varepsilon_0^2) = -\frac{6}{a}\delta^{(2)}. \quad (2.122)$$

Combinando essas duas equações, obtemos uma equação de segunda ordem para  $\delta^{(2)}$ , cuja solução é:

$$\delta^{(2)} = \frac{1}{21}(17\delta_0^2 + 4\varepsilon_0^2)a^2. \quad (2.123)$$

A solução de segunda ordem para  $\theta$  é obtida pela (2.121)

$$\theta^{(2)} = -a\dot{a}\frac{1}{21}(13\delta_0^2 + 4\varepsilon_0^2). \quad (2.124)$$

Note que, para obtermos a solução de segunda ordem para  $\theta$  e  $\delta$ , não precisamos utilizar nenhuma aproximação para a dinâmica. A solução sai direto da equação de continuidade e da equação de Raychaudhuri, e não depende se estamos utilizando a LTA, NMA ou qualquer outra aproximação. Daí obtemos o importante resultado que *a evolução da expansão e da densidade é local até segunda ordem*. Esse resultado pode ser utilizado para relacionar o campo de velocidades com a densidade, numa extensão de segunda ordem do método POTENT (veja a seção 1.3.4).

Vamos agora obter a solução de segunda ordem para  $\varepsilon$  e  $\sigma$ . A (2.105) fica, em segunda ordem,

$$\dot{\sigma}^{(2)} + \frac{\dot{a}}{a}\sigma^{(2)} + \frac{1}{3}\dot{a}^2\varepsilon_0^2 \cos \alpha_0 + \frac{26}{3}a\varepsilon_0\delta_0 + \frac{6}{a}\varepsilon^{(2)} = 0. \quad (2.125)$$

A equação de evolução para  $\varepsilon$  na NMA (eq. 2.107) dá

$$\dot{\varepsilon}^{(2)} + \dot{a}a\delta_0\varepsilon_0 + \sigma^{(2)} = 0, \quad (2.126)$$

enquanto a da LTA (eq. 2.109) dá

$$\dot{\varepsilon}^{(2)} + \dot{a}a\varepsilon_0^2 \cos \alpha_0 + \sigma^{(2)} = 0. \quad (2.127)$$

Combinando a (2.125) com a (2.126), obtemos a solução de segunda ordem para  $\varepsilon$  e  $\sigma$  na NMA:

$$\varepsilon^{(2)} = a^2 \frac{13}{21} (\varepsilon_0\delta_0 - \varepsilon_0^2 \cos \alpha_0), \quad \sigma^{(2)} = -a\dot{a} \frac{1}{21} (26\varepsilon_0\delta_0 - 5\varepsilon_0^2 \cos \alpha_0). \quad (2.128)$$

A solução para a LTA fica

$$\varepsilon^{(2)} = a^2 \frac{1}{21} (\varepsilon_0^2 \cos \alpha_0 - \varepsilon_0\delta_0), \quad \sigma^{(2)} = -a\dot{a} \frac{1}{21} (19\varepsilon_0\delta_0 + 2\varepsilon_0^2 \cos \alpha_0). \quad (2.129)$$

Note que a solução de segunda ordem para  $\varepsilon$  e  $\sigma$  depende da aproximação utilizada. Para obtê-la precisamos usar a equação para  $\dot{\varepsilon}$  que vem da equação de evolução do campo de maré  $E_{ij}$ . A solução de segunda ordem para a expansão e o contraste de densidade só envolve a solução de primeira ordem para o cisalhamento  $\sigma$ . Já a solução em terceira ordem envolverá  $\sigma^{(2)}$  e, como este depende da aproximação, a solução para  $\theta$  e  $\delta$  também dependerá, ao contrário da solução de segunda ordem.

Finalmente, vamos obter a solução de primeira ordem para  $\alpha$  e  $\beta$ . A equação (2.106)

fica, nessa ordem,

$$\dot{\alpha}^{(1)} + \dot{a}\varepsilon_0 \text{sen } \alpha_0 = -\frac{6}{\dot{a}} \left( \alpha^{(1)} - \beta^{(1)} \right). \quad (2.130)$$

A equação para  $\beta$  na NMA (eq. 2.108) leva a

$$\dot{\beta}^{(2)} = 3\dot{a}\varepsilon_0 \text{sen } \alpha_0 + \frac{\dot{a}}{a} \left( \alpha^{(1)} - \beta^{(1)} \right) \quad (2.131)$$

enquanto a da LTA (eq. 2.110) dá

$$\dot{\beta}^{(2)} = \frac{\dot{a}}{a} \left( \alpha^{(1)} - \beta^{(1)} \right). \quad (2.132)$$

Combinando a (2.130) com a (2.131) obtemos, para NMA,

$$\alpha^{(1)} = \frac{5}{7} a \varepsilon_0 \text{sen } \alpha_0, \quad \beta^{(1)} = \frac{13}{7} a \varepsilon_0 \text{sen } \alpha_0. \quad (2.133)$$

Para a LTA, a solução de primeira ordem é:

$$\alpha^{(1)} = -\frac{4}{7} a \varepsilon_0 \text{sen } \alpha_0, \quad \beta^{(1)} = -\frac{2}{7} a \varepsilon_0 \text{sen } \alpha_0. \quad (2.134)$$

As LTA e NMA já foram estudadas em algumas situações, como num elipsóide homogêneo e com condições iniciais genéricas (refs. [71] e [72]). Mostrou-se que a NMA leva ao colapso genérico na forma alongada, enquanto o esperado seria o colapso achatado, como na ZA. A NMA também não dá um bom resultado no caso do colapso do elipsóide. Além disso, o análogo relativístico da NMA é inconsistente (veja a seção A.2.3). Já a LTA dá bons resultados no caso de elipsóide, como veremos na seção 3.3.1, e prediz o colapso na forma de panquecas. Por isso, a partir de agora discutiremos apenas a LTA.



## Comportamento assintótico

Dependendo das condições iniciais os elementos de volume podem se expandir indefinidamente ou colapsar num tempo finito  $\tau_c$ . Investigaremos o comportamento assintótico próximo do colapso. Vamos supor que, em primeira ordem na divergência,  $\delta$  se comporta como uma lei de potência:

$$\delta = \delta_c (\tau_c - \tau)^{-d} \quad (2.135)$$

Pela eq. (2.103) com  $\delta \gg 1$ , teremos

$$\theta = -d (\tau_c - \tau)^{-1} \quad (2.136)$$

Da (2.104), se  $d < 2$ , teremos, para  $\tau \cong \tau_c$

$$-d (\tau_c - \tau)^{-2} + \frac{1}{3} d^2 (\tau_c - \tau)^{-2} = -\frac{2}{3} \sigma^2$$

logo

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{3d - d^2}{2}} (\tau_c - \tau)^{-1} = \pm \sigma_c (\tau_c - \tau)^{-1} \quad (2.137)$$

Vamos supor que  $\alpha$  e  $\beta$  tendem assintoticamente para os valores  $\alpha_c, \beta_c$ . Utilizando a (2.110), e supondo que  $\varepsilon$  cresce mais lentamente que  $\sigma$ , teremos:

$$\text{sen} \left( \frac{\alpha_c - \beta_c}{3} \right) = 0. \quad (2.138)$$

Substituindo este resultado na (2.106), e supondo que  $1 \leq d < 2$ , obtemos

$$\text{sen } \alpha_c = 0.$$

Logo  $\alpha_c = 0$  ou  $\alpha_c = \pi$ . Como  $\alpha$  e  $\beta$  variam entre 0 e  $\pi$ , a (2.138) leva a

$$\alpha_c = \beta_c.$$

Utilizando a (2.105) obtemos

$$\sigma_c = (2d - 3) \cos \alpha_c = \pm (2d - 3). \quad (2.139)$$

Combinando esse resultado com a (2.137), vemos que:  $d = 1$  ou  $d = 2$ . O caso  $d = 2$  não pode ser considerado aqui, pois supusemos  $d < 2$  para obter a (2.137). Como  $\sigma < 0$ , devemos reter o sinal negativo na (2.139), correspondendo a  $\alpha_c = 0$ .

O valor assintótico de  $\varepsilon$  pode ser determinado utilizando a (2.109) com a (2.138):

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma}{\theta} \cos \left( \frac{\alpha_c - \beta_c}{3} \right) = \cos \alpha_c \cos \left( \frac{\alpha_c - \beta_c}{3} \right) = 1.$$

Em resumo, para  $d < 2$  obtemos o seguinte resultado

$$\delta \rightarrow \delta_c (\tau_c - \tau)^{-1}, \quad (2.140)$$

$$\theta \rightarrow -(\tau_c - \tau)^{-1}, \quad (2.141)$$

$$\sigma \rightarrow -(\tau_c - \tau)^{-1} = \theta, \quad (2.142)$$

$$\varepsilon_c \rightarrow 1, \quad (2.143)$$

$$\alpha_c \rightarrow 0. \quad (2.144)$$

Vamos agora analisar o caso  $d = 2$ . A (2.104) leva a

$$\sigma = \pm \sqrt{1 - \frac{9\delta_c}{\tau_c^2}} (\tau_c - \tau)^{-1} = \sigma_c (\tau_c - \tau)^{-1}. \quad (2.145)$$

Supondo que  $\sigma$  cresce mais rápido que  $\varepsilon$  teremos, pela (2.106) que

$$\text{sen } \alpha_c = 0.$$

A (2.110) leva novamente a:

$$\text{sen} \left( \frac{\alpha_c - \beta_c}{3} \right) = 0, \quad (2.146)$$

de modo que  $\alpha_c = \beta_c$ . Substituindo estes resultados na (2.105), obtemos que  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_c$ .

A (2.109) leva a

$$\varepsilon_c = -\frac{\sigma_c}{2}.$$

Substituindo este resultado na (2.105), obtemos

$$\pm\sigma_c = 1 + \frac{9}{\tau_c^2} \delta_c.$$

Comparando esse resultado com a (2.145), deveríamos ter  $9\delta_c/\tau_c^2 = 0$  ou  $-3$ , o que não é possível, pois estamos procurando soluções em que  $\delta$  diverge, de modo que  $\delta_c > 0$ . Isso significa que não existe solução com  $d = 2$ ? Não, ao longo das manipulações acima supusemos que  $\sigma$  e  $\varepsilon$  não eram nulos. Da (2.109) temos que  $\varepsilon = 0 \iff \sigma = 0$ . Nesse caso, a (2.104) leva a  $\delta_c = a_c/9$ . As outras equações são automaticamente satisfeitas. Os parâmetros cinemáticos serão dados por

$$\delta \rightarrow \frac{a_c}{9} (\tau_c - \tau)^{-2}, \quad (2.147)$$

$$\theta \rightarrow -2(\tau_c - \tau)^{-1}, \quad (2.148)$$

$$\sigma \rightarrow 0, \quad (2.149)$$

$$\varepsilon_c \rightarrow 0, \quad (2.150)$$

para qualquer valor de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Se temos  $d > 2$  a (2.104) levaria a  $\sigma^2 < 0$ , portanto não é possível encontrar uma solução para  $d > 2$ . Esperaríamos encontrar três soluções para o comportamento assintótico: correspondendo ao colapso em uma, duas ou três direções; mas obtivemos apenas

duas. Como vimos na seção (2.3.2), para a DTA o colapso filamentar não pode ser descrito em termos de uma lei de potência, o mesmo deve ocorrer para a LTA. A solução para  $d = 1$  corresponde ao colapso planar, e para  $d = 2$  corresponde ao colapso esférico (compare com os resultados obtidos no caso da DTA, seção 2.3.2).

### Mudança de variáveis

Próximo do colapso os parâmetros cinemáticos divergem e é conveniente introduzir as novas quantidades:

$$\Theta := \frac{\theta}{\delta}, \quad \Sigma := \frac{\sigma}{\theta}, \quad E := \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Definimos uma nova variável de integração  $x$  pela relação

$$x := \ln(1 + \delta),$$

de modo que

$$dx = -\theta d\tau. \tag{2.151}$$

As equações (2.103) a (2.106) e (2.109) e (2.110) ficam, nas novas variáveis:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dx} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{3}\Theta - \frac{2}{3}\Sigma^2\Theta + \frac{e^x}{e^x - 1}\Theta &= 4\pi G\bar{\rho}a^2 \frac{1}{\Theta(e^x - 1)}\delta, \\ \frac{d\Sigma}{dx} - \frac{1}{3}\Sigma(1 + \Sigma \cos \alpha - 2\Sigma^2) &= 4\pi G\bar{\rho}a^2 \left[ \frac{E}{\Theta^2} \frac{e^x}{e^x - 1} \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right) - \frac{\Sigma}{\Theta^2} \frac{1}{e^x - 1} \right], \\ \frac{d\alpha}{dx} + \Sigma \sin \alpha &= 12\pi G\bar{\rho}a^2 \frac{E}{\Sigma\Theta^2} \frac{e^x}{e^x - 1} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right), \\ \frac{dE}{dx} &= \frac{1}{e^x - 1} \left[ \Sigma \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right) - E(2e^x - 1) \right], \\ \frac{d\beta}{dx} &= 3 \frac{\Sigma}{E(e^x - 1)} \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right). \end{aligned}$$

Integramos  $\tau$  simultaneamente com essas equações utilizando a relação (2.151):

$$\frac{d\tau}{dx} = -\frac{1}{\theta} = -\frac{1}{\Theta(e^x - 1)}.$$

### Autovalores do tensor de deformação

As aproximações do campo de maré são escritas naturalmente em termos dos parâmetros cinemáticos, e não de  $w_i$ . No entanto, para várias aplicações é importante termos os autovalores do tensor de deformação  $1 + w_i$ . Da equação (2.30) podemos deduzir uma equação diferencial para determinar essas quantidades:

$$\frac{dw_i}{d\tau} = \left( \sigma_i + \frac{1}{3}\theta \right) (1 + w_i), \quad (2.152)$$

onde  $\sigma_i$  são os elementos da diagonal de  $\sigma_{ij}$ . Essa equação pode ser integrada junto com as outras equações da LTA ou NMA.

É possível expressar as aproximações do campo de maré diretamente em termos de  $w_i$ . Utilizando a definição de  $E_{ij}$  e as equações (2.28) e (2.31), obtemos<sup>18</sup>

$$E_i = -\frac{\frac{\dot{a}}{a}\dot{w}_i + \ddot{w}_i}{1 + w_i} - \frac{4\pi G\bar{\rho}a^2}{3} \left[ \frac{1}{(1 + w_1)(1 + w_2)(1 + w_3)} - 1 \right],$$

onde  $E_i$  são as componentes da diagonal de  $E_{ij}$ . Os outros parâmetros cinemáticos são dados pelas equações (2.29) e (2.30). A equação da LTA (eq. 2.100) em termos de  $w_i$  fica então

$$\ddot{w}_i + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{w}_i + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 w_i - \frac{(\dot{a}/a)\dot{w}_i^2 + \ddot{w}_i\dot{w}_i}{1 + w_i} = 4\pi G\bar{\rho}a^2\dot{w}_i \left( \frac{1}{(1 + w_1)(1 + w_2)(1 + w_3)} + \frac{1}{3} \right) \quad (2.153)$$

No caso da NMA obteríamos uma equação semelhante, com mais termos do lado direito. Note que ao empregar a equação de  $E_{ij}$  em termos de  $w_i$ , já estamos utilizando a solução da equação de Euler. Além disso,  $\theta$  e  $\delta$  satisfazem automaticamente a equação

<sup>18</sup>Note que fizemos a transformação para a variável temporal  $\tau$ .

de continuidade. Dessa forma, a única equação que resta a resolver é a equação (2.153). Como são três equações de terceira ordem em  $w_i$ , esse conjunto equivale a nove equações acopladas de primeira ordem. Esse é justamente o número de equações que precisamos para obter  $w_i$  nas aproximações de campo de maré: seis equações para determinar  $\delta$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  (eqs. 2.103 a 2.108) e mais três para obter  $w_i$  (eqs. 2.152).

O fato da equação (2.153) ser de terceira ordem é bem conhecido na relatividade geral (apêndice A). As equações de evolução para as componentes do tensor de Weyl (equações quase-maxwellianas) são de terceira ordem em relação à métrica. Não há nenhum problema em termos derivadas de terceira ordem. Uma vez que as condições iniciais são especificadas corretamente, ou seja, se fornecemos  $w_i$  e suas derivadas primeira e segunda, podemos integrar a equação (2.153) sem problemas. Para condições iniciais lineares do modo crescente, basta especificarmos  $\lambda_i^0$ , para obter  $w_i$  e todos os parâmetros cinemáticos no regime linear.

Podemos utilizar a (2.152) para obter a solução de segunda ordem  $w_i^{(2)}$  em termos da solução de segunda ordem para  $\theta$ ,  $\sigma$  e  $\alpha$ . A solução de primeira ordem da (2.152) é  $w_i = -(2/3)\varepsilon_0 Q_i(\alpha_0) a - (1/3)\delta_0 a = -\lambda_i^0 a$ , que é exatamente a solução linear (2.33). Substituindo  $w_i = -\lambda_i^0 a + w_i^{(2)}$  na (2.152) e expandindo o lado direito até segunda ordem, obtemos

$$w_i^{(2)} = \frac{a^2}{2} \left[ (\lambda_i^0)^2 + \sigma_i^{(2)} + \frac{1}{3}\theta^{(2)} \right],$$

onde  $\sigma_i^{(2)}$  é o termo de segunda ordem do cisalhamento

$$\sigma_i^{(2)} = \frac{2}{3}\sigma^{(2)} Q_i(\alpha_0) - \frac{2}{3}\dot{a}\varepsilon_0 \left. \frac{dQ_i}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} \alpha^{(1)},$$

e  $\sigma^{(2)}$ ,  $\alpha^{(1)}$  e  $\theta^{(2)}$  são dados pelas equações (2.124), (2.129) e (2.134).



## Capítulo 3

# Análise Comparativa e Aplicações das Aproximações Locais

No capítulo anterior apresentamos quatro aproximações para investigar evolução não-linear das estruturas. Elas abrangem todas as aproximações locais conhecidas que são exatas para as simetrias plana, esférica e cilíndrica. Alguns aspectos dessas aproximações já foram discutidos na literatura, mas nunca houve uma comparação sistemática entre elas. Aqui vamos investigá-las de uma forma unificada, explorando suas características gerais e realizando alguns testes e aplicações.

Na seção 3.1 analisaremos as características gerais dessa classe de aproximações. A sua implementação numérica será discutida na seção 3.2. Na seção 3.3 consideraremos algumas aplicações. Também faremos uma comparação com a teoria de perturbação lagrangiana na seção 3.4, e discutiremos como confrontar as aproximações locais com as simulações de  $N$ -corpos seção 3.5.1. Uma breve discussão sobre possíveis extensões desses métodos será apresentada na seção 3.5.2. Os principais resultados serão recapitulados e discutidos na seção 3.6, onde apresentaremos as nossas conclusões.



### 3.1 Características Gerais

As aproximações locais discutidas nas seções precedentes consistem de sistemas de equações diferenciais ordinárias, ou de expressões explícitas em termos da solução linear. Dadas as condições iniciais num ponto  $q_i$ , essas aproximações fornecem a evolução do tensor de deformação, e portanto dos parâmetros cinemáticos, em  $q_i$ . Nas aproximações locais, cada elemento de volume evolui independentemente dos outros. A influência dos outros elementos entra somente através das condições iniciais.

As aproximações que partem do tensor de deformação (ZA, MZA, DTA e ZA) pressupõem que a base que diagonaliza  $J_{ij}$  não muda com o tempo. Já as baseadas na evolução do campo de maré (LTA e NMA) implicam que  $\sigma_{ij}$  se mantém diagonal. Como vimos na seção 2.3.4, para condições iniciais lineares do modo crescente, a base que diagonaliza  $\sigma_{ij}$  é a mesma que diagonaliza  $J_{ij}$  e portanto as duas propriedades são equivalentes.

Essas aproximações locais são, de certa forma, “aproximações geométricas”, pois são exatas para algumas simetrias. Em particular elas são exatas sempre que  $w_1 = w_2 = w_3$ ; ou  $w_1 = w_2$ , com  $w_3 = 0$ ; ou  $w_2 = w_3 = 0$  são satisfeitas localmente. Elas não são perturbativas, de modo que seriam válidas, em princípio para qualquer valor de  $\delta$  ou  $\lambda_i$ .

Todas as aproximações têm a mesma solução de primeira ordem, que é a solução linear correta. Nós calculamos a solução de segunda ordem das aproximações locais estudadas. Na MZA temos o mesmo fator de crescimento para cada  $w_i$ :  $w_i = -D\lambda_i^0$ . Já para a DTA, CZA, NMA e LTA isso deixa de valer em segunda ordem:  $w_i = -r_i\lambda_i^0$ . A CZA e a DTA têm a mesma solução de segunda ordem:

$$w_i = w_i^{(1)} + w_i^{(2)} = -\lambda_i^0 a \left[ 1 + \frac{3}{14} (\lambda_j^0 + \lambda_k^0) a \right] \quad (3.1)$$

Na seção 3.4 mostraremos que a solução de segunda ordem de todas aproximações locais leva ao mesmo valor para o contraste de densidade  $\delta$ , que está em acordo com a teoria de perturbação lagrangiana.

Na próxima subseção, discutiremos o comportamento assintótico das aproximações locais próximo do colapso. Depois, obteremos o importante resultado de que não é possível recuperar as posições dos elementos de volume nas aproximações locais.

### 3.1.1 Comportamento Assintótico

Se algum autovalor  $w_i$  do tensor de deformação se aproximar de  $-1$ , para  $a$  tendendo a um dado  $a_c$ , o contraste de densidade  $\delta$  divergirá. Chamaremos  $a_c$  de tempo de colapso. Como os  $w_i$  são funções de  $a$  e das condições iniciais  $\lambda_i^0$  apenas, poderíamos supor que é possível expandi-los próximo de  $a_c$  como

$$w_i = -1 - \left. \frac{dw_i}{da} \right|_{a_c} (a_c - a) + \dots \quad (3.2)$$

Se essa expressão é válida para cada eixo em que  $w_i \rightarrow -1$ , teremos que o contraste de densidade  $\delta$  (eq. 2.28) se comporta, próximo do colapso, como

$$\delta \propto (a_c - a)^{-d}, \quad (3.3)$$

onde  $d = 1$ , se apenas um  $w_i$  tende a  $-1$  para  $a \rightarrow a_c$ , para o colapso em duas direções simultaneamente teríamos  $d = 2$  e para o colapso nos três eixos  $d = 3$ . Pela equação (2.11), o escalar de expansão  $\theta$ , será dado por:

$$\theta \rightarrow -\frac{2\sqrt{a_c}d}{(a_c - a)} \quad (3.4)$$

Na aproximação de Zel'dovich (seção 2.2.1), por exemplo, temos  $w_i = -\lambda_i^0 a$ , de modo que  $a_c = (\lambda_i^0)^{-1}$ , onde  $\lambda_i^0$  é o maior autovalor. Neste caso  $dw_i/da = -\lambda_i^0$ , e  $d^n w_i/da^n = 0$ , para  $n > 1$ , de modo que a expansão (3.2) é exata, tendo apenas o termo de primeira ordem.

Para calcular o campo  $F_i$  (que é o tensor  $\partial_i \partial_j \phi$  diagonalizado) precisamos da segunda

derivada de  $w_i$ :

$$w_i'' = 6a^2 \frac{dw_i}{da} - 2a^{3/2} \frac{d^2 w_i}{da^2},$$

Utilizando a expansão (3.2), para  $a \rightarrow a_c$ ,  $F_i$  será dado por (eq. 2.31)

$$F_i = -\frac{w_i''}{a^2(1+w_i)} \simeq \frac{-6 + 2a_c^{-1/2} \left. \frac{d^2 w_i}{da^2} \right|_{a_c} \left( \left. \frac{dw_i}{da} \right|_{a_c} \right)^{-1}}{(a_c - a)} \propto (a_c - a)^{-1}. \quad (3.5)$$

Pela equação de Poisson, o traço  $\sum_{i=1,3} F_i$  deve dar  $4\pi G\bar{\rho}\delta$ . No entanto, pela equação acima, teríamos  $\delta \propto (a_c - a)^{-1}$ , independente de  $d$ , o que está em contradição com a equação (3.3). Portanto *uma expansão como a (3.2) só é possível no caso de colapso planar* ( $d = 1$ ). A aproximação de Zel'dovich não satisfaz a equação de Raychaudhuri (eq. 2.32), apenas a sua versão linearizada e por isso é a única que pode ser expandida na forma (3.2) para os três tipos de colapso. Como vimos nas seções 2.3.2 e 2.3.4, para o colapso em duas direções não é possível escrever a solução como uma lei de potência. No caso do colapso nas três direções, se cada eixo segue a mesma lei de potência, podemos deduzir o comportamento assintótico diretamente da equação de Raychaudhuri. Supondo que

$$w_i \rightarrow -1 + C_i (t_c - t)^d, \quad (3.6)$$

e substituindo este resultado para  $t \rightarrow t_c$  na equação (2.32), obtemos

$$d = \frac{2}{3}, \quad C_i C_j C_k = \frac{3}{2} 4\pi G\bar{\rho} a^4 = 9a_c. \quad (3.7)$$

Esse resultado foi obtido a partir da DTA na seção 2.3.2.

Para comparar com os resultados das seções 2.3.2 e 2.3.4, é útil transformar para as

variáveis  $\tau$  e  $t$ :

$$a_c - a = \tau_c^2 - [(\tau - \tau_c) + \tau_c]^2 \simeq 2\tau_c(\tau_c - \tau) = 2a_c^{1/2}(\tau_c - \tau), \quad (3.8)$$

$$a_c - a = t_c^{-2} - [(t - t_c) + t_c]^{-2} \simeq -2t_c^{-3}(t_c - t) = 2a_c^{3/2}(t_c - t). \quad (3.9)$$

Com as (3.6) e (3.7) podemos calcular os parâmetros cinemáticos. Utilizando a (3.9) teremos

$$\delta \rightarrow \frac{4a_c}{9}(a_c - a)^{-2}, \quad (3.10)$$

$$\theta \rightarrow -4\sqrt{a_c}(a_c - a)^{-1}. \quad (3.11)$$

Esse resultado é genérico e não depende da aproximação local utilizada (desde que ela obedeça à equação de Raychaudhuri). Em particular ele é idêntico às equações 2.61 e 2.62 obtidas pela DTA, e 2.147 e 2.148 deduzidas na LTA. Se cada eixo tem os mesmos expoentes, teremos sempre  $E_i = \sigma_i = 0$ , como foi mostrado para a LTA na seção 2.3.4.

Voltemos agora ao colapso em panquecas. Nesse caso

$$\theta \rightarrow -\frac{2\sqrt{a_c}}{(a_c - a)}, \quad (3.12)$$

que é o resultado que obtido para a LTA (eq. 2.141) e DTA (eq. 2.68). O comportamento assintótico do cisalhamento pode ser determinado pela equação (2.30), utilizando a (3.2) e a (3.9). Se o colapso ocorre no eixo 1, teremos

$$\frac{1}{a} \frac{w'_1}{1 + w_1} = -\frac{2\sqrt{a_c}}{(a_c - a)} = \theta.$$

Notando que  $\theta := \sum_i a^{-1} w'_i / (1 + w_i)$ , vemos, pelo resultado acima, que  $w'_1$  e  $w'_2$  não

divergem. Assim, o cisalhamento será dado por

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\rightarrow -\frac{2\sqrt{a_c}}{(a_c - a)} - \frac{1}{3}\theta = -\frac{4\sqrt{a_c}}{3(a_c - a)}, \\ \sigma_{2,3} &\rightarrow -\frac{1}{3}\theta = \frac{2\sqrt{a_c}}{3(a_c - a)},\end{aligned}\tag{3.13}$$

que foi o resultado obtido na DTA (eq. 2.67). Para comparar com a LTA, calculamos  $\sigma^2 = (3/2)\sigma_i\sigma^i \rightarrow (\tau_c - \tau)^{-2}$ . Lembrando que, por definição  $\sigma \leq 0$ , teremos

$$\sigma \rightarrow -\frac{1}{\tau_c - \tau},$$

que foi o resultado obtido na (2.142).

O campo  $F_i$  diverge para  $i = 1$  (eq. 3.5), mas não sabemos o seu comportamento para  $i = 2, 3$ , pois  $w_2''$  e  $w_3''$  também podem divergir. De fato, isso ocorreu na DTA para o colapso plano (eq. 2.71). Vamos supor por um momento que  $F_2$  e  $F_3$  não divergem. Assim, como  $\sum_i F_i = 4\pi G\bar{\rho}\delta$ , teríamos

$$F_1 = 4\pi G\bar{\rho}\delta.\tag{3.14}$$

O campo de maré  $E_i = F_i - 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta/3$  será dado por

$$E_1 = \frac{2}{3}4\pi G\bar{\rho}\delta, \quad E_{2,3} = -\frac{1}{3}4\pi G\bar{\rho}\delta.$$

Utilizando a definição de  $\varepsilon$  (2.101), teremos  $\varepsilon = 1$ , que é igual ao resultado obtido com a LTA (eq. 2.143). Portanto, a LTA prevê que  $w_2''$  e  $w_3''$  não divergem no colapso unidimensional, ao contrário da DTA.

Mostramos aqui algumas propriedades do comportamento assintótico que devem ser satisfeitas por todas as aproximações locais que obedecem a equação de Raychaudhuri. Determinamos o comportamento assintótico de  $w_i$  nos casos de colapso nas três direções e em uma direção apenas. No colapso esférico, próximo de  $a = a_c$ , podemos escrever

cada autovalor como  $w_i \simeq -1 + C_i (a - a_c)^{2/3}$ , o cisalhamento e o campo de maré se anulam e  $\delta$  e  $\theta$ , que só dependem de  $a_c$ , são dados pelas equações (3.10) e (3.11). Já para o colapso plano, temos  $w_1 \simeq -1 + C (a - a_c)$ . O contraste de densidade é dado por  $\delta = \delta_c (a_c - a)^{-1}$  (eq. 3.3) e a expansão e o cisalhamento são dados pelas equações (3.12) e (3.13) e dependem apenas de  $a_c$ . Os elementos do campo de maré não pode ser obtidos de forma independente da aproximação, mas o seu comportamento assintótico é sempre  $E_i \propto (a_c - a)^{-1}$ .

Como é muito mais provável que apenas um  $w_i$  se aproxime de  $-1$ , o colapso é genericamente plano. Mesmo que o elemento de volume comece se contraindo nas três direções, na maioria das vezes uma direção acabará colapsando primeiro. Esse comportamento foi verificado na solução numérica das aproximações locais. Para quantificar a fração de elementos de volume que colapsa num plano precisamos da distribuição de probabilidades das condições iniciais.

Na seção 3.3.2 estudaremos a variação de  $a_c$  em função das condições iniciais. Veremos que para  $\lambda_i > 0$  todas as aproximações fornecem valores parecidos de  $a_c$ , exceto a ZA, que superestima o tempo de colapso para configurações quase esféricas.

### 3.1.2 Não Integrabilidade das Posições

As aproximações locais não são adequadas para obter as posições dos elementos de volume. Para ver isso, vamos considerar um tipo peculiar de condições iniciais.

Nas aproximações locais estudadas temos que, se  $J_{ij}$  é diagonal *num ponto*, essa diagonalização é mantida ao longo da evolução. Na MZA, DTA, CZA e outras baseadas em  $w$ ; a diagonalidade é mantida por hipótese. Na LTA isso sai do fato de que, se  $\sigma_{ij}$  é inicialmente diagonal, essa diagonalização é mantida ao longo da evolução, o que leva à diagonalização de  $J_{ij}$  (veja a seção 2.3.4).

Vamos agora considerar uma configuração inicial tal que  $J_{ij}$  é diagonal *em todos os*

pontos<sup>1</sup>

$$J_{ij} := \frac{\partial x_i}{\partial q^j} = (1 - \lambda_i^0 a) \delta_{ij}. \quad (3.15)$$

Nesse caso teremos  $\partial x_i / \partial q^j = 0$  para  $i \neq j$  o que leva a  $\lambda_i^0 = \lambda_i^0(q_i)$ , ou seja, o autovalor  $i$  do tensor de deformação só pode depender de  $q_i$ . Se  $J_{ij}$  continua diagonal no mesmo sistema de coordenadas teremos

$$J_{ij} := (1 + w_i) \delta_{ij}, \quad (3.16)$$

de modo que

$$w_i = w_i(q_i). \quad (3.17)$$

Por outro lado, a evolução dos  $w_i$  depende dos três  $\lambda_j^0$ , de forma que  $w_i = w_i(\lambda_1^0(q_1), \lambda_2^0(q_2), \lambda_3^0(q_3))$ . Assim,  $w_i$  dependerá das três coordenadas  $q_j$  através das condições iniciais. Portanto a evolução viola a condição  $w_i = w_i(q_i)$ , necessária para a diagonalidade, mostrando que essas aproximações locais são incapazes de determinar  $J_{ij}$  de forma consistente. Em outras palavras, não podemos recuperar as posições nessas aproximações.

Outra forma de ver que a integrabilidade é violada é a seguinte: Se fosse possível reconstruir  $x_1$  a partir de  $J_{1j}$ , por exemplo, então  $J_{1j}$  deveria ser um campo gradiente no espaço lagrangiano. Dessa forma, o seu rotacional deveria se anular, de modo que

$$J_{1j|i} - J_{1i|j} = 0. \quad (3.18)$$

No caso particular em que  $J_{ij}$  é diagonal em todos os pontos (eq. 3.16), essa condição

---

<sup>1</sup>A convenção de soma não será utilizada nesta seção.

<sup>2</sup>Na CZA temos uma expressão explícita para cada  $w_i (= -r_i \lambda_i)$  em função dos três  $\lambda_i^0$ . Na MZA os  $\lambda_i^0$  entram diretamente na equação que governa a evolução temporal de  $w_i (= -\lambda_i^0 D)$ . A LTA como a DTA envolvem equações diferenciais acopladas, e portanto a *evolução* faz com que  $w_i = w_i(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0)$ .

fica:

$$w_{1|i} = 0,$$

para  $i = 2, 3$ . Para  $i = 1$ , a condição (3.18) é identicamente satisfeita. Chegamos então ao resultado de que, se as posições são integráveis e se  $J_{ij}$  é diagonal em todos os pontos, então devemos ter  $w_i = w_i(q_i)$ . Como vimos anteriormente, as aproximações locais violam essa condição. Isso ocorre já em segunda ordem (seção 3.1).

As únicas situações em que é possível recuperar as posições nas aproximações locais ocorrem quando os  $w_i$  não dependem de  $q_i$ ; como é o caso de um elipsóide homogêneo (veja a seção 3.3.1) e de situações com simetria esférica, cilíndrica ou plana. É possível que haja situações mais gerais em que  $w_i$  não depende de  $q_i$ , mas essa ainda é uma condição bastante restritiva.

A única aproximação local que mantém a diagonalidade ao longo da evolução e permite a obtenção direta das posições é a aproximação de Zel'dovich, para a qual  $w_i = -a\lambda_i^0$ .

Poderíamos pensar que não é possível escolher condições iniciais como as (3.15), no entanto a relação (3.17) também pode ser obtida através da expressão

$$v_{i,j,k} = v_{i,k,j}, \quad (3.19)$$

a partir da qual são deduzidas as equações de vínculo (veja as seções A.1 e A.2.1). Se  $J_{ij}$  é diagonal em todos os pontos, teremos, pela equação (2.13) que  $v_{i,j}$  também é diagonal, de forma que  $v_{i,j} = u_i\delta_{ij}$ . Nesse caso, equação (3.19) fica

$$u_{i,k}\delta_{ij} = u_{i,j}\delta_{ik}.$$

Se  $i \neq j \neq k$  teremos  $0 = 0$ . Se  $i = j \neq k$ , teremos  $u_{i,k} = 0$ . Finalmente, se  $i = j = k$ , teremos  $u_{i,i} = u_{i,i}$ . Assim, a única condição imposta pelos vínculos para termos  $v_{i,j}$  diagonal é que  $u_{i,k} = 0$  se  $i \neq k$ , ou seja  $u_i = u_i(x_i)$ . Como  $u_i = w'_i/(1 + w_i)$ , os vínculos



exigem que  $w_i = w_i(x_i)$ . Notando que  $w_{ij} = (1 + w_j)w_{i,j}$ , essa condição é idêntica a termos  $w_i = w_i(q_i)$ . Vemos portanto que a condição de termos  $J_{ij}$  diagonal é satisfeita pelos vínculos e que se exigimos que essa condição seja mantida ao longo da evolução obtemos a relação (3.17).

Apesar da não integrabilidade das posições, as aproximações locais oferecem uma solução aproximada para o tensor de deformação, permitindo obter quantidades locais, como os parâmetros cinemáticos. Não é fácil estimar analiticamente os erros cometidos na evolução do tensor de deformação, por isso é preciso fazer investigações numéricas. Qual seria a influência desses erros no cálculo dos parâmetros cinemáticos? Será que essas aproximações reproduzem adequadamente os elementos da diagonal do tensor de deformação exato  $J_{ij}^e$ ? Qual seria a influência dos elementos fora da diagonal? Mais precisamente, deveríamos estimar qual seria a diferença entre

$$v_{i,j}|_{\text{exato}} = (J_{ki}^e)^{-1} \frac{dJ_j^{ek}}{d\tau}$$

e

$$v_{i,j}|_{\text{local}} = \frac{\dot{w}_i}{1 + w_i} \delta_{ij},$$

e entre  $|J_{ij}^e|$  e  $\prod_i (1 + w_i)$ . Assim, poderíamos ver como se comportam os parâmetros cinemáticos. É possível que as aproximações forneçam bons resultados para  $\delta$  ou  $\theta$  e que não sejam boas para determinar  $\sigma_i$ , por exemplo. Na seção 3.4 nós utilizaremos a teoria de perturbação lagrangiana para mostrar que, mesmo se  $J_{ij}$  tem um valor diferente do exato numa dada ordem, a expansão e a densidade podem fornecer resultados corretos nessa ordem.

Para dar uma resposta definitiva quanto à precisão das aproximações locais, deveríamos fazer simulações de  $N$ -corpos e comparar com os resultados obtidos a partir dessas aproximações. Como fazer isso sem obter as posições? Uma solução é utilizar a idéia de *mapas lagrangianos*, que será discutida na seção 3.5.1.

Se por um lado a aproximação de Zel'dovich é a única aproximação local consistente (no sentido discutido acima), por outro lado ela dá um resultado bem ruim para distribuições esféricas. Como veremos na seção 3.3.1, as aproximações locais fornecem resultados excelentes para um elipsóide homogêneo, muito mais próximos da solução exata do que o fornecido pela aproximação de Zel'dovich.

Surge então a seguinte pergunta: Qual é melhor para situações genéricas, a de Zel'dovich ou as outras locais? Que efeito predomina, a deficiência de Zel'dovich fora da simetria plana, ou a inconsistência da evolução de  $J_{ij}$ ?

Note que, se as aproximações reproduzem bem algumas propriedades da dinâmica, como o tempo de colapso em função das condições iniciais, elas permitem calcular algumas quantidades interessantes, como a função de massa, por exemplo (seção 3.3.3). Se as aproximações forem boas para  $\delta(\vec{q}, \tau)$  elas poderiam ser utilizadas em muitas aplicações (veja a seção 3.5.1), inclusive há várias aproximações na literatura que só permitem calcular  $\delta$ .

## 3.2 Implementação Numérica

Nesta seção esclareceremos alguns aspectos da implementação numérica das aproximações locais. Mostraremos como são escolhidas as condições iniciais e quais são as quantidades que determinam a precisão e o tempo de integração.

As condições iniciais são determinadas pelos modos lineares crescentes. Elas podem ser dadas pelos três autovalores do tensor de deformação  $\lambda_i^0$  ou pelas quantidades  $\delta_0$ ,  $\varepsilon_0$  e  $\alpha_0$ . Para a aplicação a um elipsóide homogêneo (veja a seção 3.3.1) é natural fornecer duas razões entre os eixos  $X_1, X_2$  e o contraste de densidade  $\delta_0$ , como condição inicial. No programa, temos uma rotina que pode receber como entrada qualquer desses três conjuntos de condições iniciais ( $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0$ ; ou  $\delta_0, \varepsilon_0, \alpha_0$ ; ou  $X_1, X_2, \delta_0$ ) apropriados para cada estudo realizado. Como saída ela fornece as condições iniciais em termos de  $\lambda_i^0$  e  $\delta_0, \varepsilon_0$  e  $\alpha_0$  para serem utilizadas em quaisquer aproximações locais.

Para determinar o valor de  $a$  a partir do qual integramos numericamente o sistema,

utilizamos a solução de segunda ordem de cada aproximação local. O valor de  $a_i$  é estimado de modo que o módulo da razão entre os termos de segunda e primeira ordem seja aproximadamente igual a um parâmetro  $\epsilon_r$ . Em nossas simulações, o valor de  $\epsilon_r$  utilizado é tipicamente  $10^{-5}$ , o que produz erros em  $a_c$  da ordem de 0,1%. Uma vez determinado  $a_i$ , utilizamos a solução de segunda ordem como condição inicial. Dessa forma temos um critério para a escolha de  $a_i$ , que permite iniciar a integração num tempo mais avançado possível, mantendo uma excelente precisão.

No caso de MZA temos

$$\frac{w_i^{(2)}}{w_i^{(1)}} = \frac{D^{(2)}}{a} = \frac{3}{7} \frac{\eta_2}{\eta_1} a.$$

Exigindo que essa razão seja da ordem de  $\epsilon_r$ , teremos

$$a_i = \left| \frac{\eta_1}{\eta_2} \right| \epsilon_r.$$

Na variável temporal  $t$  utilizada na MZA, teremos  $t_i = -a_i^{-1/2}$ . Se  $\eta_2 = 0$  comparamos os termos de 1ª e 3ª ordens, de modo que  $a_i = \sqrt{|\eta_1/\eta_3|} \epsilon_r$ . Note que MZA não pode ser utilizada para  $\eta_1 = 0$  (veja a seção 2.3.1).

Para a DTA a razão entre os termos de segunda e primeira ordem é dada por (eq. 2.59):

$$\frac{w_i^{(2)}}{w_i^{(1)}} = -\frac{3}{14} (\lambda_j^0 + \lambda_k^0) a.$$

Queremos que maior valor da razão  $w_i^{(2)}/w_i^{(1)}$  seja da ordem de  $\epsilon_r$ , dessa forma, escolhemos  $a_i$  pela relação

$$a_i = \frac{\epsilon_r}{\max(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0)}.$$

Aqui novamente teremos  $t_i = -a_i^{-1/2}$ .

Na CZA, assim como na ZA, já temos a solução analítica, de modo que podemos obter  $w_i$  para todo  $a$ , dados os três  $\lambda_i^0$ .

No caso da LTA, escolhemos  $a_i$  de modo que a maior razão entre os termos de segunda e primeira ordem de  $\delta$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  e  $\varepsilon$  seja da ordem de  $\epsilon_r$ .

Para  $\delta_0 > \varepsilon_0$  termos

$$a_i = \frac{\epsilon_r}{|\delta_0|}$$

Se  $\delta_0 < \varepsilon_0$  então

$$a_i = \frac{\epsilon_r}{\varepsilon_0}$$

Assim

$$a_i = \frac{\epsilon_r}{\max(\varepsilon_0, |\delta_0|)}$$

Se ambos tendem a zero, teríamos  $a_i \rightarrow \infty$ . Isso não é nenhum problema, já que nesse caso teríamos  $\delta(\tau) = \theta(\tau) = \sigma(\tau) = \varepsilon(\tau) = 0$ . Mas como queremos que o programa pare em  $a = a_f$ , faremos  $a = a_f - 10^{-5}$  se  $\max(\varepsilon_0, |\delta_0|) < 10^{-15}$ . Na variável temporal  $\tau$  teremos  $\tau_i = \sqrt{a_i}$ .

Para várias aplicações, como a comparação com o modelo do elipsóide homogêneo ou com as simulações de  $N$ -corpos, precisamos conhecer os autovalores do tensor de deformação  $w_i$ . Na ZA, MZA, DTA e CZA essa quantidade é calculada diretamente ao resolvermos essas aproximações. No caso da LTA, para obter  $w_i$  nós integramos as equações para os parâmetros cinemáticos (eqs. 2.103 a 2.106, 2.109 e 2.110), junto com a (2.152), conforme discutido na seção 2.3.4.

Quando  $\delta \gg 1$  fazemos uma mudança de variáveis na LTA partir de um dado  $\delta = \delta_m$ , conforme discutido na seção 2.3.4. O valor de  $\delta_m$  é escolhido de modo proporcionar uma boa precisão no resultado final, minimizando também tempo total de integração (de  $a_i$

a  $a_c$ ). Nós utilizamos  $\delta_m = 10$  que dá a melhor relação precisão/tempo de integração. O menor tempo é obtido para  $\delta_m \approx 1$ , mas a integração é menos acurada nesse caso.

Se a densidade diverge, significa que pelo menos um  $w_i$  está tendendo a  $-1$ . Dessa forma, nós utilizamos o seguinte critério de convergência: quando o menor  $w_i$  diferir de  $-1$  por uma certa quantidade  $p$  para-se a integração. O fator de escala no colapso  $a_c$  é então determinado pelo valor de  $a$  quando a seguinte condição é cumprida

$$\min(w_1, w_2, w_3) < -1 + p.$$

Para pequenos valores do parâmetro  $p$ ,  $a_c$  converge para um valor bem definido. Escolhendo  $p = 10^{-4}$  obtemos para  $a_c$  erros menores que 0,1% com relação ao resultado exato.

Se o elemento de volume se expande indefinidamente até um certo  $a_{máx}$  paramos a integração. Evidentemente há elementos de volume que colapsarão para um  $a$  finito maior que  $a_{máx}$  e outros que realmente se expandirão indefinidamente. No espaço de parâmetros das condições iniciais há uma região finita que colapsa entre  $a = a_{máx}$  e  $a = \infty$ . Quanto maior  $a_{máx}$  menor será essa região. Por exemplo, se mantemos  $\delta_0$  e  $\alpha_0$  fixos e analisamos como varia o  $\varepsilon_0$  correspondendo a  $a_c = a_{máx}$ , vemos que  $\varepsilon_0$  converge para um valor bem definido à medida que aumentamos  $a_{máx}$ . Verificamos que a curva  $a_c$  em função de  $\varepsilon_0$  toca o valor  $a_c = \infty$  com derivada nula (veja a seção 3.3.2, em particular a figura 3-5). Nós determinamos a região que não colapsa variando  $a_{máx}$  e verificamos que uma ótima convergência é obtida para  $a_{máx} = 10^6$ .

Se nós queremos obter uma saída para um dado valor  $a = a_f$ , paramos a integração para  $a_n > a_f$ . No entanto, teremos os resultados para um valor de  $a$  maior que  $a_f$  e, se o passo for razoavelmente grande, a diferença pode ser apreciável. Nós guardamos os valores de  $w_i$  imediatamente antes de  $a_f$  (para  $a_{n-1}$ ) e, com os valores para  $a_n$ , fazemos uma interpolação linear para obter  $w_i(a_f)$ .

A integração das equações diferenciais na MZA, DTA e LTA é feita utilizando-se o

método de Runge-Kuta adaptativo de quarta ordem [76]. Escrevemos cada conjunto de equações como um sistema de equações acopladas de primeira ordem. Os erros na rotina de integração são controlados pelo parâmetro  $eps$ . Para  $eps = 10^{-7}$  obtemos erros da ordem de 0,1% em  $a_c$ .

Em resumo, temos os seguintes parâmetros de controle que determinam a precisão e o tempo de integração:

- $a_i$ : valor inicial do fator de escala;
- $\delta_m$ : critério para realizar a mudança de variável (apenas para a LTA);
- $p$ : critério para parar a integração quando o elemento diverge;
- $a_{máx}$ : critério para parar a integração quando o elemento expande indefinidamente;
- $eps$ : controle da rotina de integração;

Para determinar a precisão da integração em função desses parâmetros, nós comparamos o valor de  $a_c$  com a solução exata nas três simetrias. Também calculamos  $a_c$  com condições iniciais genéricas e vimos como os resultados convergem quando diminuímos esses parâmetros. A maior influência no tempo de execução é dada pela precisão do método Runge-Kuta controlada por  $eps$ . Os outros parâmetros pouco influenciam o tempo do programa, no entanto eles são importantes para definir a precisão do resultado. Se  $\epsilon_r$  é muito pequeno, iniciaremos com  $a_i$  pequeno demais e teremos muitos passos na integração temporal. Se começamos com o maior valor de  $a$  possível, teremos menos erros acumulados, mas ele tem que ser pequeno o suficiente para a solução de segunda ordem diferir pouco do resultado exato. Se  $p$  é pequeno demais, esperaremos muito até um elemento colapsar, sem ganhar muito na precisão de  $a_c$ , o mesmo ocorre se aumentamos demais  $a_{máx}$ , o programa demorará mais, sem termos uma diferença apreciável do número de elementos que colapsam.

Uma coisa que também influencia o tempo de execução do programa é a frequência com que escrevemos os resultados. Se estamos interessados apenas nas quantidades finais,

é melhor não escrever nada no arquivo. Se desejamos acompanhar a evolução temporal, é bom escrever um resultado a cada cem ou mil passos.

Para dar uma idéia do tempo de execução dos programas, mostramos um exemplo de uma simulação típica. Para investigar o comportamento com condições iniciais genéricas (seção 3.3.2) e fazer os gráficos das figuras 3-2 e 3-3 utilizamos 10.000 elementos de volume (ou seja  $10^4$  condições iniciais diferentes). A integração leva da ordem de três horas num computador com processador *pentium* de 266MHz, para o caso da LTA e uma hora e meia para a DTA. Para a MZA o cálculo leva poucos minutos e para a CZA e ZA, alguns segundos. Nesse exemplo, a integração é feita até o colapso do elemento de volume, ou até  $a_{máx}$ . Uma simulação cosmológica típica envolve  $64^3 = 26.2144$  ou  $128^3$  partículas e levaria da ordem de um dia num computador pessoal. Uma simulação análoga utilizando simulações de  $N$ -corpos pode levar semanas em um *cluster* de PCs.

Pretendemos fazer um pacote com a implementação numérica das aproximações locais e deixá-lo disponível livremente na rede. Os programas encontram-se à disposição dos interessados.

### 3.3 Aplicações das Aproximações Locais

Agora que analisamos cada aproximação local e estudamos algumas propriedades gerais dessas aproximações, vamos considerar as suas aplicações. Podemos dividi-las em três classes:

- Aplicações onde entra apenas a dinâmica local;
- Aplicações utilizando a distribuição estatística de condições iniciais;
- Aplicações para uma dada distribuição espacial de condições iniciais.

Na primeira categoria, estudamos as aproximações locais em função das condições iniciais. É uma análise puramente local, onde não estamos preocupados em como essas condições iniciais se distribuem no espaço, ou quais as suas probabilidades. Várias propriedades podem ser extraídas dessa análise, como o tempo de colapso de um elemento

de volume, sua geometria final e o comportamento assintótico em função das condições iniciais. Consideraremos duas aplicações desse tipo: Na seção 3.3.1 aplicaremos as aproximações locais a um elipsóide homogêneo, para testá-las face a uma solução exata. Na seção 3.3.2 estudaremos algumas propriedades do colapso com condições iniciais genéricas.

No entanto, para aplicações práticas à cosmologia temos que considerar a distribuição de condições iniciais. É possível determinar a distribuição de probabilidades das condições iniciais,  $\lambda_i^0$  a partir do espectro primordial de flutuações (apêndice B). Como as aproximações locais só dependem de  $\lambda_i^0$ , podemos calcular várias propriedades estatísticas, sem a necessidade de termos a distribuição espacial, apenas com a distribuição  $P(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0)$ , essa é uma das grandes vantagens das aproximações locais. Entre as quantidades estatísticas que podem ser calculadas temos a fração  $n_c(a)$  de objetos colapsados em função de  $a$ , a distribuição de probabilidade do contraste de densidade  $f(\delta, a)$  e a função de massa  $n(M, a)$  que determina a densidade de objetos de massa  $M$ . Algumas quantidades, como a função de massa, por exemplo, têm um papel importante na comparação com os dados observacionais e com as simulações de  $N$ -corpos. Na seção 3.3.3 utilizamos as aproximações locais para calcular a função de massa a partir da distribuição de condições iniciais, para flutuações primordiais gaussianas (apêndice B).

A terceira aplicação consiste em evoluir o campo inicial de densidades (junto com os outros parâmetros cinemáticos), para uma dada distribuição espacial  $\delta(\mathbf{x})$ . Ela permitira testar a dinâmica fornecida pelas aproximações locais em sua plenitude, através da comparação com simulações de  $N$ -corpos. Desse tipo de aplicação podem ser obtidas outras propriedades estatísticas de interesse observacional. Discutiremos os métodos propostos para a comparação com as simulações computacionais na seção 3.5.1. Estes ainda não foram implementados nem aplicados a uma simulação real e serão assunto de investigação futura.

### 3.3.1 O Elipsóide Homogêneo

Vamos agora estudar o caso de um elipsóide homogêneo num universo em expansão. Esse modelo oferece uma situação mais geral do que as três simetrias, nas quais as aproxi-



mações locais são exatas. Além disso, ainda é possível fazer um tratamento analítico aproximado nessa situação. Dessa forma o modelo do elipsóide homogêneo, que descreveremos a seguir, é um bom ponto de partida para fazer uma comparação com as aproximações locais. Na seção 3.4.1 aplicamos a teoria de perturbação lagrangiana ao elipsóide e comparamos com as expansões em série das aproximações locais.

Pela sua importância em várias aplicações, vamos considerar em detalhes o modelo do elipsóide homogêneo. Deduziremos as equações do elipsóide num universo em expansão no contexto da cosmologia newtoniana. Os semi-eixos do elipsóide em coordenadas comóveis serão denotados por  $Y_i(t)$  e os seus valores iniciais por  $X_i$ . Supondo que o elipsóide é homogêneo, teremos

$$\delta = \begin{cases} \delta(t), & \text{dentro do elipsóide.} \\ 0, & \text{fora do elipsóide.} \end{cases}$$

Dentro do elipsóide, a solução da equação de Poisson  $\nabla^2\phi = 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta$  fica [73, 74]:

$$\phi = A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 + B, \quad (3.20)$$

onde

$$A_i = \pi G\bar{\rho}a^2\delta Y_1Y_2Y_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(Y_i^2 + s)\sqrt{(Y_1^2 + s)(Y_2^2 + s)(Y_3^2 + s)}} \quad (3.21)$$

e

$$B = -\pi G\bar{\rho}a^2\delta Y_1Y_2Y_3 \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(Y_1^2 + s)(Y_2^2 + s)(Y_3^2 + s)}}.$$

Os eixos de coordenadas foram escolhidos coincidindo com as direções dos semi-eixos do elipsóide. Note que os  $A_i$  só dependem da razão entre os eixos, ou seja, se multiplicamos todos os  $Y_i$  por uma mesma constante, o campo gravitacional  $\phi_i$  não se altera dentro do elipsóide. Assim, o campo num ponto  $\vec{x}$  do elipsóide não depende do seu tamanho, apenas de sua forma. Esse resultado é análogo ao teorema de Gauss aplicado a uma

distribuição esférica, para a qual apenas as cascas esféricas interiores a um dado ponto contribuem para o campo nesse ponto. Aqui as cascas elipsoidais externas ao ponto  $\vec{x}$  não contribuem.

Pode-se verificar facilmente que as expressões (3.20) e (3.21) satisfazem

$$\nabla^2 \phi = 2(A_1 + A_2 + A_3) = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta.$$

Para a integração numérica do elipsóide é melhor utilizar a coordenada temporal  $t$ . A equação de Euler (2.6) para um elemento de volume dentro do elipsóide fica

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -2a^2 \sum_{i=1}^3 A_i x_i, \quad (3.22)$$

onde  $x_i(t)$  é a trajetória elemento em questão. Como  $A_i$  não depende de  $x_i$ , se multiplicamos cada componente por uma constante  $\alpha_i$ , essa equação não se altera. Se  $x_i^A$  é a trajetória de uma partícula com posição inicial  $q_i^A$ , a trajetória de uma partícula com posição inicial  $q_i^B$  será dada por<sup>3</sup>  $x_i^B = x_i^A q_i^B / q_i^A$ . Se escolhermos  $x_i^A$  como sendo cada eixo do elipsóide, teremos

$$x_i = q_i \frac{Y_i(t)}{X_i} \quad (3.23)$$

O volume do elipsóide é:  $V_e = (4\pi/3)a^3 Y_1 Y_2 Y_3$ . Supondo que a massa é conservada, teremos  $\rho_e V_e = \text{const.}$ , de modo que  $\rho_e \propto a^{-3} (Y_1 Y_2 Y_3)^{-3}$ . Lembrando que  $\bar{\rho} = \bar{\rho}_i a_i^3 / a^3$ , o contraste de densidade dentro do elipsóide será dado por

$$\delta = \frac{\rho_e - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{\rho_{ei} a_i^3 X_1 X_2 X_3}{a^3 Y_1 Y_2 Y_3} \frac{a^3}{\bar{\rho}_i a_i^3} - 1 = \frac{\rho_{ei} X_1 X_2 X_3}{\bar{\rho}_i Y_1 Y_2 Y_3} - 1. \quad (3.24)$$

Como estamos interessados em condições iniciais lineares, desejamos que  $\rho_e \rightarrow \bar{\rho}$  quando  $a \rightarrow 0$ , de forma que  $\rho_{ei} = \bar{\rho}_i$ . Substituindo essa relação na equação de movimento (3.22),

---

<sup>3</sup>Nesta seção não utilizaremos a convenção da soma sobre os índices repetidos. \*

obtemos

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -2\pi G \bar{\rho} a^4 x_i (X_1 X_2 X_3 - Y_1 Y_2 Y_3) \frac{2}{3} R_D(Y_k^2, Y_j^2, Y_i^2),$$

onde

$$R_D(x, y, z) := \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(z+s) \sqrt{(x+s)(y+s)(z+s)}}, \quad (3.25)$$

é integral de Carlson do terceiro tipo [75, 76]. Essa integral pode ser integrada numericamente com grande precisão [76]. Também é possível escrevê-la em termos das integrais elípticas de Legendre do 1º e 2º tipo [76].

Num universo plano e dominado pela matéria ( $4\pi G a^4 \bar{\rho} = 6t^{-2}$ ), a equação de movimento para cada semi-eixo  $Y_i$  fica

$$\frac{d^2 Y_i}{dt^2} = -\frac{2}{t^2} Y_i (X_1 X_2 X_3 - Y_1 Y_2 Y_3) R_D(Y_k^2, Y_j^2, Y_i^2). \quad (3.26)$$

### Condições iniciais

Como fizemos com as aproximações locais, escolheremos as condições iniciais com base na solução de primeira ordem do modo crescente. Para pequenas perturbações, teremos

$$Y_i = X_i (1 + F_i),$$

com  $F_i \ll 1$ . Neste caso é melhor escrever a (3.26) novamente em termos de  $\delta$ . Como sabemos o comportamento de  $\delta$  para perturbações lineares ( $\delta = a\delta_0$ ), evitaremos ter equações acopladas para  $F_i$

$$\frac{d^2 F_i}{dt^2} = -\frac{2}{t^2} (1 + F_i) \delta_0 a Y_1 Y_2 Y_3 R_D(Y_k^2, Y_j^2, Y_i^2)$$

Como  $\delta$  já é de primeira ordem, só devemos considerar os outros termos em ordem zero, de modo que

$$\frac{d^2 F_i}{dt^2} = -\frac{2}{t^4} \delta_0 \beta_i,$$

onde

$$\beta_i := X_1 X_2 X_3 R_D(X_k^2, X_j^2, X_i^2). \quad (3.27)$$

A solução dessa equação é  $F_i = -\delta_0 a \beta_i / 3$ . Assim a solução linear é

$$Y_i = X_i \left( 1 - \frac{a \delta_0 \beta_i}{3} \right). \quad (3.28)$$

Note que obtivemos apenas o modo crescente, pois escolhemos a solução crescente para  $\delta$ .

Utilizando a (3.23) temos que o tensor de deformação é, em primeira ordem

$$J_{ij} = \left( 1 - \frac{a \delta_0 \beta_i}{3} \right) \delta_{ij}, \quad (3.29)$$

de modo que

$$\Psi_{ij}^0 = -\frac{\delta_0 \beta_i}{3} \delta_{ij}, \quad (3.30)$$

ou seja  $\lambda_i^0 = \delta_0 \beta_i / 3$ . Notando que  $\beta_i$  (eq. 3.27) é invariante por uma transformação de escala nos eixos, temos que as condições iniciais são determinadas pelo contraste inicial de densidade  $\delta_0$  e as razões iniciais entre os eixos (por exemplo  $X_2/X_1$  e  $X_3/X_1$ ).

## Parâmetros cinemáticos

A partir da equação (3.23) podemos escrever a velocidade peculiar como

$$v_i = \frac{1}{a} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{aY_i} Y_i' x_i,$$

de modo que o gradiente da velocidade fica simplesmente:

$$v_{i,j} = \frac{Y_i'}{aY_i} \delta_{ij}.$$

Assim, os parâmetros cinemáticos serão dados por:

$$\theta = \sum_{i=1}^3 \frac{Y_i'}{aY_i} \quad (3.31)$$

$$\sigma_{ij} = \text{diag} \left( \frac{Y_i'}{aY_i} - \frac{1}{3}\theta \right) \quad (3.32)$$

A derivada segunda do potencial é

$$F_{ij} = 2A_i \delta_{ij} = 2\pi G \bar{\rho} a^2 \delta Y_1 Y_2 Y_3 R_D(Y_k^2, Y_j^2, Y_i^2),$$

de forma que o tensor de maré será, em EdS

$$E_{ij} = F_{ij} - \frac{4\pi}{3} G a^2 \bar{\rho} \delta = \frac{2}{a} \delta \text{diag} (\beta_i - 1).$$

O contraste de densidade é (eq. 3.24)

$$\delta = \frac{X_1 X_2 X_3}{Y_1 Y_2 Y_3} - 1. \quad (3.33)$$

Podemos ver que a equação de continuidade (2.11) é satisfeita pelas (3.33) e (3.31):

$$\frac{d\delta}{adt} = -\frac{1}{a} \frac{X_1 X_2 X_3}{Y_1 Y_2 Y_3} \left( \frac{Y_1'}{Y_1} + \frac{Y_2'}{Y_2} + \frac{Y_3'}{Y_3} \right) = -(1 + \delta) \theta.$$

## Discussão

Note que, para obtermos as (3.20) e (3.21) tivemos de supor que a distribuição de matéria se mantém homogênea e sob a forma de um elipsóide. Na realidade, o campo de maré do elipsóide perturbará a distribuição de matéria exterior (o potencial fora do elipsóide não é quadrático [73]), causando desvios da homogeneidade. Estes, por sua vez, produzirão campos de maré no interior do elipsóide, o que perturbará a sua homogeneidade. Outra maneira de enxergar o problema, é que como a taxa de expansão em cada eixo é diferente da expansão média, não há como manter tanto o exterior como o interior do elipsóide homogêneos. Por isso chamamos a solução discutida acima de *modelo* do elipsóide homogêneo. Esperaríamos que um tratamento completo do elipsóide, sem pressupor a homogeneidade levasse a uma distribuição heterogênea. Entretanto, simulações de  $N$ -corpos foram aplicadas a um elipsóide inicialmente homogêneo, mostrando que a solução discutida nesta seção é muito boa [77, 72]. Isso se deve a que, no início, a distribuição de matéria fora ainda é bem homogênea; enquanto para tempos mais avançados a densidade do fundo é bem menor do que a do elipsóide. Note que solução do elipsóide no vácuo é exata. Na seção 3.4.1 aplicaremos a teoria de perturbação lagrangiana até a terceira ordem e mostraremos que a homogeneidade é mantida até essas ordem.

O modelo do elipsóide homogêneo num universo em expansão foi estudado pela primeira vez por Icke [78] e White & Silk [79]. Em vez de resolver a integral  $R_D(Y_k^2, Y_j^2, Y_i^2)$ , White & Silk encontram uma equação de evolução para  $\alpha_i := Y_1 Y_2 Y_3 R_D(Y_k^2, Y_j^2, Y_i^2)$  que é integrada junto com as equações de evolução dos eixos. Supondo que  $\alpha_i$  é constante, eles desenvolvem uma aproximação que é melhor que a de Zel'dovich aplicada ao elipsóide [79]. O modelo do elipsóide também foi aplicado à formação de galáxias em aglomerados [78]. Einsentein & Loeb [77] aplicam uma extensão do modelo do elipsóide para considerar os efeitos de maré externa (com potencial quadrático) sobre uma distribuição elipsoidal homogênea de matéria, inicialmente esférica. A solução do elipsóide no vácuo também teve muitas aplicações, uma das mais conhecidas é o estudo da instabilidade de Lin-Mestel-Shu [80].

A dedução das equações do modelo do elipsóide homogêneo, partindo da cosmologia

newtoniana em coordenadas co-móveis, apresentada aqui difere da abordagem usual na literatura. Há duas motivações para o enfoque desenvolvido nesta seção: em primeiro lugar, essa dedução é mais natural no contexto da cosmologia newtoniana; em segundo lugar, ela é a mais apropriada para a integração numérica. Na forma mais habitual, ao integrar numericamente as equações do elipsóide começando com condições iniciais lineares, somos obrigados a fazer algumas mudanças de variáveis que são equivalentes a passar para o sistema co-móvel. Obviamente, partindo do tratamento usual (veja por exemplo a ref. [72]) e transformando para coordenadas co-móveis e o tempo  $t$ , obtemos os mesmos resultados desta seção.

### Aproximações locais aplicadas ao elipsóide

Nesta seção, apresentamos uma comparação entre as aproximações locais aplicadas ao elipsóide e o modelo do elipsóide homogêneo (MEH). No MEH forneceremos  $X_i$  e  $\delta_0$  e evoluímos os eixos  $Y_i$  pela equação (3.26), com as condições iniciais dadas pela equação (3.28). Nas aproximações locais obtemos as condições iniciais  $\lambda_i^0$  pela relação  $\lambda_i^0 = \delta_0 \beta_i / 3$  (eq. 3.29). No caso do elipsóide homogêneo, é possível obter as posições dos elementos de volume nas aproximações locais, como veremos a seguir.

A partir da equação (3.23) podemos determinar o tensor de deformação dentro do elipsóide

$$J_{ij} = \text{diag} \left( \frac{Y_i(t)}{X_i} \right), \quad (3.34)$$

que é diagonal e independente da posição. A expressão (3.23) não depende explicitamente da variação temporal de  $Y_i$  mas é consequência da homologia do colapso: todas as cascas elipsoidais mantêm a mesma razão entre os eixos e a mesma taxa de expansão, de modo que a homogeneidade é preservada.

Como vimos na seção (3.1.2), as posições dos elementos de volume nem sempre podem ser recuperadas nas aproximações locais. No entanto, se supusermos que o tensor de deformação é independente da posição podemos obter facilmente:  $x_i = (1 + w_i) q_i$ .

Assim, os eixos do elipsóide serão dados por:

$$Y_i = (1 + w_i) X_i. \quad (3.35)$$

Com isso estamos supondo que as aproximações locais preservam a homogeneidade e a forma do colapso (ou que geram apenas pequenos desvios). No entanto elas podem levar a uma evolução temporal diferente da solução do elipsóide homogêneo, já que estamos utilizando o tensor de deformação calculado pelas aproximações locais e não pela equação (3.26).

Nas aproximações locais, calcularemos a evolução dos eixos do elipsóide pela relação (3.35). Para uma melhor visualização, é conveniente mostrar o tamanho dos eixos nas coordenadas usuais  $R_i = aY_i$ .

Na figura 3-1 comparamos a evolução temporal dos eixos  $R_i = aY_i$  de um elipsóide nas cinco aproximações locais: ZA, MZA, DTA, CZA e LTA. Escolhemos, arbitrariamente, os valores iniciais dos semi-eixos  $X_i$  como sendo 1 : 1.25 : 1.5 e o contraste inicial de densidade  $\delta_0 = 1$ . A conclusão geral não depende muito da escolha desses valores iniciais, como veremos na próxima seção. Vemos que os resultados dessas aproximações, excetuando-se a ZA, estão muito próximos do modelo do elipsóide homogêneo. A ZA superestima o tempo de colapso, mostrando que uma simples extrapolação linear das trajetórias subestima os efeitos não-lineares. Uma característica geral que podemos notar é que, nos dois eixos maiores, o colapso ocorre um pouco antes nas aproximações locais do que no MEH; enquanto no eixo menor a situação é oposta. Dessa forma, as forças de maré são um pouco menores nas aproximações locais do que no MEH, já que no MEH o elipsóide fica mais achatado. Com relação ao tempo de colapso  $a_c$ , todas essas aproximações fornecem resultados muito similares, como podemos ver na tabela 3.1. As diferenças são menores que 5%. A MZA proporciona o valor mais próximo do MEH. Considerando entretanto, que o próprio MEH ignora os efeitos da interação do elipsóide com o fundo homogêneo, isso não indicaria necessariamente que a MZA tem o melhor desempenho entre as aproximações locais (veja, entretanto a seção 3.4.1). De fato, para



grandes cisalhamentos a MZA se desvia das outras, como veremos na próxima seção.

Aproximação	$a_c$
MEH	1.569
MZA	1.578
CZA	1.582
LTA	1.612
DTA	1.633

Tabela 3.1: Tempo de colapso de um elipsóide homogêneo nas diversas aproximações locais.

O MEH já foi utilizado anteriormente na literatura para a comparação com algumas aproximações locais. Uma comparação da evolução dos eixos  $R_i$  entre o modelo do elipsóide homogêneo e a LTA foi desenvolvida por Hui & Bertschinger [72]. Uma análise semelhante foi feita por Betancort-Rijo e López-Corredoira [70] no caso da CZA. Audit e Alimi [69] compararam o MEH com a DTA, mas sem obter  $R_i$ , apenas com a evolução temporal dos parâmetros cinemáticos. Aqui comparamos todos esses resultados, incluindo a MZA e calculando  $R_i$  para a DTA.

No caso do elipsóide, fica aparente uma das grandes vantagens das aproximações locais, que é o menor tempo de cálculo. Mesmo nessa situação em que temos uma expressão analítica para o campo gravitacional que pode ser calculada com um bom algoritmo, essas aproximações demoram um décimo ou menos que a integração do modelo do elipsóide homogêneo. No caso heterogêneo, deve-se resolver a equação de Poisson utilizando a transformada de Fourier ou algum outro método, o que aumenta ainda mais a diferença de tempo com relação às aproximações locais.

### 3.3.2 Condições Iniciais Genéricas

As soluções de primeira e segunda ordem das aproximações locais foram discutidas nas seções 2.3.1 a 2.3.4. Nós voltaremos ao estudo perturbativo dessas aproximações na seção 3.4, onde faremos uma comparação com a teoria de perturbação lagrangiana. Entretanto, é importante ver como essas aproximações se comportam no regime altamente não-linear. O elipsóide homogêneo oferece a possibilidade de estudar as aproximações locais ao longo

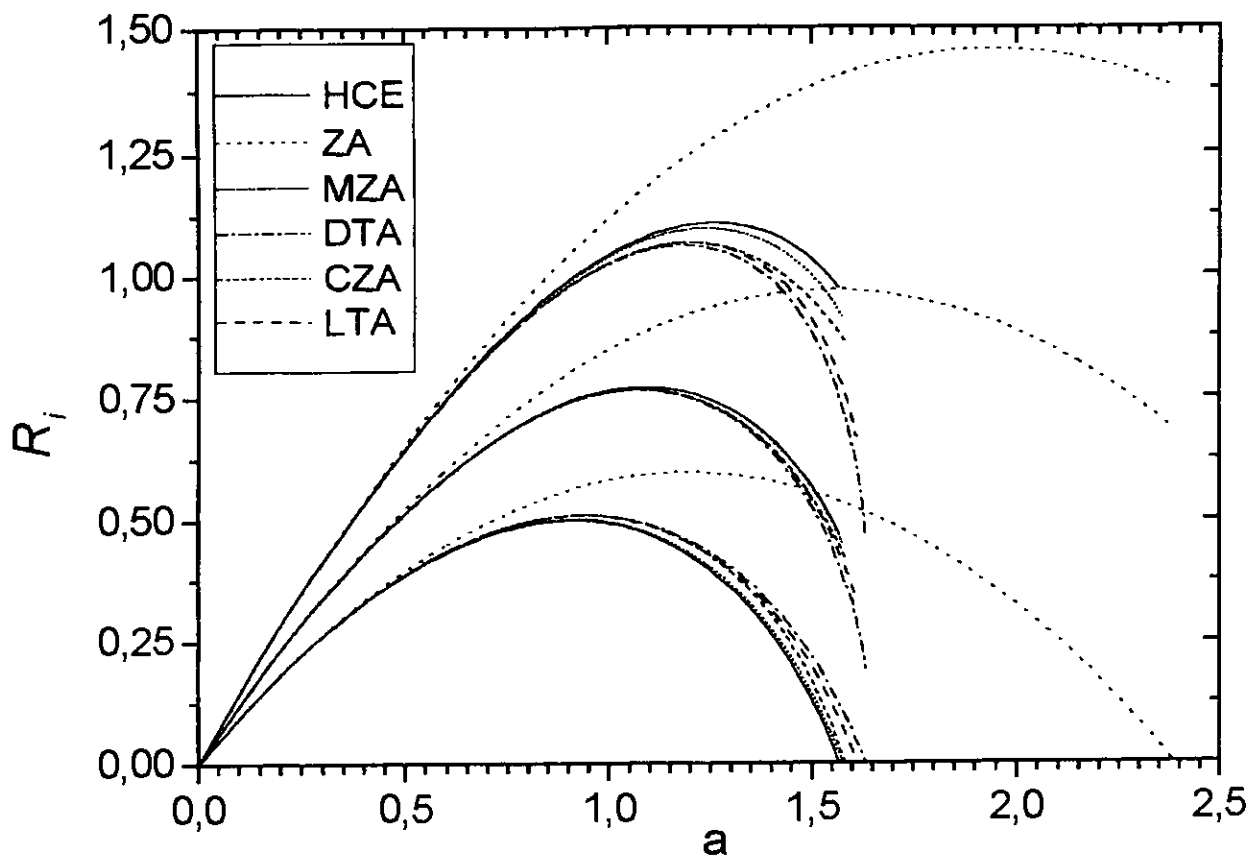


Figura 3-1: Evolução dos três eixos  $R_i$  de um elipsóide segundo o modelo do elipsóide homogêneo (MEH, linha contínua) e cinco aproximações locais: Zel'dovich (ZA, curva pontilhada), Zel'dovich modificada (MZA, pontilhado curto), do tensor de Deformação (DTA, traço-ponto), de Zel'dovich completa (CZA, tracejado curto) e de maré local (LTA, tracejado longo). Os valores iniciais dos eixos são 1 : 1.25 : 1.5 e o contraste inicial de densidade é  $\delta_0 = 1$ . A ZA superestima o tempo de colapso, enquanto as outras aproximações fornecem resultados próximos ao MEH.

de toda a evolução, comparando os resultados com um modelo analítico. No entanto, as condições iniciais que podem ser associadas a um elipsóide são bastante restritas. Nesta seção estudaremos o comportamento das aproximações locais com condições iniciais genéricas. Em particular, calcularemos o tempo de colapso  $a_c$  de um elemento de volume em função das condições iniciais. Essa quantidade oferece uma espécie de resumo de toda a evolução, até o regime altamente não-linear. Além disso, conhecendo  $a_c$  poderemos calcular a função de massa e a fração de elementos que colapsam em cada aproximação (como veremos na próxima seção). A quantidade  $a_c$  tem uma interpretação física simples, pois está relacionada com o desvio para o vermelho  $z$  quando ocorre o colapso de um dado elemento de volume. Como vimos na seção 2.1,  $z_c = a_c^{-1} - 1$ .

As condições iniciais serão parametrizadas por  $\delta_0$ ,  $\varepsilon_0$  e  $\alpha_0$ . Como vimos na seção 2.3.4 essas quantidades permitem especificar completamente as condições iniciais lineares do modo crescente, além disso elas são as variáveis naturais da LTA. No caso das outras aproximações (ZA, MZA, DTA e CZA) as condições iniciais são dadas por (veja a seção 2.3.4)

$$\lambda_i^0 = \frac{2}{3}\varepsilon_0 Q_i(\alpha_0) + \frac{1}{3}\delta_0, \quad (3.36)$$

onde  $Q_i(\alpha)$  é

$$Q_i(\alpha) = \left[ \cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\alpha - 2\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right]. \quad (3.37)$$

Lembramos que  $\varepsilon_0$  está ligado à magnitude do cisalhamento e maré iniciais (note que, no regime linear  $E_{ij} \propto \sigma_{ij}$ ),  $Q_i(\alpha_0)$  dá a razão entre os autovalores de  $E_{ij}$  e  $\sigma_{ij}$  e  $\delta_0$  é o contraste de densidade extrapolado linearmente para  $a = 1$ . Como vimos, o parâmetro  $\varepsilon_0$  varia de 0 a  $\infty$ .  $\alpha_0$  vai de 0 a  $\pi$ , e  $\delta_0$  pode tomar valores entre<sup>4</sup>  $-\infty$  e  $+\infty$ . Entretanto, é suficiente estudar a dinâmica para  $\delta_0 = +1$  e  $\delta_0 = -1$ , como veremos a seguir.

---

<sup>4</sup>Note que as condições iniciais são definidas para  $a \rightarrow 0$ . O valor mínimo de  $\delta$  é  $-1$ . Como  $\delta = a\delta_0$  para  $a$  pequeno,  $\delta_0$  pode tomar valores até  $-\infty$ .

As perturbações iniciais são definidas como a razão entre uma dada quantidade e o seu fator de crescimento no regime linear (seção 2.2). Em particular, para o contraste de densidade  $\delta_0$  temos:

$$\delta_0 = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\delta}{D}.$$

Num universo de Einstein-de Sitter, temos  $D = a$ . Dessa forma, escolher diversos valores de  $\delta$  é equivalente a re-escalar  $a$ . Isso vale para todos os parâmetros cinemáticos. Dessa forma, as equações de movimento nas aproximações locais são invariantes sob a seguinte transformação de escala

$$\delta_0 \rightarrow c\delta_0, \quad \varepsilon_0 \rightarrow c\varepsilon_0, \quad e \quad a \rightarrow c^{-1}a. \quad (3.38)$$

Devido a essa invariância, podemos expressar o tempo de colapso  $a_c$  na forma [81]:

$$a_c(\delta_0, \varepsilon_0, \alpha_0) = \begin{cases} |\delta_0^{-1}| a_c^+(\varepsilon_0/|\delta_0|, \alpha_0), & \text{se } \delta_0 > 0 \\ |\delta_0^{-1}| a_c^-(\varepsilon_0/|\delta_0|, \alpha_0), & \text{se } \delta_0 < 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

onde  $a_c^\pm(\varepsilon_0/\delta_0, \alpha_0) = a_c(\pm 1, \varepsilon_0/|\delta_0|, \alpha_0)$ . Assim, precisamos apenas calcular as funções  $a_c^+$  e  $a_c^-$  que dependem de  $\varepsilon_0/|\delta_0|$  e  $\alpha_0$  apenas. Na prática, escolhemos  $\delta_0 = 1$  e  $\delta_0 = -1$  e variamos  $\alpha_0$  e  $\varepsilon_0$ .

Nas figuras 3-2 e 3-3, mostramos os gráficos do tempo de colapso  $a_c$  como função de  $\varepsilon_0$  e  $\alpha_0$  para perturbações sobre e subdensas, respectivamente. Como a MZA e CZA não se aplicam a algumas regiões subdensas, não mostramos os resultados dessas aproximações na figura 3-3. Mostramos também os sinais de  $\lambda_i^0$  correspondendo às condições iniciais nessas duas figuras.

O espaço de parâmetros que pode ser gerado por um elipsóide homogêneo com qualquer razão entre os eixos é equivalente a ter os três  $\lambda_i^0$  positivos. A região correspondente ao elipsóide é limitada a um cisalhamento relativamente baixo e todas as aproximações, exceto a ZA, estão significativamente em acordo nessa região. A aproximação de Zel'dovich superestima o tempo de colapso para configurações esféricas. Vemos que as

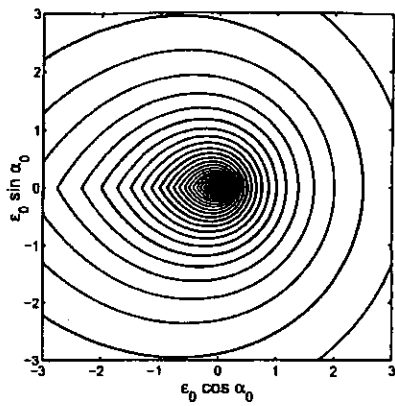


Fig. 2a

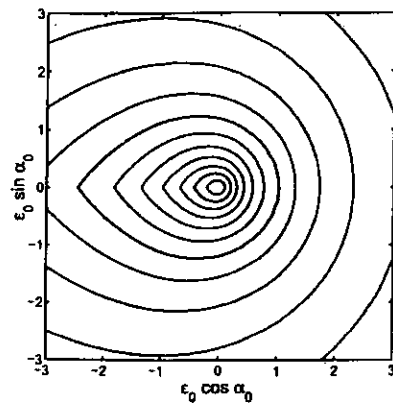


Fig. 2b

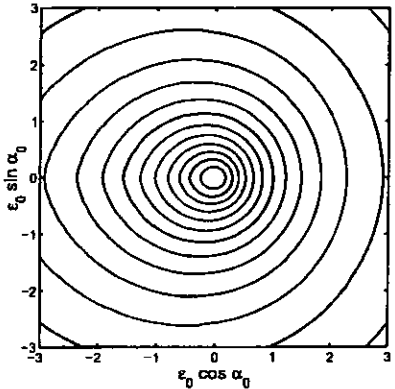


Fig. 2c

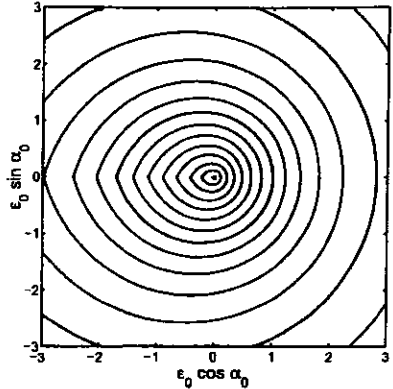


Fig. 2d

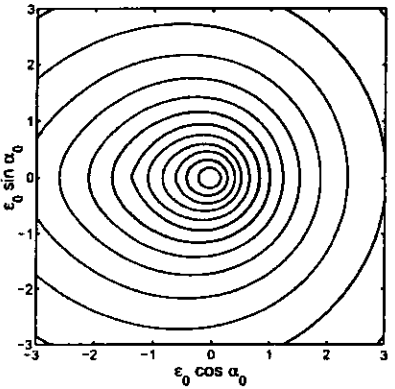


Fig. 2e

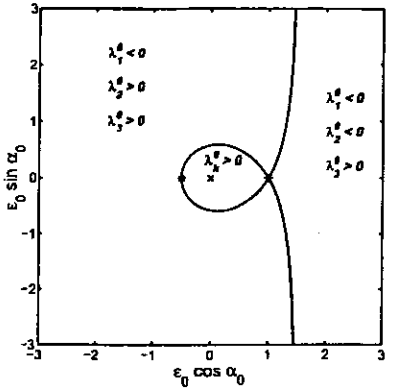


Fig. 2f

Figura 3-2: (a) O tempo de colapso em função das condições iniciais para perturbações sobredensas com  $\delta_0 = +1$ . Os contornos de tempo de colapso constante, expresso pelo fator de escala  $a_c$ , são mostrados para a ZA. As linhas finas são espaçadas de 0.1 em  $a_c$ , enquanto as linhas grossas são espaçadas de 0.5, com o contorno mais externo correspondendo a  $a_c = 0.4$  e o valor central sendo  $a_c = 3$ . (b) O mesmo que em (a), mas desta vez a MZA é utilizada. O contorno central é  $a_c = 1.6$ . (c) O mesmo que em (a) mas com a DTA. O contorno central é  $a_c = 1.6$ . (d) O mesmo que em (a) mas para a CZA. O contorno central é  $a_c = 1.7$  (Aqui estamos usando o ajuste original da CZA, eq. 2.78). (e) O mesmo que em (a) mas a LTA é utilizada. O contorno central é  $a_c = 1.6$ . (f) Os sinais de  $\lambda_i^0$  em cada região do espaço de parâmetros de condições iniciais, com  $\delta_0 = +1$ . A região interior corresponde aos valores de  $\lambda_i^0$  que podem ser varridos por um elipsóide homogêneo com qualquer razão entre os eixos. Perturbações com simetria esférica, plana e cilíndrica são marcadas com uma cruz, um sinal de soma e um asterisco, respectivamente.

aproximações locais continuam similares para perturbações sobredensas em geral, mas a MZA desvia-se substancialmente das outras para grandes cisalhamentos. O cisalhamento sempre acelera o colapso, o que é um efeito não-linear bem conhecido. Assim, as primeiras regiões a colapsarem não são necessariamente aquelas com densidade mais alta. Podemos ver também que configurações inicialmente oblatas, para as quais  $\cos \alpha_0 > 0$ , colapsam primeiro. Dessa forma, o colapso achatado é favorecido por essas aproximações. No caso da NMA o colapso na forma alongada é favorecido [71], ao contrário do que se esperaria a partir da discussão da seção 3.1.1 [82].

Para perturbações subdensas a diferença entre as aproximações é um pouco maior. A LTA fornece tempos de colapso sistematicamente maiores que a DTA. O tempo de colapso dado pela ZA é o menor dos três. É importante notar que, nas aproximações locais, regiões subdensas podem colapsar, devido ao efeito do cisalhamento.

A relevância do cisalhamento na fase não-linear da aglomeração gravitacional está em acordo com as simulações de  $N$ -corpos (veja, por exemplo, as referências [83] e [84] nas quais mostra-se que a formação de aglomerados de matéria não está, necessariamente, associada aos picos na distribuição da densidade), no entanto ele é muitas vezes ignorado em estudos da formação de estruturas. Qualquer modelo baseado no colapso esférico desconsidera esse efeito.

Podemos ver o impacto do cisalhamento sobre o contraste de densidade combinando a equação de continuidade (2.11) com a equação de Raychaudhuri (2.87) para obter uma equação para  $\delta$  [71]:

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = \frac{4}{3} \frac{\dot{\delta}^2}{1 + \delta} + (1 + \delta) \left( \frac{2}{3}\sigma^2 - 2\omega^2 + 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta \right), \quad (3.40)$$

onde usamos que  $\sigma^{ij}\sigma_{ij} = (2/3)\sigma^2$  (eq. 2.101). Essa equação é exata e não depende de nenhuma aproximação. Vemos que, para  $\omega = 0$ , a taxa de crescimento de  $\delta$  é minimizada por  $\sigma = 0$ . Essa conclusão é válida independentemente das suposições sobre a evolução do cisalhamento ou do campo de maré e é devida ao fato geométrico de que o cisalhamento aumenta a taxa de crescimento da convergência das linhas de fluxo do

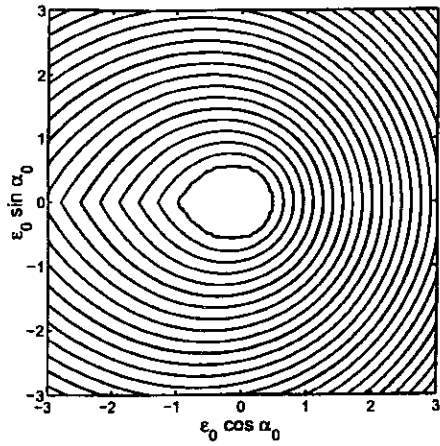


Fig. 3a

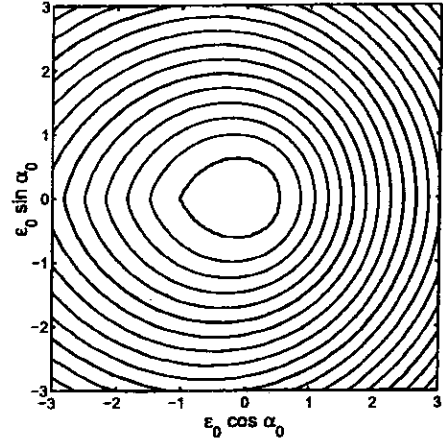


Fig. 3b

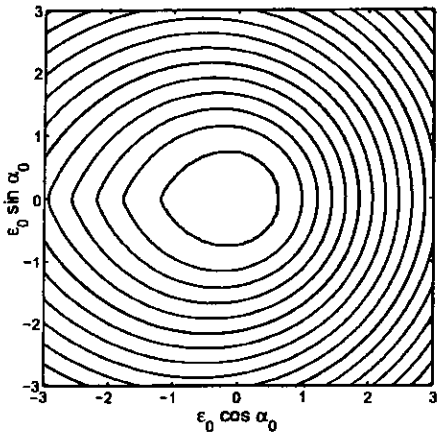


Fig. 3c

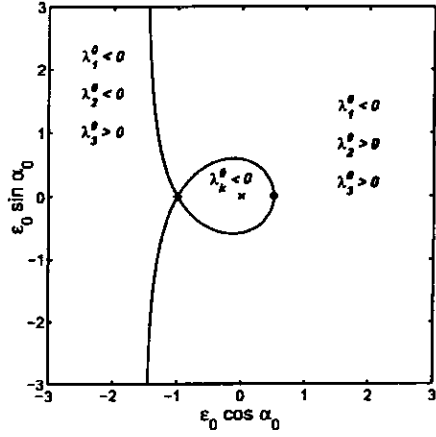


Fig. 3d

Figura 3-3: (a) O tempo de colapso em função das condições iniciais para perturbações subdensas com  $\delta_0 = -1$ . Os contornos de tempo de colapso constante, expresso pelo inverso do fator de escala  $a_c^{-1}$ , são mostrados para a ZA. As linhas finas são espaçadas de 0.1 em  $a_c^{-1}$ , enquanto as linhas grossas são espaçadas de 0.5, com o contorno mais interno correspondendo a  $a_c^{-1} = 0$ . (b) O mesmo que em (a), mas desta vez a MZA é utilizada. (c) O mesmo que em (a) mas com a DTA. (d) O mesmo que em (a) mas para a CZA. (e) O mesmo que em (a) mas a LTA é utilizada. (f) Os sinais de  $\lambda_i^0$  em cada região do espaço de parâmetros de condições iniciais, com  $\delta_0 = -1$ . Perturbações com simetria esférica, plana e cilíndrica são marcadas com uma cruz, um sinal de soma e um asterisco, respectivamente. A parte superior desses gráficos corresponde a  $0 \leq \alpha_0 \leq \pi$  e tem portanto  $\lambda_3^0 > \lambda_2^0 > \lambda_1^0$ . A região inferior cobre os mesmos valores de  $\lambda_i^0$ , exceto por uma permutação dos índices.

fluido. Vemos que uma vorticidade não nula diminui a taxa de crescimento de  $\delta$ , que é o que se esperaria de um efeito centrífugo. Como no regime linear cisalhamento e campo de maré são proporcionais, não é possível distinguir a sua influência no colapso, mesmo olhando a solução de segunda ordem. Na equação (3.40), quem aparece explicitamente é o cisalhamento, e não o campo de maré (o seu efeito poderia aparecer indiretamente no aumento de  $\sigma$ ). Seria interessante investigar quem tem o papel mais importante no colapso:  $E_{ij}$  ou  $\sigma_{ij}$ ?

Quando  $\omega = \sigma = 0$ , a equação (3.40) reduz-se à equação de evolução da densidade média no modelo esférico. Ou seja, no caso irrotacional, se desprezamos o cisalhamento temos a dinâmica do colapso esférico. Essa equação é equivalente à equação de movimento de uma casca esférica de raio próprio  $r(\tau)$  encerrando uma massa fixa  $M$  relacionada a  $\delta$  por  $1 + \delta = 3M/(4\pi\bar{\rho}r^3)$ . A solução exata para o caso de uma perturbação esférica sobredensa leva a  $a_c = (3/5)(3\pi/2)^{2/3}/\delta_0 \cong 1.686/\delta_0$ . Qualquer perturbação não esférica terá um tempo de colapso maior, como pode ser observado na figura 3-2

Uma propriedade interessante que foi observada numericamente é que o tempo de colapso nas aproximações locais tem o mesmo comportamento assintótico

$$a_c(\delta_0, \varepsilon_0, \alpha_0) \simeq \frac{C}{\varepsilon_0} \quad (3.41)$$

para altos cisalhamentos iniciais ( $\varepsilon_0 \gg |\delta_0|$ ), onde  $C$  é uma função de  $\alpha_0$  apenas (veja a próxima seção). Dessa forma, o tempo de colapso para grandes cisalhamentos não depende de  $\delta_0$  e é inversamente proporcional a  $\varepsilon_0$ .

Outro aspecto interessante surge ao escrevermos o tempo de colapso em função de  $\delta_0$ ,  $\sigma_2^0$  e  $\sigma_3^0$  (veja a seção 2.3.4 para a definição de  $\sigma_i^0$ ). Note que a variação de  $\sigma_2^0$  é limitada. A nossa escolha da parametrização das condições iniciais equivale a termos  $\sigma_3^0 \leq \sigma_2^0 \leq \sigma_1^0$  e como  $\sigma_3^0 + \sigma_2^0 + \sigma_1^0 = 0$  teremos necessariamente  $\sigma_1^0 \geq 0$ ,  $\sigma_3^0 \leq 0$ . Já  $\sigma_2^0$  pode ter valores positivos e negativos. Usando que  $\sigma_2 \leq \sigma_1$  e inserindo na propriedade de soma nula teremos:  $\sigma_3^0 + \sigma_2^0 + \sigma_1^0 \leq 0$ , ou seja  $\sigma_2^0 \leq -\sigma_3^0/2$ . Dessa forma os limites de variação de  $\sigma_2^0$  são:  $\sigma_3^0 \leq \sigma_2^0 \leq -\sigma_3^0/2$ . Audit, Teyssier e Alimi [81] notaram que o tempo de colapso



é pouco sensível a  $\sigma_2^0$ , com  $\delta_0$  e  $\sigma_3^0$  fixos. Essa propriedade foi observada na DTA e nós verificamos que ela é válida em todas as aproximações locais. O menor tempo de colapso, com  $\delta_0$  e  $\sigma_3^0$  fixos, ocorre para  $\sigma_3^0 = \sigma_2^0$ , e o maior para  $\sigma_2^0 = -\sigma_3^0/2$ . Nas figuras 3-4 e 3-5 mostramos  $a_c^{-1}$  em função de  $\sigma_3^0$  para  $\delta_0 = 1$  e  $\delta_0 = -1$ . A diferença entre os tempos de colapso para os valores extremos de  $\sigma_2^0$  é da ordem de 20%. Os limites extremos de  $\sigma_2^0$ , ( $\sigma_3^0$  e  $-\sigma_3^0/2$ ) correspondem a  $\alpha_0 = 0$  e  $\alpha_0 = \pi$ , respectivamente. Nas figuras 3-4 e 3-5 vemos claramente a propriedade<sup>5</sup> (3.41).

Na aproximação de Zel'dovich temos uma expressão analítica para  $a_c$ . Como o colapso ocorre para  $a = (\lambda_i^0)^{-1}$ , usando a parametrização (3.36) temos:

$$a_c^{ZA} = \frac{1}{\delta_0/3 + (2/3)\varepsilon_0 \cos(\alpha_0/3)} = \frac{1}{\delta_0/3 - \sigma_3^0}. \quad (3.42)$$

Dessa forma, vemos que na ZA o tempo de colapso não depende de  $\sigma_2^0$ , sendo função de  $\sigma_3$  e  $\delta_0$  apenas. Já colapso esférico depende somente de  $\delta_0$ . Como vimos, as aproximações locais dependem de  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  e  $\delta_0$ .

Como veremos na seção 3.3.3, para calcularmos a função de massa precisamos conhecer a função  $a_c^\pm(\varepsilon_0/|\delta_0|, \alpha_0)$ . A primeira tentativa de calcular a função de massa utilizando uma aproximação local foi feita por Monaco [85] em 1995. Monaco utilizou a aproximação de Zel'dovich, mas como esta superestima o tempo de colapso para a simetria esférica, ele fez uma junção da ZA com o resultado esférico. A figura 3-4 fornece uma justificativa, a posteriori, da aproximação introduzida por Monaco para determinar  $a_c$ . Se curvamos a reta da ZA para  $\sigma_3^0$  pequeno, de modo a obter o valor do colapso esférico para  $\sigma_3^0 = 0$ , obtemos um resultado parecido com o as outras aproximações locais. O fato de  $a_c$  depender fracamente de  $\sigma_2^0$  foi utilizado por Audit, Teyssier e Alimi [81] para propor uma expressão para o tempo de colapso no terceiro eixo, ou seja, depois do cruzamento das trajetórias e de formação da singularidade. Como não é possível utilizar o formalismo lagrangiano nessa situação, eles propuseram uma expressão empírica para  $a_c$  como função de  $\delta_0$  e de uma componente do cisalhamento apenas. Nós não discutiremos

---

<sup>5</sup>Note que, com  $\alpha_0$  fixo, temos  $\sigma_3 \propto -\varepsilon_0$ .

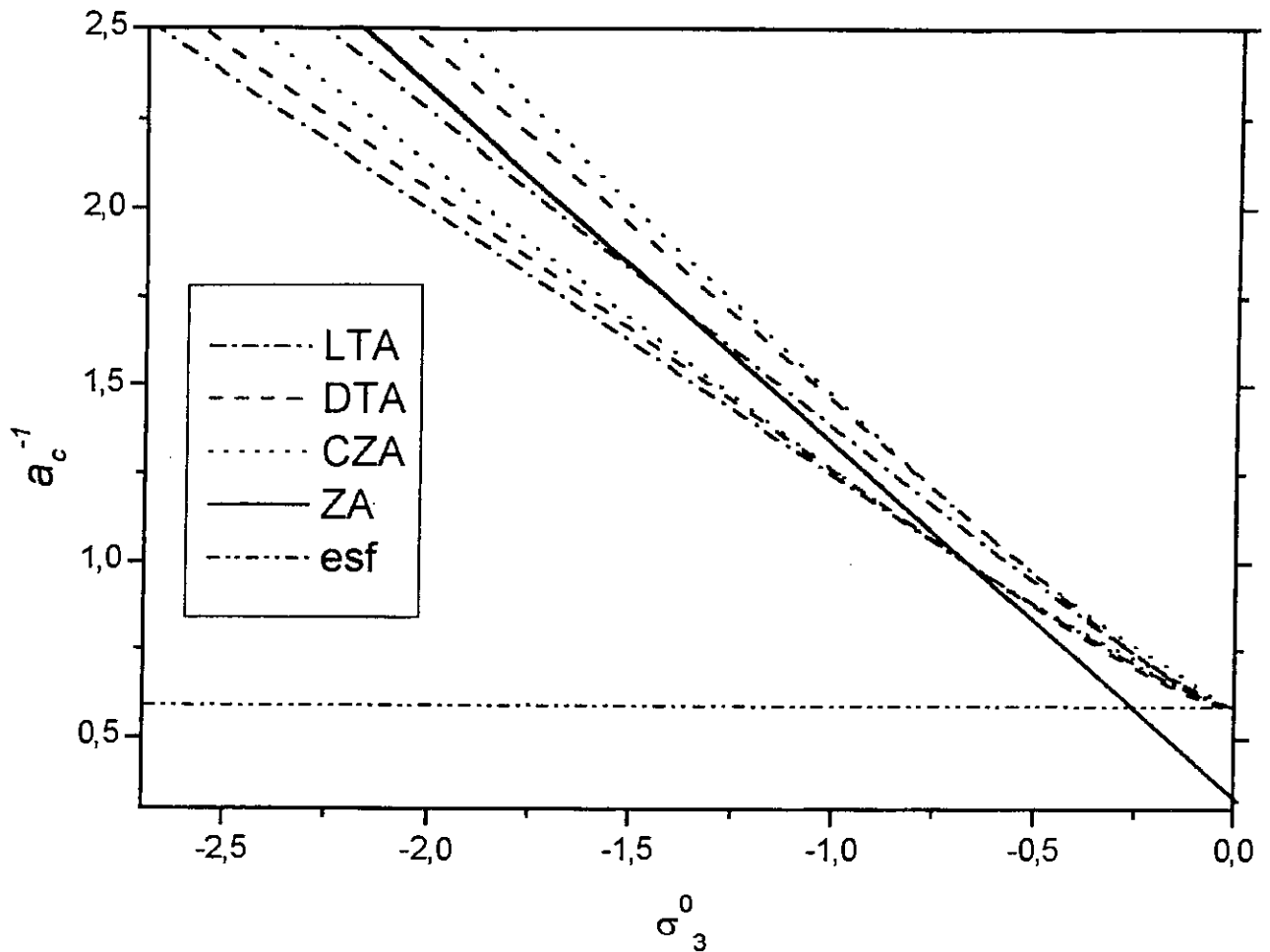


Figura 3-4: O inverso do fator de escala no colapso em função de  $\sigma_3^0$ , obtido nos dois valores extremos de  $\sigma_2^0$  ( $\sigma_3^0$  e  $-\sigma_3^0/2$ ), calculado com a LTA (traço-ponto), a DTA (tracejado), a CZA (pontilhado) e a ZA (linha contínua), para  $\delta_0 = 1$ . Note que a ZA não depende de  $\sigma_2^0$ . Para comparação colocamos também o resultado do modelo do colapso esférico (traço-ponto-ponto), que não depende de  $\sigma_3^0$ .

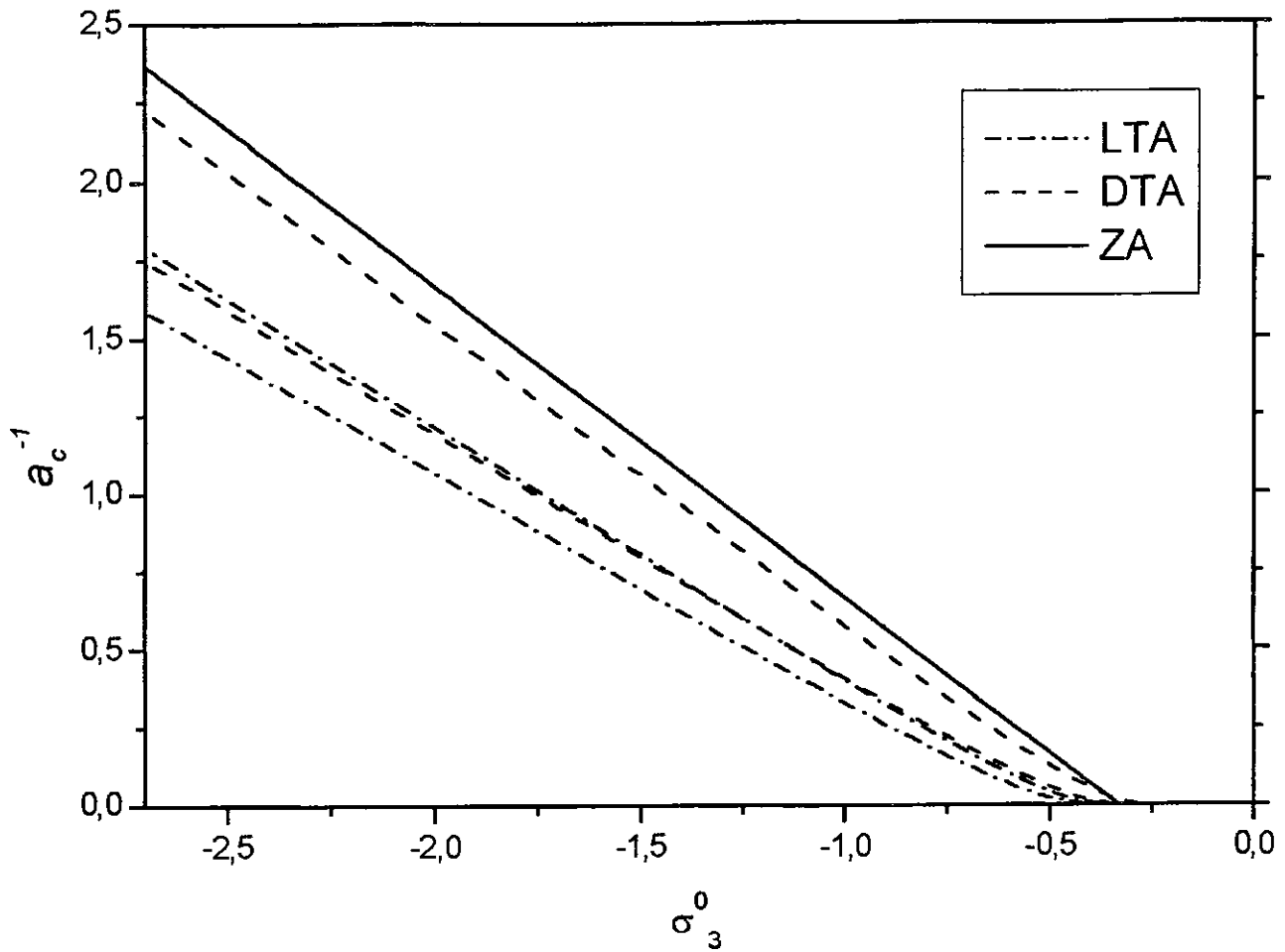


Figura 3-5: O inverso do fator de escala no colapso em função de  $\sigma_3^0$ , obtido nos dois valores extremos de  $\sigma_2^0$ , calculado com a LTA (traço-ponto), a DTA (tracejado) e a ZA (linha contínua), para  $\delta_0 = -1$ . O colapso só ocorre a partir de um determinado valor de  $\sigma_3^0$ .

esses modelos empíricos para o cálculo de  $a_c$ . Aqui nos limitamos aos modelos *dinâmicos* que permitem calcular  $a_c$ , em particular às aproximações locais.

### Ajustes para o tempo de colapso

Nesta seção mostramos os ajustes numéricos para o tempo de colapso em função das condições iniciais para a LTA, DTA e CZA. Para essas aproximações a seguinte propriedade é satisfeita com boa aproximação:

$$a_c^\pm(x, \alpha_0) \simeq H^\pm(f), \text{ com } f = xg^\pm(\alpha_0), \quad (3.43)$$

onde  $H^\pm$  e  $g^\pm$  são funções a serem ajustadas para cada aproximação e  $x = \varepsilon_0/|\delta_0|$ . Essa relação fica mais precisa quando  $x$  aumenta e o erro nesse ajuste é sempre menor do que alguns por cento. A relação (3.43) também foi verificada no caso da CZA para perturbações sobredensas.

Para  $g(\alpha)$  verificamos que uma espécie de série de Fourier truncada pode ser utilizada com uma ótima aproximação:

$$g(\alpha) = c_1 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + c_2 \cos \alpha + c_3 \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) + c_4 \cos(2\alpha) + c_5 \cos\left(\frac{5\alpha}{2}\right) + (1 - c_1 - c_2 - c_3 - c_4 - c_5) \cos(3\alpha). \quad (3.44)$$

O coeficiente do último termo é escolhido de modo que  $g(0) = 1$ . Os valores dos parâmetros para a LTA e DTA são mostrados na tabela 3.2.

$g$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$
$g_{LTA}^+$	1.546	-1.015	0.786	-0.462	0.182
$g_{LTA}^-$	1.461	-0.767	0.473	-0.231	0.079
$g_{DTA}^+$	1.505	-0.842	0.508	-0.228	0.066
$g_{DTA}^-$	1.497	-0.836	0.513	-0.234	0.068

Tabela 3.2: Parâmetros de  $g(\alpha_0)$  ajustados para a LTA e DTA.

Para a dependência de  $a_c$  em  $x$  com  $a_0$  fixo, ajustamos a função  $f = H^{-1}$ , em vez de  $H$

propriamente dito. É essa quantidade que precisaremos para calcular a função de massa (veja a próxima seção). Levando em consideração o valor de fronteira e o comportamento assintótico, parametrizamos  $f$  por

$$f^+ = \frac{d_1 z (1 + d_2 z + d_4 z^2)}{(1 + d_3 z + d_5 z^2) a_c}, \text{ com } z = d_0 - a_c, \quad (3.45)$$

para regiões sobredensas ( $\delta_0 > 0$ ) e

$$f^- = d_0 + \frac{d_1 a_c^{-1/2} (1 + d_2 a_c^{-1} + d_4 a_c^{-5/2})}{1 + d_3 a_c^{-1} + d_5 a_c^{-2}}, \quad (3.46)$$

para regiões subdensas ( $\delta_0 < 0$ ). Os parâmetros para a LTA e DTA são dados na tabela 3.3.

$f$	$d_0$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$
$f_{LTA}^+$	1.686	8.469	19.88	78.49	17.03	163.2
$f_{LTA}^-$	0.591	1.064	0.678	-1.335	16.054	8.613
$f_{DTA}^+$	1.686	14.14	13.34	87.68	8.676	163.8
$f_{DTA}^-$	0.495	0.942	0.322	-2.083	25.718	12.961

Tabela 3.3: Parâmetros de  $f(a_c)$  ajustados para a LTA e DTA.

Note que, para altos valores do cisalhamento ( $x \gg 1$ ), temos  $a_c \ll 1$  de modo que:

$$a_c^+ \rightarrow \frac{d_1 d_0 (1 + d_2 d_0 + d_4 d_0^2)}{(1 + d_3 d_0 + d_5 d_0^2)} \frac{1}{x g^+(\alpha_0)} \quad (3.47)$$

e

$$a_c^- \rightarrow \frac{d_1 d_4}{d_5} \frac{1}{x g^-(\alpha_0)}, \quad (3.48)$$

quando  $x \rightarrow \infty$ , o que leva à expressão (3.41).

As características de  $a_c$  podem ser vistas claramente na aproximação de Zel'dovich, neste caso (eq. 3.42):

$$\begin{aligned} a_c^{ZA}(\delta_0, \varepsilon_0, \alpha_0) &= \frac{1}{|\delta_0| \pm 1 + 2(\varepsilon_0/|\delta_0|)\cos(\alpha_0/3)} \\ &= \frac{1}{|\delta_0|} a_c^{ZA}(\pm 1, \varepsilon_0/|\delta_0|, \alpha_0). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Note que a propriedade (3.43) é satisfeita exatamente na ZA, com  $g(\alpha) = \cos(\alpha/3)$ . Vemos imediatamente que, para  $\varepsilon_0 \gg \delta_0$ , o comportamento é dado pela expressão (3.41).

### 3.3.3 A Função de Massa

A função de massa  $n(M)$  é definida de modo que  $n(M)dM$  fornece o número de aglomerados de matéria escura gravitacionalmente ligados, por unidade de volume, no intervalo de massa  $M$  e  $M + dM$ . Esses aglomerados são associados aos halos proto-galácticos, e aos grupos e aglomerados de galáxias. A função de massa tem inúmeras aplicações práticas. Importantes vínculos sobre os modelos cosmológicos podem ser obtidos comparando estimativas teóricas da função de massa com os dados observacionais [86, 87, 88]. A função de massa também é um teste poderoso para estabelecer limites sobre o espectro primordial das flutuações [89, 90]. Com a função de massa é possível calcular a taxa de fusão (*mergers*) dos halos virializados [91], o tempo de formação e o tempo de vida dessas estruturas [92]. A função de massa também pode servir como um teste da teoria da gravitação [93].

#### O formalismo de Press & Schechter

A quase totalidade dos cálculos teóricos da função de massa é baseada no formalismo de Press & Schechter [94]. O *Ansatz* de Press & Schechter (PS) consiste em supor que a função de massa  $n(M)$  é obtida a partir da fração  $F(M; a_0)$  de objetos colapsados em  $a_0$  com massa maior que  $M$  pela relação

$$n(M) = -\frac{\bar{\rho}}{M} \frac{dF}{dM}. \quad (3.50)$$

Precisamos agora de uma forma de calcular  $F$ .

Supõe-se que, se o contraste de densidade médio  $\delta_R$  numa região de tamanho  $R$  for maior que uma certa densidade crítica  $\delta_c(a_0)$ , essa região terá colapsado, formando uma estrutura ligada, em  $a = a_0$ . Apesar da dinâmica nessa região ser não-linear, o processo de condensação não alterará a sua massa de maneira significativa. Então, se estimamos o número de regiões com  $\delta_R > \delta_c$  num campo randômico, seremos capazes de determinar  $F(M)$ . A distribuição das flutuações na escala  $R$ ,  $P(\delta_R)$  segue a mesma distribuição do contraste de densidade  $\delta$  filtrada por uma função janela com essa escala (veja a seção B.3).

Para uma distribuição gaussiana, a probabilidade de que esse campo tenha um valor  $\delta$  num dado ponto é (eq. B.8):

$$P(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_R^2}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\Delta_R^2}\right).$$

onde

$$\Delta_R^2(R, t) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} W_k^2(R) k^2 \sigma_k^2(t), \quad (3.51)$$

é a variância da densidade medida com a função janela  $W_k(R)$ , que é a transformada de Fourier de um filtro de tamanho  $R$  no espaço físico; e  $\sigma_k^2$  é o espectro de potência do campo primordial de densidades (veja o apêndice B, eq. B.21). O efeito do filtro é fazer uma média sobre as flutuações menores que  $R$ , para associar um valor de  $\delta$  a essa região de tamanho  $R$ . A variância  $\Delta_R^2$  é relacionada com a massa  $M$  através de  $R$  pela relação

$$M = \frac{4\pi}{3} f_W R^3 \bar{\rho}.$$

O fator  $f_W$  depende da forma da função filtro, para um filtro tipo cartola (*top-hat*) temos  $f_W = 1$ , se  $W_k$  é uma função degrau no espaço  $k$  (*sharp k-space filter*) teremos  $f_W = 9\pi/2$ . Como a largura da janela no espaço  $k$  é da ordem da inversa da largura no espaço físico, grandes massas corresponderão a pequenos valores de  $\Delta_R^2$ , enquanto pequenas massas correspondem a  $\Delta_R^2$  grande. Note que a variável adequada para descrever o número de objetos colapsados é mesmo a massa, pois esta é conservada mesmo que o tamanho da região tenha variado enormemente. Não seria possível estimar o número de objetos de tamanho  $L$ , por exemplo, no formalismo de PS.

Supondo que a região com  $\delta_R > \delta_c(a_0, a_i)$  vai formar um objeto gravitacionalmente ligado de massa  $M$ , a fração de objetos com massa maior que  $M$  será

$$\begin{aligned} F(M) &= \int_{\delta_c}^{\infty} P(\delta, R, a_i) d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_R^2}} \int_{\delta_c}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\Delta_R^2}\right) d\delta = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\Delta_R}\right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Utilizando a equação (3.50), obtemos a função de massa de PS:

$$n(M, a_0) dM = -\frac{\bar{\rho}}{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta_c}{\Delta_R} \left(\frac{1}{\Delta_R} \frac{d\Delta_R}{dM}\right) \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\Delta_R^2}\right) dM. \quad (3.53)$$

Dado o espectro de potência  $\sigma_k^2$  e a função janela podemos calcular explicitamente o lado direito dessa expressão. O valor de  $\delta_c$  é escolhido de modo que uma região com  $\delta = \delta_c$  colapse em  $a = a_0$ .

O critério para determinar se um objeto colapsou formando um objeto ligado é baseado no campo *inicial* de densidades, de modo que  $\delta$  e  $\Delta_R^2$  são calculados no regime linear. Nesse caso  $\delta = a\delta_0$  e  $\Delta_R = a\Delta_R^0$  (eq. B.10). Assim, a razão  $\delta_c/\Delta_R$  que aparece na função de massa não depende de  $a_i$ . Vamos agora determinar o valor de  $\delta_0^c$  correspondendo a  $\delta_c$ .

Press & Schechter se basearam no modelo do colapso esférico para determinar  $\delta_c$ . Sabemos que uma perturbação com simetria esférica colapsa em  $a = 1.686$  se  $\delta_0 = 1$ . Da discussão da seção 3.3.2 vimos que mudar  $\delta_0$  é equivalente a re-escalar  $a$  (eq. 3.38), de



modo que uma perturbação esférica colapsará em  $a_0$  se  $\delta_0^c = 1.686/a_0$ . Como  $\delta_0^c$  só aparece na razão  $\delta_0^c/\Delta_R^0$  e como o termo  $(d\Delta_R/dM)/\Delta_R$  não se altera se multiplicamos  $\Delta_R$  por uma constante, mudar  $a_0$  equivale a multiplicar  $\Delta_R^0$  por  $a_0^{-1}$ . Essa é uma propriedade importante da função de massa de PS: a *auto-similaridade no tempo*.

Na literatura sempre aparece a razão  $\delta_0^c/\Delta_R^0$ , em vez de  $\delta_c/\Delta_R$  sem que seja explicitado porque podemos fazer essa substituição. Como o índice 0 é omitido diz-se que o resultado de PS corresponde a escolher  $\delta_c = 1.686$  (na verdade escolhe-se  $\delta_0^c = 1.686$ ). O resultado da função de massa é mostrado em função de  $\Delta_R^0$ , para  $a_0 = 1$ . Geralmente a variação com  $a_0$  tampouco é apresentada.

Há ainda um problema fundamental com a equação (3.53). A integral de  $n$  sobre todas as massas deveria dar igual a 1, mas é fácil ver que

$$\int_0^\infty n(M) dM = \int_0^\infty dF = \frac{1}{2}.$$

Esse é conhecido como o problema da normalização da função de massa, e sempre ocorre no formalismo de PS e suas extensões. Isso acontece porque as regiões subdensas não são levadas em consideração adequadamente. A solução encontrada por Press & Schechter foi multiplicar a função de massa pelo fator de normalização 2. Existem várias abordagens desenvolvidas na literatura para resolver esse problema da normalização [95, 96, 101, 102], mas todas acabam justificando o procedimento de PS, pelo menos quando o filtro é a função degrau  $W_R = \Theta(1/R - k)$ .

Outro problema do formalismo original de PS é a utilização do contraste de densidade  $\delta$  como único critério para definir se uma certa região colapsará em  $a_0$ , usando o modelo do colapso esférico para determinar  $\delta_c$ . Como vimos na seção 3.3.2 o tempo de colapso depende fortemente do cisalhamento inicial e portanto não podemos utilizar apenas  $\delta$  com critério para o colapso. Na próxima seção, apresentaremos uma extensão do formalismo de PS para lidar com modelos mais realistas do colapso.

Podemos utilizar um outro critério para determinar  $\delta_c^0$  que não seja baseado no colapso esférico. Por exemplo, há uma aproximação não-linear introduzida por Protozeros e

Scherrer [104] em que a densidade num ponto é função somente da densidade inicial naquele ponto, para qualquer geometria. Num universo de Einstein-de Sitter, teríamos

$$\delta = \frac{1}{(1 - 2a\delta_0/3)^{3/2}} - 1.$$

Evidentemente a expressão acima negligencia todos os efeitos do cisalhamento discutidos na seção 3.3.2, mas a intenção é que ela seja válida num sentido estatístico. Não discutiremos aqui a motivação dessa aproximação, salientamos apenas que todo elemento de volume colapsa para  $a = (3/2)\delta_0$  de modo que podemos utilizar um procedimento idêntico ao formalismo original de Press e Schechter, com um patamar de 1.5 em vez do resultado do modelo esférico 1.686. Esse valor estria inclusive em melhor acordo com as simulações numéricas [99]. Um valor semelhante de  $\delta_c^0$  tem sido utilizado na literatura com uma motivação diferente. Um estudo da virialização de uma distribuição esférica [105] mostrou que ela ocorre para  $\delta_c^0 = 1.52$ , portanto um pouco antes do tempo de colapso.

É interessante observar que o cálculo da função de massa não recebeu muita atenção até o final de década de 1980, quando as primeiras grandes simulações numéricas começaram a aparecer e mostraram um bom acordo com o resultado de PS.

### Função de massa para o colapso não esférico

Nesta seção mostraremos a extensão do formalismo de PS para o colapso não esférico que foi introduzida primeiramente por Monaco [85] e aplicado à ZA. Posteriormente esse método foi aplicado à DTA por Audit et al. [81]. Aqui estendemos essa análise para a LTA e comparamos essas três aproximações com os resultados de simulações de  $N$ -corpos (seção 3.3.3).

Em qualquer modelo realista do colapso, o cisalhamento tem um papel fundamental, além do contraste de densidade. No caso das aproximações locais, podemos calcular o tempo de colapso  $a_c$  de um elemento de volume a partir das condições iniciais desse elemento, que podem ser parametrizadas por  $\delta_0$ ,  $\varepsilon_0$  e  $\alpha_0$ . A fração  $F$  de elementos que

colapsaram em  $a_0$  pode ser calculada como uma integral sobre todas as condições iniciais possíveis pesadas pelas suas probabilidades:

$$F = \frac{1}{F_0} \int_0^\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} s(a_0; \delta_0, \varepsilon_0, \alpha_0) P_M(\delta_0, \varepsilon_0, \alpha_0) d\delta_0 d\varepsilon_0 d\alpha_0. \quad (3.54)$$

A função  $s$  é igual a um se o elemento com parâmetros  $\delta_0, \varepsilon_0, \alpha_0$  já colapsou em  $a_0$  e zero caso contrário,  $F_0$  é o fator de normalização. Aqui adotaremos o mesmo procedimento que na abordagem de PS e multiplicaremos a função de massa pela normalização apropriada. Veremos, no entanto, que o problema da normalização não será muito importante aqui.

No caso do modelo original de PS teríamos que a função  $s$  é igual a  $\Theta(\delta - \delta_c(a_0))$ . Como a integral em  $\varepsilon_0$  e  $\alpha_0$  tem que ser um, para a probabilidade ser normalizada, obtemos o resultado (3.52).

Precisaremos da distribuição de probabilidades  $P_M(\delta_0, \varepsilon_0, \alpha_0)$  para as condições iniciais. Supondo flutuações iniciais gaussianas, Doroshkevich [100] deduziu a probabilidade conjunta para os três autovalores do tensor de deformação  $\lambda_1^0, \lambda_2^0$  e  $\lambda_3^0$  (veja o apêndice B). Utilizando esse resultado,  $P_M(\delta_0, \varepsilon_0, \alpha_0)$  é dado pelo produto de três probabilidades independentes para cada parâmetro  $\delta_0, \varepsilon_0$  e  $\alpha_0$  (eqs. B.14, B.16 e B.17):

$$P_\nu(\delta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta_0}{\Delta}\right)^2\right], \quad (3.55)$$

$$P_\chi(\varepsilon_0) = \frac{50}{3} \sqrt{\frac{5}{2\pi\Delta^2}} \left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta}\right)^4 \exp\left[-\frac{5}{2}\left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta}\right)^2\right], \quad (3.56)$$

$$P_\alpha(\alpha_0) = \sin\left(\frac{\alpha_0}{3}\right) \left[\frac{3}{2} - 2\sin^2\left(\frac{\alpha_0}{3}\right)\right], \quad (3.57)$$

onde a omitimos o superescrito 0 e o subscrito  $R$  para simplificar a notação (e também para conformar com a notação usual). No entanto, lembramos que aqui  $\Delta$  representa  $\Delta_R^0$ , conforme a discussão da seção anterior. Essas distribuições de probabilidades são mostradas nas figuras 3-6 a 3-8.

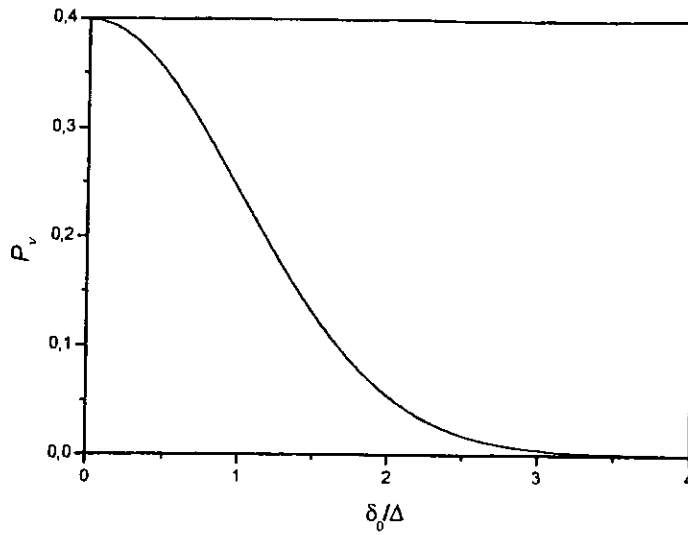


Figura 3-6: Distribuição de probabilidades de  $\delta_0/\Delta$ . Há igual probabilidade de termos  $\delta_0$  positivo ou negativo. A maioria das perturbações tem  $|\delta_0| \lesssim \Delta$ .

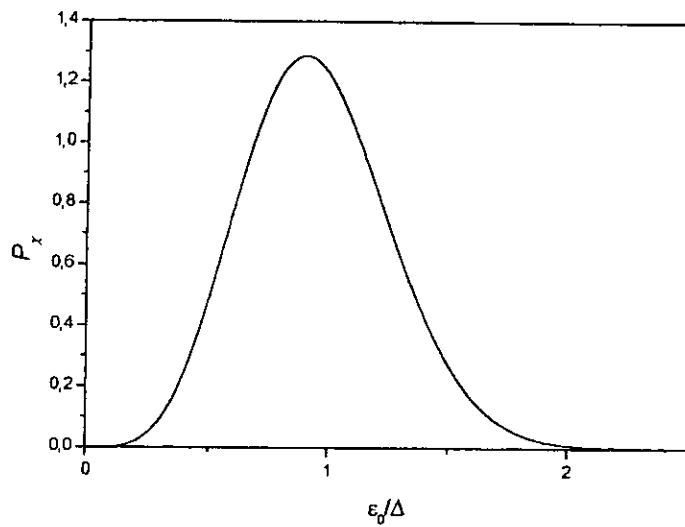


Figura 3-7: Distribuição de probabilidades de  $\epsilon_0/\Delta$ . As perturbações têm um cisalhamento não nulo, concentrado em torno de  $\epsilon_0 \sim \Delta$ .

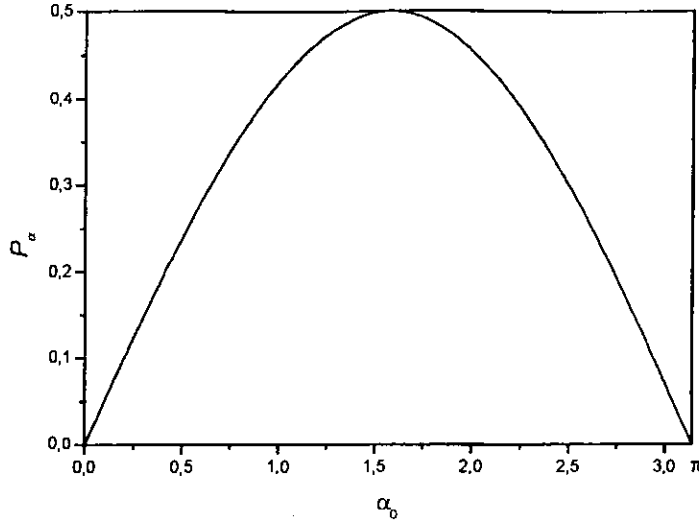


Figura 3-8: Distribuição de probabilidades de  $\alpha_0$ . Vemos que as perturbações mais prováveis são triaxiais.

Alguns autores [97, 98] utilizaram o modelo do elipsóide homogêneo para calcular a função de massa. Na seção 3.3.2 vimos que para pequenos valores de<sup>6</sup>  $\varepsilon_0/\delta_0$ , é possível associar as condições iniciais ao modelo do elipsóide, mas isso já não ocorre para  $\varepsilon_0/\delta_0 \gtrsim 1$ , nem para  $\delta_0 < 0$ . Assim, qualquer cálculo baseado apenas no elipsóide é incompleto e desconsidera um grande número de condições iniciais possíveis. É interessante notar que, como os valores mais prováveis dos parâmetros  $\varepsilon_0$  e  $\delta_0$  são  $\varepsilon_0 \sim \Delta$  e  $|\delta_0| \lesssim \Delta$ , na maioria dos raros picos ou subdensidades em que  $|\delta_0| \gg \Delta$ , teremos  $\delta_0 \gg \varepsilon_0$ . Assim, apesar do colapso genérico não ser esférico, nos picos da distribuição de matéria ele inicia-se de forma quase esférica.

A função de massa pode ser escrita na forma

$$n(M) = -\frac{\bar{\rho}}{M} \frac{d\Delta}{dM} \Phi(\Delta), \quad (3.58)$$

onde  $\Phi(\Delta) = dF(\Delta)/d\Delta$ . A função  $\Phi(\Delta)$  contém toda a influência da dinâmica e não depende nem do espectro de potência nem do filtro  $W$ , por isso ela é chamada de *função de massa universal* [81]. Em geral, uma diferente escolha do filtro levará a um resultado diferente para  $n(M)$ , especialmente no limite de baixa massa. Aqui estaremos

<sup>6</sup>Mais precisamente para  $\delta_0/\varepsilon_0 > -2 \cos((\alpha + 2\pi)/3)$ .

interessados apenas em obter  $\Phi(\Delta)$ , pois é a dinâmica segundo as aproximações locais que queremos estudar.

Na próxima seção mostraremos o método de cálculo da função de massa desenvolvido por nós que utiliza as propriedades (3.39) e (3.43) e a distribuição de probabilidades para as condições iniciais parametrizadas por  $\delta_0$ ,  $\varepsilon_0$  e  $\alpha_0$ . Os resultados serão discutidos na seção 3.3.3.

### Cálculo da função de massa

Com a integral (3.54) podemos escrever a função de massa universal  $\Phi(\Delta) = dF/d\Delta$  na forma

$$\Phi(\Delta, a_0) = \frac{1}{F_0} \frac{d}{d\Delta} \int_0^\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} s(\nu\Delta, \chi\Delta, \alpha_0) P(\nu, \chi, \alpha_0) d\nu d\chi d\alpha_0 \quad (3.59)$$

onde  $\nu = \delta_0/\Delta$  e  $\chi = \varepsilon_0/\Delta$  e  $P(\nu, \chi, \alpha_0) = P_\nu P_\chi P_\alpha$ . Com essas novas variáveis, a dependência em  $\Delta$  aparece apenas na função  $s$ , que pela definição da seção anterior, pode ser escrita como

$$s = \Theta(a_0 - a_c(\delta_0, \varepsilon_0, \alpha_0)) = \Theta(a_0 - a_c(\nu\Delta, \chi\Delta, \alpha)), \quad (3.60)$$

onde  $\Theta(x)$  é a função degrau de Heavside.

Agora precisamos apenas calcular  $ds/d\Delta$ . Utilizando a propriedade (3.39), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\Delta} &= -\delta_D(a_0 - a_c(\nu\Delta, \chi\Delta, \alpha)) \frac{da_c}{d\Delta} = \delta_D(a_0 - a_c(\nu\Delta, \chi\Delta, \alpha)) \frac{a_c^\pm(\chi/\nu, \alpha)}{|\nu|\Delta^2} \\ &= \delta_D(a_0 - a_c(\nu\Delta, \chi\Delta, \alpha)) \frac{a_c}{\Delta}, \end{aligned}$$

onde  $\delta_D$  é a função delta de Dirac. Dessa forma, poderemos eliminar uma das integrais na expressão (3.59). A função de massa deverá ser calculada sobre a superfície  $a_c(\nu\Delta, \chi\Delta, \alpha) = |\nu\Delta|^{-1} a_c^\pm(\chi/\nu, \alpha) = a_0$ , que anula o argumento de  $\delta_D$ . Para isso precisamos escrever uma das três variáveis em termos das outras duas nessa superfície.

Vamos supor que temos  $\chi$  como uma função  $\chi_a$  de  $\nu\Delta$  e  $\alpha$ :  $\chi = \chi_a(\nu\Delta, \alpha)$ , onde o subscrito  $a$  denota que  $\chi$  é calculado na superfície  $a_c = a_0$ . Nesse caso eliminaremos  $\chi$  da integral (3.59). Para isso utilizamos a relação

$$\delta_D(1 - a_c(\nu\Delta, \chi\Delta, \alpha)) = \delta_D(\chi - \chi_a) \left| \frac{\partial a_c}{\partial \chi} \right|^{-1}, \quad (3.61)$$

que vem do tratamento da delta de Dirac de uma função de várias variáveis.

Antes de prosseguir, vamos mostrar que é suficiente calcular  $\Phi(\Delta)$  para  $a_0 = 1$ . O argumento é semelhante ao utilizado no caso do formalismo original de PS. Pela expressão (3.39), se um elemento com condições iniciais  $\delta_0^1, \varepsilon_0^1$  e  $\alpha_0^1$  colapsa em  $a = 1$ , então o colapso ocorrerá em  $a_0$  se  $\delta_0 = \delta_0^1/a_0, \varepsilon_0 = \varepsilon_0^1/a_0$  e  $\alpha_0 = \alpha_0^1$ , assim, mudar  $a_0$  é equivalente a dividir  $\delta_0$  e  $\varepsilon_0$  por  $a_0$ . A função  $s$  não se altera por essa transformação

$$\begin{aligned} s &= \Theta(a_0 - a_c(\delta_0^1/a_0, \varepsilon_0^1/a_0, \alpha_0)) = \Theta(a_0 - a_0 a_c(\delta_0^1, \varepsilon_0^1, \alpha_0)) = \\ &\Theta(1 - a_c(\delta_0^1, \varepsilon_0^1, \alpha_0)), \end{aligned}$$

onde usamos novamente a propriedade (3.39). O outro lugar onde  $\delta_0$  e  $\varepsilon_0$  se manifestam na expressão (3.59) é na distribuição de probabilidades, onde eles aparecem divididos por  $\Delta$ . Assim, da mesma forma que na abordagem original de PS, mudar  $a_0$  equivale a multiplicar  $\Delta$  por  $a_0^{-1}$ . Considerando o colapso genérico, desde que  $a_c$  seja a uma função das condições iniciais, temos que a auto-similaridade temporal da função de massa é preservada. A partir de agora faremos  $a_0 = 1$ .

Substituindo a (3.61) na (3.59) obtemos:

$$\Phi(\Delta) = \frac{1}{F_0} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta} \left| \frac{\partial a_c}{\partial \chi} \right|^{-1} P_\nu(\nu) P_\chi(\chi_a) P_\alpha(\alpha_0) d\nu d\alpha_0, \quad (3.62)$$

onde  $\partial a_c / \partial \chi$  é calculado em  $\chi_a(\nu\Delta, \alpha_0)$ . Assim, reduzimos a integral tripla (3.59) a uma integral dupla. Esta expressão pode ser simplificada ainda mais se a função  $a_c^\pm(x, \alpha)$  depender somente do produto  $xg^\pm(\alpha)$ , o que é uma ótima aproximação para as aproximações locais estudadas (veja a seção 3.3.2). Dessa forma fica fácil obter  $\chi$  em termos

de  $\nu\Delta$  e  $\alpha_0$ . Utilizando a relação (3.39) e a propriedade (3.43), teremos:

$$a_c(\nu\Delta, \chi\Delta, \alpha_0) = \frac{1}{|\nu\Delta|} H^\pm \left( \frac{\chi}{|\nu|} g^\pm(\alpha_0) \right).$$

Para  $a_c = 1$  obtemos

$$\chi_a = \frac{\nu}{g(\alpha)} H^{-1}(|\nu\Delta|), \quad (3.63)$$

onde o superescrito + fica implícito para  $\nu$  positivo, e o - para  $\nu$  negativo. Como utilizaremos a função  $H$  ajustada numericamente, é melhor trabalhar diretamente com a sua inversa, e ajustar  $H^{-1}$  para cada aproximação local. Os resultados desses ajustes são mostrados na seção 3.3.2. Com a expressão (3.63) podemos calcular

$$\left| \frac{\partial a_c}{\partial \chi} \right|^{-1} = \left| \frac{\partial \chi}{\partial a_c} \right| = \left| \frac{\nu^2 \Delta}{g(\alpha)} \frac{\partial H^{-1}}{\partial a_c} \right|,$$

onde  $\partial H^{-1}/\partial a_c$  é calculado em  $|\nu\Delta|$ . Substituindo este resultado na (3.62) obtemos finalmente:

$$\Phi(\Delta) = \frac{1}{F_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \nu^2 \left| \frac{\partial H^{-1}}{\partial a_c} \frac{1}{g(\alpha_0)} \right| P_\nu(\nu) P_\chi(\chi_a) P_\alpha(\alpha) d\alpha_0 d\nu,$$

onde  $\chi_a = |\nu| f_a/g(\alpha_0)$ , com  $f_a := H^{-1}(|\nu\Delta|)$ .

Como  $P(\nu)$  e  $\partial H^{-1}/\partial a_c|_{|\nu\Delta|}$  não dependem de  $\alpha$ , integraremos primeiro em  $\alpha$ :

$$I_1(\nu, \Delta) := \int_0^\pi \frac{1}{g^5(\alpha_0)} e^{-\frac{5}{2}(\nu f_a/g(\alpha_0))^2} P_\alpha(\alpha_0) d\alpha_0. \quad (3.64)$$

Nesta expressão utilizamos  $P_\chi(\nu f_a/g(\alpha_0)) \propto e^{-\frac{5}{2}(\nu f_a/g(\alpha_0))^2} (\nu f_a/g(\alpha_0))^4$  (eq. 3.56) e deixamos o termo  $(\nu f)^4$  para a integral em  $\nu$ .



A função de massa universal será dada por

$$\Phi(\Delta) = \frac{1}{F_0} N \int_{-\infty}^{+\infty} I_1(\nu, \Delta) \nu^6 f_a^4 \left| \frac{\partial H^{-1}}{\partial a_c} \right|_{|\nu\Delta|} e^{-\nu^2/2} d\nu. \quad (3.65)$$

onde  $N$  é o produto das normalizações de  $P_\nu$  e  $P_x$  (eqs. 3.55 e 3.56):  $N = 50\sqrt{5}/6\pi \simeq 17,8$ . Note que a integral acima é limitada para valores positivos de  $\nu$ . Esse limite é definido pela condição  $f_a^+ = 0$  para  $\nu\Delta > f_0$ , de modo que integraremos até  $\nu = f_0/\Delta$ . A constante  $f_0$  tem o valor 1.686 nas aproximações locais e 3 na ZA. Na prática, separamos as integrais  $I_1$  e  $\Phi(\Delta)$  em integrais sobre  $\nu$  positivo e negativo e usamos  $H_\pm^{-1}$ , e  $g^\pm$  em cada caso. Como o integrando da equação (3.65) deve ser contínuo em  $\nu = 0$ , comparar os seus valores para  $\nu \rightarrow 0^+$  e  $\nu \rightarrow 0^-$  é útil para conferirmos se as funções foram ajustadas corretamente.

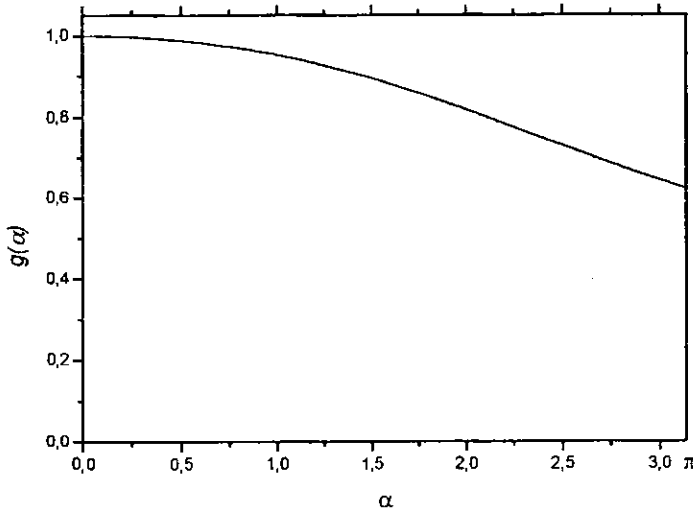


Figura 3-9: Gráfico da função  $g(\alpha)$  (eq. 3.44) correspondendo a  $\delta_0 > 0$  para a DTA. Os gráficos para  $\delta_0 < 0$ , e para a LTA são muito semelhantes.

A integral  $I_1$  é função apenas de  $x = \nu f_a$ , ela se assemelha a uma gaussiana, mas decai de forma diferente para  $x \gg 1$ . Ela é calculada pelo método de Gauss-Legendre com dez pontos. Essa escolha fornece uma boa relação precisão/tempo de cálculo. Nós verificamos que aumentar para cem o número de passos, ou utilizar o método de Runge-Kuta adaptativo praticamente não muda o resultado. Variações maiores que 0,1% só aparecem próximo de  $x = 10$ . A partir desse valor podemos utilizar uma expressão

analítica para  $I_1$ . Note que, para  $x \gg 1$ , só os maiores valores de  $g(\alpha_0)$  contribuem para a integral. O máximo de  $g$  ocorre para  $\alpha_0 = 0$  (veja fig. 3-9), de modo que devemos expandir o integrando da equação (3.64) próximo desse valor. Como  $g'(0) = 0$  (eq. 3.44), teremos :

$$g(\alpha_0) \simeq 1 + \frac{g''(0)}{2} \alpha_0^2.$$

Próximo de  $\alpha_0 = 0$  a (3.57) fica  $P_\alpha \simeq \alpha_0/2$ . Substituindo esses resultados na (3.64) e mantendo os termos de ordem mais baixa teremos

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{1}{g^5(\alpha_0)} e^{-\frac{5}{2}(x/g(\alpha_0))^2} P_\alpha(\alpha_0) d\alpha_0 \simeq \frac{e^{-\frac{5}{2}x^2}}{2} \int_0^\pi e^{\frac{5}{2}x^2 g''(0) \alpha_0^2} \alpha_0 d\alpha_0.$$

Note que  $g''(0) < 0$ , de modo que novamente só valores de  $\alpha_0$  próximos de zero contribuem para essa última integral. Assim, podemos escrevê-la como uma integral no intervalo  $[0, \infty)$  e obter uma solução analítica. Substituindo resultado na expressão acima obtemos

$$I_1 \simeq \frac{e^{-\frac{5}{2}x^2}}{10} \frac{1}{g''(0)x^2}.$$

Verificamos que para  $x \approx 10$  a integral (3.64) já se aproxima muito do seu valor assintótico.

Como a forma do integrando da expressão (3.65), incluindo a sua largura e posição do máximo, muda muito com  $\Delta$ , utilizamos um método de Runge-Kuta adaptativo para resolver essa integral, parando as iterações quando ela converge. Em cada passo, precisamos calcular  $I_1$ . Os resultados obtidos para a LTA e DTA serão discutidos na próxima subseção.

No caso da aproximação de Zel'dovich podemos simplificar ainda mais o cálculo da função de massa, pois como veremos, é possível obter uma forma analítica para  $I_1$ . Da

expressão (3.42) temos

$$a_c(\pm 1, x, \alpha) = a_c^\pm(x, \alpha) = H^\pm(f) = \frac{3}{\pm 1 + 2f}, \quad \text{com } f = xg(\alpha),$$

onde  $g(\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$ . (3.66)

Nesse caso, é fácil encontrar expressões analíticas para todas as quantidades que aparecem no cálculo da função de massa:

$$H_\pm^{-1}(y) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{y} \mp 1 \right),$$

de modo que

$$\left| \frac{\partial H^{-1}}{\partial a_c} \Big|_{|\nu\Delta|} \right| = \left| \left( \frac{\partial H}{\partial f} \Big|_{f=H_\pm^{-1}(y)} \right)^{-1} \right| = \frac{3}{2y^2}.$$

Assim, teremos

$$\nu f_a^\pm = \pm \frac{1}{\Delta} \frac{1}{2} (3 - \nu\Delta),$$

e

$$I_2 = I_1 \frac{3}{2^5} (3 - \nu\Delta)^4 \frac{1}{\Delta^6} e^{-\nu^2/2}.$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$x = \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \rightarrow P_\alpha d\alpha = x \left[ \frac{3}{2} - 2x^2 \right] 3 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

podemos obter uma expressão analítica para a integral  $I_1$ :

$$I_1 := \int_0^\pi \frac{1}{g^5(\alpha)} e^{-\frac{5}{2}(\nu f/g(\alpha))^2} P_\alpha(\alpha) d\alpha = \frac{3}{10} e^{-\frac{5}{2}(\nu f)^2} \frac{1}{(\nu f)^2} \left[ \frac{4(\nu f)^2}{10} \left( e^{-\frac{15}{2}(\nu f)^2} - 1 \right) + 3 \right],$$

onde  $f^\pm = (3/(|\nu|\Delta) \mp 1)/2$ . Comparando esse resultado com o cálculo numérico de  $I_1$  aplicado à ZA podemos testar o nosso método para determinar  $I_1$ .

A função de massa será dada por:

$$\Phi(\Delta) = \frac{1}{F_0} \frac{15\sqrt{5}}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta^4} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{5(3-\nu\Delta)^2}{8\Delta^2}\right] \times \left[ \frac{12}{5}\Delta^2 \left( \exp\left[-\frac{15(3-\nu\Delta)^2}{8\Delta^2}\right] - 1 \right) + \frac{9}{2}(3-\nu\Delta)^2 \right] d\nu. \quad (3.67)$$

### Discussão dos resultados

Com os métodos apresentados nas seções precedentes, nós calculamos a função de massa universal para a ZA, LTA e DTA. Não é possível calcular  $\Phi(\Delta)$  para a MZA e CZA, já que elas não se aplicam a algumas regiões subdensas. Na figura 3-10, mostramos as funções de massa para essas aproximações. Para comparar, mostramos também nessa figura o ajuste aos resultados de simulações de  $N$ -corpos obtido por Jenkins et al. [103], assim como a função de massa de PS.

A existência da função de massa universal foi inferida a partir da equação (3.54), que supõe um critério local para definir a formação de um objeto. No entanto, a relação (3.58) foi verificada em simulações numéricas de alta resolução [103]. Em princípio, a invariância no tempo só seria válida num universo de Einstein-de Sitter, pois precisamos utilizar a relação (3.39). Porém, as simulações mostram que a (3.58) é satisfeita independentemente do tempo, dos parâmetros cosmológicos e do espectro de potência [103].

Vemos que os resultados da DTA e LTA são muito similares. Além disso, no limite de grandes massas ( $\Delta \lesssim 0.5$ ), elas reproduzem bem os resultados de  $N$ -corpos. Entretanto, podemos ver que essas aproximações superestimam a concentração de massas próxima a  $\Delta = 1$ . A cauda direita da distribuição cai mais rápido que as simulações de  $N$ -corpos. Essa tendência ainda é mais amplificada na ZA. No entanto, nessas aproximações, a posição do pico da distribuição está bem próximo das simulações, fornecendo uma estimativa melhor do que a função de PS; em particular, a LTA e DTA fornecem quase o mesmo valor que o resultado de  $N$ -corpos.

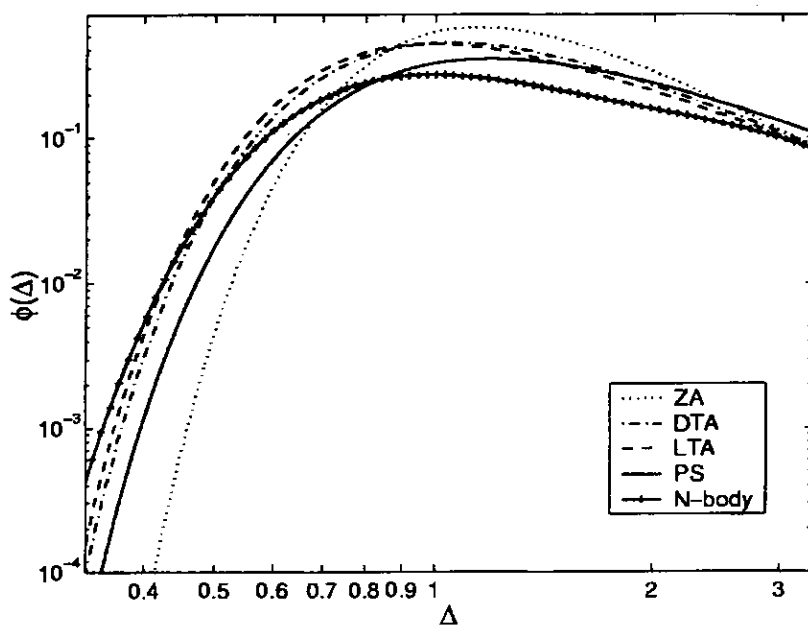
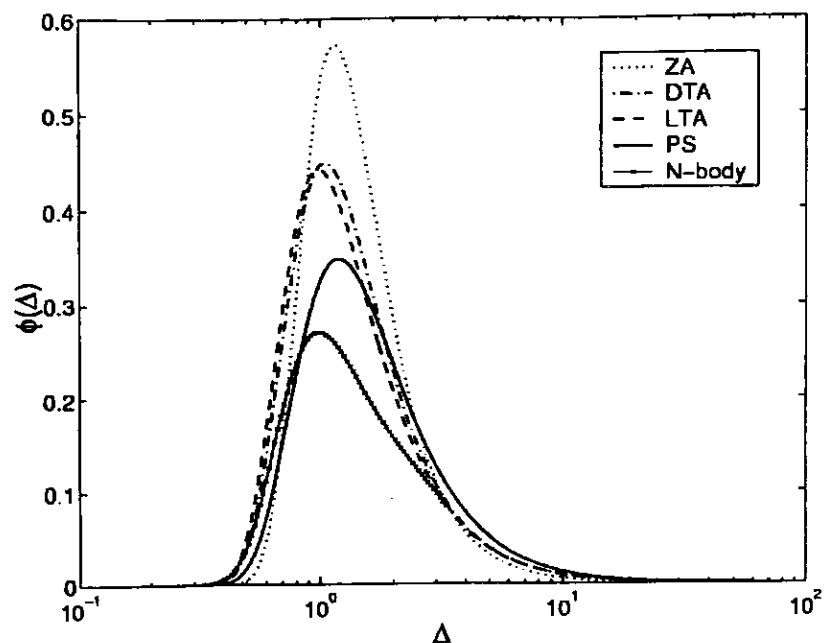


Figura 3-10: (a) A função de massa universal calculada com a LTA (tracejado), a DTA (traço-ponto) e a ZA (pontilhado). Para comparar, mostramos nesta figura o ajuste para as simulações de  $N$ -corpos (linha+cruz) obtido por Jenkins et al. [103] e também a função de PS original (linha contínua). (b) O mesmo que em (a) mas agora uma escala logarítmica é utilizada no eixo  $y$ . Aqui o eixo  $x$  é limitado ao intervalo  $0.332 \leq \Delta \leq 3.32$  varrido pelas simulações de  $N$ -corpos.

Devido à normalização da função de massa, o fato de que próximo de  $\Delta = 1$  o número de objetos é superestimado nas aproximações locais, implica que elas deveriam fornecer uma estimativa menor do que as simulações de  $N$ -corpos para  $\Delta$  suficientemente grande. Nesse caso, a contribuição dos objetos de baixa massa é dominante. Em qualquer processo realista, esses objetos devem surgir da fragmentação de aglomerações maiores. O critério para a formação de um objeto pelo colapso direto de uma região perturbada não leva em conta esse processo complexo de fragmentação. Dessa forma, a discrepância da função de massa para grandes valores de  $\Delta$  pode ser atribuída ao uso da expressão (3.54) e não da definição (3.50).

Um dos erros cruciais da aproximação de Zel'dovich que influencia o cálculo da função de massa é que ela superestima o tempo de colapso para uma perturbação esférica. Isso acaba causando um aumento de  $\Phi(\Delta)$  próximo a  $\Delta = 1$ , como se aumentássemos o valor de  $\delta_c$  na expressão de PS (eq. 3.53).

O problema da normalização não é muito importante nas aproximações locais, pois os fatores de normalização estão próximos de um (1/0.92 para DTA e ZA e 1/0.89 para a LTA). Já na dedução original de PS o fator de normalização requerido era  $F_0 = 1/0.5$ . Isso se deve ao fato de que, no modelo do colapso esférico, só regiões sobredensas colapsam e estas correspondem à metade das perturbações.

Apesar de estar baseada em suposições físicas erradas em relação à dinâmica do colapso gravitacional, a função de massa original de Press & Schechter é bastante boa quando comparada com as simulações numéricas.

A abordagem de PS supõe que há um critério local para definir se um elemento de volume colapsou para formar um objeto ligado. Ou seja, precisamos saber se um objeto é formado em  $a = a_0$  a partir das condições iniciais num ponto. Isto faz da função de massa uma quantidade intrinsecamente lagrangiana, como foi observado primeiramente por Monaco [85]. Mas qual critério devemos utilizar para determinar o tempo de formação de uma estrutura? No nosso cálculo, estivemos sempre utilizando o tempo de colapso  $a_c$ , porque é natural pensar que em  $a_c$  ocorrerá o cruzamento das trajetórias e a subsequente virialização, com a formação de um objeto ligado. Além disso, é essa quantidade que

sabemos calcular com as aproximações locais.

No entanto, como vimos na seção 3.1.1, o tempo de colapso  $a_c$  equivale geralmente ao colapso no primeiro eixo. Pode-se argumentar que esse não é um bom critério para a formação de uma estrutura, já que ele corresponde ao colapso planar. Talvez fosse melhor definir a formação de um objeto ligado quando ocorresse o colapso nos três eixos, mas infelizmente nem as aproximações locais, nem nenhum outro método lagrangiano, permitem acompanhar a evolução além do colapso no primeiro eixo.

No caso do colapso esférico é mais fácil definir o tempo de virialização pois a divergência na densidade e o colapso nos três eixos ocorrem ao mesmo tempo. Assim espera-se que  $a_{vir}$  seja da ordem de  $a_c$ .

Alguns autores tentaram ultrapassar o limite do formalismo lagrangiano através de alguns *Ansatz* para o tempo de colapso no terceiro eixo. Uma extrapolação da aproximação de Zel'dovich daria que ele ocorre quando  $\lambda_1^0 a = 1$ , se  $\lambda_1$  é o menor autovalor. Nesse caso é fácil calcular a função de massa, basta trocarmos  $\cos(\alpha_0/3)$  por  $\cos[(\alpha_0 + 2\pi)/3]$  na expressão (3.66). Lee & Shandarin [99] propõem que a virialização ocorre quando  $\lambda_1^0 a = \lambda_c$ , onde o parâmetro  $\lambda_c$  é ajustado para estar em acordo com as simulações numéricas. Audit et al. [81] utilizam uma expressão para  $a_{vir}$  que é apenas função de uma componente do cisalhamento, motivados pelo fato de que  $a_c$  é pouco sensível à outra componente (veja a seção 3.3.2). Também há parâmetros livres que devem ser ajustados. Sheth, Mo & Tormen [98] utilizam o modelo do elipsóide para estudar o colapso no terceiro eixo. Para evitar a divergência eles congelam os dois eixos menores quando estes atingem um certo valor crítico.

Todos esses critérios para o colapso no terceiro eixo são puramente empíricos e não têm nenhum modelo dinâmico por trás. A maioria tem parâmetros livres que são ajustados para concordar com os resultados de  $N$ -corpos, perdendo qualquer valor de predição. Além disso, essas abordagens sempre requerem grandes fatores de normalização (12.5 no caso da extrapolação da ZA). Aqui estamos interessados apenas em aplicar os modelos dinâmicos proporcionados pelas aproximações locais, que permitem calcular  $a_c$  sem nenhum parâmetro livre e que ainda estão no limite de validade da abordagem lagrangiana.

Vemos, no entanto, que a dinâmica acaba não tendo um papel tão importante no cálculo da função de massa, já que ela entra apenas através da determinação do tempo de colapso em função das condições iniciais. Em particular,  $a_{vir}$  é uma propriedade do regime altamente não-linear, quando as partículas se cruzam até formar um objeto gravitacionalmente ligado. Nessa situação a matéria escura deveria ser tratada como um conjunto de partículas, já que a descrição de fluido deixa de ser válida, e não é mais possível utilizar as aproximações locais. Seria interessante estudar o processo de virialização em simulações de  $N$ -corpos e ver como ele se relaciona com o tempo de colapso nas várias geometrias possíveis.

Se tivéssemos uma prescrição para determinar o tempo de virialização em função dos parâmetros iniciais, é isso que utilizaríamos no lugar de  $a_c$  para calcular a função de massa, o resto do formalismo não se modifica.

Por último, é preciso dizer que o cálculo da função de massa nas simulações de  $N$ -corpos também depende de várias quantidades, como a escolha do algoritmo identificador dos halos e dos parâmetros associados e esse algoritmo. A tendência desses algoritmos é escolher aglomerações esféricas e não panquecas e filamentos. Isso também pode explicar a discrepância entre os resultados das aproximações locais e as simulações de  $N$ -corpos.

## 3.4 Teoria de Perturbação Lagrangiana e Aproximações Locais

Nesta seção desenvolveremos um estudo das aproximações locais no regime quase linear. Para isso faremos uma comparação entre os resultados perturbativos das aproximações locais e a teoria de perturbação lagrangiana (TPL), para um fundo de Einstein-de Sitter. Escolheremos os eixos de modo que  $\Psi_{ij}^{(1)}(q)$  seja diagonal no ponto  $q$ . Assim, podemos



escrever as condições iniciais como  $\Psi_{ij}^{(1)} = -\lambda_i^0 \delta_{ij}$ . Dessa forma, a equação (2.45) fica

$$\begin{aligned}\Psi_{ii}^{(2)} &= -\frac{3}{14} \left[ (\lambda_1^0 + \lambda_2^0 + \lambda_3^0)^2 - \left( (\lambda_1^0)^2 + (\lambda_2^0)^2 + (\lambda_3^0)^2 \right) \right] = \\ &= -\frac{3}{7} (\lambda_1^0 \lambda_2^0 + \lambda_2^0 \lambda_3^0 + \lambda_3^0 \lambda_1^0) = -\frac{3}{7} \eta_2.\end{aligned}\quad (3.68)$$

Por outro lado, com o  $\Psi_{ij}^{(2)}$  calculado pelas aproximações locais DTA e CZA (eq. 3.1) obtemos:

$$\Psi_{ii}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \frac{w_i^{(2)}}{a^2} = -\frac{3}{14} [(\lambda_2^0 + \lambda_3^0) \lambda_1^0 + (\lambda_1^0 + \lambda_3^0) \lambda_2^0 + (\lambda_1^0 + \lambda_2^0) \lambda_3^0] = -\frac{3}{7} \eta_2,$$

que é o mesmo resultado que a equação (3.68). No caso da MZA, temos

$$\Psi_{ii}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \frac{-D^{(2)} \lambda_i^0}{a^2} = -\frac{3}{7} \frac{\eta_2}{\eta_1} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^0 = -\frac{3}{7} \eta_2,$$

que também está em acordo com TPL. Dessa forma, vemos que o traço de  $J_{ij}$  até segunda ordem, é o mesmo para as aproximações locais e a teoria de perturbação lagrangiana.

A expressão (2.44) não depende se  $\Psi_{ij}^{(n)}$  é calculada pela teoria de perturbação lagrangiana, ou por algum outro método, como as aproximações locais por exemplo. Vemos portanto que, até segunda ordem, a TPL e as aproximações locais dão o mesmo resultado para o contraste de densidade<sup>7</sup>  $\delta$ . No entanto cada elemento do tensor de deformação pode ser diferente nessa ordem (veja a próxima subseção).

Esse resultado era de se esperar pois, como foi mostrado na seção 2.3.4, a solução de segunda ordem para  $\delta$  e  $\theta$  é realmente local e não depende da aproximação utilizada. Temos aqui em exemplo em que as aproximações locais podem dar um resultado incorreto para os elementos do tensor de deformação (diferindo da TPL) e correto para  $\delta$  e  $\theta$ , como havíamos comentado na seção 3.1.2. Na próxima subseção veremos um exemplo específico onde isso acontece.

---

<sup>7</sup>Como vimos na seção 2.3.4, a LTA e a NMA também dão o resultado exato para  $\delta$  até segunda ordem.

Em segunda ordem  $\Psi_{ij}$  continua simétrico (como vimos na seção 2.2.2), mas não podemos dizer se permanece diagonal. A resposta será dada pela integração da equação de Poisson e vai depender do problema específico em questão. Mesmo se houver termos não diagonais a expressão (3.68) mostra que eles não influenciam no cálculo da densidade nessa ordem.

Note que, se supusermos que  $\Psi_{ij}^{(2)}$  é diagonal e que pode ser escrito apenas em termos de  $\lambda_i^0$ , é possível separar a equação (3.68) em três termos obedecendo os critérios de simetria discutidos na seção 2.3.2. Obtemos assim o mesmo resultado que a (3.1). Isso é equivalente a separar a equação de Poisson em três, como fizemos para obter a DTA (seção 2.3.2).

Vimos que as aproximações locais e a TPL concordam até segunda ordem no cálculo de  $\delta$ . Será que esse resultado se mantém para ordens mais altas? Nós ainda não obtivemos a solução de terceira ordem da DTA e LTA, mas possuímos essa expressão para a CZA e para a MZA. Vamos então calcular o contraste de densidade até essa ordem, na CZA, na MZA e na TPL. Em terceira ordem, o determinante de  $J_{ij}$  fica (usando as eqs. 2.42 e 2.43):

$$\begin{aligned}
 J \simeq & 1 + a\Psi_{ii}^{(1)} + a^2\Psi_{ii}^{(2)} + \frac{1}{2}a^2 \left[ \left(\Psi_{ii}^{(1)}\right)^2 - \Psi_{ij}^{(1)}\Psi_{ji}^{(1)} \right] + & (3.69) \\
 a^3 \left\{ & \Psi_{ii}^{(3)} + \Psi_{ii}^{(1)}\Psi_{jj}^{(2)} - \frac{1}{2} \left[ \Psi_{ij}^{(1)}\Psi_{ji}^{(2)} + \Psi_{ij}^{(2)}\Psi_{ji}^{(1)} \right] + \det \left( \Psi_{ij}^{(1)} \right) \right\} = \\
 & 1 + aJ^{(1)} + a^2J^{(2)} + a^3J^{(3)}.
 \end{aligned}$$

Como vimos acima, resultado de segunda ordem  $J^{(2)}$  é o mesmo para as aproximações locais e para a TPL (e  $J^{(1)}$  só depende das condições iniciais). Entretanto não é possível calcular  $J$  até terceira ordem sem conhecer todos os componentes de  $\Psi_{ij}^{(2)}$ , de modo que a solução para  $\delta$  nessa ordem já não é mais local. No entanto podemos tentar fazer uma estimativa dessas componentes usando a solução de segunda ordem da DTA e CZA (3.1).

Dessa forma, teremos

$$\Psi_{ij}^{(1)} \Psi_{ji}^{(2)} = \sum_{i=1}^3 \frac{w_i^{(1)} w_i^{(2)}}{a^3}. \quad (3.70)$$

Com isso, podemos calcular  $\Psi_{ii}^{(3)}$  pela TPL. Usando a equação (2.46) obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{ii}^{(3)} &= -\frac{8}{21} \lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 - \frac{5}{42} \left[ (\lambda_1^0)^2 \lambda_2^0 + (\lambda_2^0)^2 \lambda_1^0 + (\lambda_2^0)^2 \lambda_3^0 + (\lambda_3^0)^2 \lambda_2^0 + (\lambda_1^0)^2 \lambda_3^0 + (\lambda_3^0)^2 \lambda_1^0 \right] = \\ &= -\frac{8}{21} \lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 - \frac{5}{42} \sum_i (\lambda_i^0)^2 (\lambda_j^0 + \lambda_k^0). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Calculando esse termo pela CZA temos

$$\Psi_{ii}^{(3)} = -\frac{18}{49} \lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 - \frac{107}{882} \sum_i (\lambda_i^0)^2 (\lambda_j^0 + \lambda_k^0). \quad (3.72)$$

O fator do primeiro termo difere de apenas 3,6% do resultado da teoria de perturbação lagrangiana de 3ª ordem, o segundo difere de 1,9%. É interessante notar que as (3.71) e (3.72) coincidem para a simetria esférica e plana e estão em acordo com a solução exata nesses casos. Já para a simetria cilíndrica a diferença dos coeficientes é de 1,9%. A expressão correta nesse caso é a (3.71), como pode ser observado na solução de terceira ordem para o caso cilíndrico (eq. 2.80).

Agora podemos calcular o termo de terceira ordem do determinante do tensor de deformação,  $J^{(3)}$ . Como a solução de segunda ordem é a mesma na DTA e CZA, a única diferença aparecerá no termo  $\Psi_{ii}^{(3)}$ :

$$J^{(3)} = \left( a + \frac{16}{7} \right) \lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 + \left( b + \frac{3}{14} \right) \sum_i (\lambda_i^0)^2 (\lambda_j^0 + \lambda_k^0),$$

onde  $a = -8/21$  e  $b = -18/44$  para a TPL, com a solução de segunda ordem da CZA e DTA; e  $a = -5/42$  e  $b = -078/882$ , para a solução de terceira ordem da CZA. Assim, o coeficiente do primeiro termo difere de apenas 2,5% e o do segundo difere de 0,7%.

Note que, pelas (2.48) e (3.70), se  $\Psi_{ij}$  é diagonal até segunda ordem, ele será simétrico

até a terceira.

Na discussão anterior, utilizamos a solução de segunda ordem da CZA e DTA para fazer uma estimativa de  $\Psi_{ij}^{(3)}$  na TPL e comparar com o termo de terceira ordem da CZA. Podemos seguir o mesmo procedimento utilizando o termo de segunda ordem da MZA no cálculo de  $\Psi_{ij}^{(3)}$ . Nesse caso teremos (eq. 2.53)

$$\begin{aligned}\Psi_{ij}^{(1)}\Psi_{ji}^{(2)} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_i^0 a D^{(2)} \lambda_i^0}{a^3} = \frac{3 \eta_2}{7 \eta_1} \left[ (\lambda_1^0)^2 + (\lambda_2^0)^2 + (\lambda_3^0)^2 \right], \\ \Psi_{ii}^{(1)}\Psi_{ji}^{(2)} &= \frac{(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^0 a) (\sum_{i=1}^3 D^{(2)} \lambda_i^0)}{a^3} = \frac{3 \eta_2}{7 \eta_1} \eta_1^2.\end{aligned}$$

Substituindo este resultado na (2.46), obtemos

$$\Psi_{ij}^{(3)} = -\frac{1}{3} \frac{10 \eta_2}{7 \eta_1} (\lambda_1^0 \lambda_2^0 + \lambda_1^0 \lambda_3^0 + \lambda_2^0 \lambda_3^0) + \frac{1}{3} \lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0. \quad (3.73)$$

Calculando essa quantidade a partir da solução de terceira ordem da MZA (eq. 2.54), obtemos

$$\begin{aligned}\Psi_{ii}^{(3)} &= -\sum_i \frac{D^{(3)} \lambda_i^0}{a^3} = -\frac{1}{3} \left[ \frac{10}{7} \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 - \frac{\eta_3}{\eta_1} \right] \eta_1 = \\ &= -\frac{1}{3} \frac{10 \eta_2}{7 \eta_1} (\lambda_1^0 \lambda_2^0 + \lambda_1^0 \lambda_3^0 + \lambda_2^0 \lambda_3^0) + \frac{1}{3} \lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0.\end{aligned} \quad (3.74)$$

Vemos portanto que o valor de  $\Psi_{ij}^{(3)}$  calculado pela TPL em terceira ordem, supondo válida a solução de segunda ordem da MZA, é idêntico ao obtido diretamente da solução de terceira ordem da MZA. Esse resultado difere da solução obtida utilizando a expansão de segunda ordem da DTA (eq. 3.71) e da solução de terceira ordem da CZA (eq. 3.72). Isto era de se esperar, pois a MZA difere da DTA e CZA já em segunda ordem.

Nesta seção mostramos que a expressão de  $\delta$  até segunda ordem na TPL é local. Vimos que esta expressão é a mesma em todas as aproximações locais, pois  $\Psi_{ij}^{(2)}$  coincide em todos os casos. Supondo que a solução de segunda ordem de uma dada aproximação

local é válida, utilizamos a TPL para calcular  $\Psi_{i|j}^{(3)}$ . O resultado pode ser comparado com a solução de terceira ordem dessa aproximação, sendo uma espécie de teste de auto-consistência. Na MZA obtivemos o mesmo resultado nos dois casos e na CZA houve uma pequena diferença. Acreditamos que a solução de terceira ordem da DTA deva satisfazer a equação (3.71).

Na próxima seção, aplicamos a TPL a um elipsóide homogêneo, resolvendo explicitamente a equação de Poisson e comparamos as soluções de segunda e terceira ordens com as aproximações locais.

### 3.4.1 Aplicação da TPL a um Elipsóide Homogêneo

Há vários testes da teoria de perturbação lagrangiana (TPL) na literatura, incluindo análises estatísticas e comparação com simulações de  $N$ -corpos (veja a ref. [106], por exemplo). No entanto é interessante termos um modelo analítico para fazer a comparação com a solução exata e com outras aproximações. Uma comparação com aproximações não-lineares eulerianas numa heterogeneidade esférica é apresentada em [107]. A TPL também foi aplicada a modelos de *voids* esféricos [108]. Como as aproximações locais são exatas para as simetrias plana, esférica e cilíndrica, elas têm a mesma expansão perturbativa que a TPL nesses casos. Precisamos portanto de uma situação mais genérica onde possamos testar as expansões perturbativas e compará-las com os resultados da TPL. Um bom candidato seria o modelo do elipsóide homogêneo (MEH), que tem uma solução analítica aproximada. Esta análise servirá ao mesmo tempo para comparar a TPL com a solução do MEH, e para comparar a TPL com as aproximações locais numa configuração específica.

Vamos então aplicar a teoria de perturbação lagrangiana a um elipsóide homogêneo. Como sabemos resolver a equação de Poisson no elipsóide, poderemos obter as expressões explícitas de  $\Psi_i^{(n)}$ . Utilizando as condições iniciais de um elipsóide homogêneo, teremos  $\Psi_{i|j}^{(1)} = -(\delta_0 \beta_i / 3) \delta_{ij}$  (eq. 3.30), substituindo este resultado na equação (2.45), obtemos

$$\begin{aligned}\Psi_{i|i}^{(2)} &= -\frac{3}{14} \left[ \left( \frac{\delta_0}{3} \sum_{i=1}^3 \beta_i \right)^2 - \left( \frac{\delta_0}{3} \right)^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \right] = \\ &= -\frac{3\delta_0^2}{14} \left[ 1 - \frac{1}{9} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \right].\end{aligned}\quad (3.75)$$

Como  $\Psi_i^{(2)}$  é irrotacional no espaço lagrangiano (eq. 2.47), podemos escrevê-lo como o gradiente de um potencial  $\phi^{(2)}$ . Assim a equação (3.75) fica

$$\nabla_q \phi^{(2)} = -\frac{3\delta_0^2}{14} \left[ 1 - \frac{1}{9} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \right] =: F.$$

O lado direito dessa equação é independente da posição. Como vimos na seção (3.3.1), a solução da equação de Poisson dentro do elipsóide é dada por

$$\phi = A_1 q_1^2 + A_2 q_2^2 + A_3 q_3^2 + const. \quad (3.76)$$

com

$$A_i = \frac{1}{4} F X_1 X_2 X_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(X_i^2 + s) \sqrt{(X_1^2 + s)(X_2^2 + s)(X_3^2 + s)}}.$$

Note que utilizamos os valores iniciais dos eixos  $X_i$  porque a integral é feita no espaço lagrangiano, o que é equivalente a integrar em  $x_i$  no limite em que  $a$  vai a zero. Com as definições de  $\beta_i$  e  $R_D$  (eqs. 3.27 e 3.25) teremos<sup>8</sup>

$$\Psi_i^{(2)} = \phi_{|i}^{(2)} = -\frac{\beta_i q_i}{14} \delta_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{9} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \right]. \quad (3.77)$$

Com essa solução, podemos obter a solução de terceira ordem. Da equação acima, vemos  $\Psi_{i|j}^{(2)}$  é diagonal, de modo que  $\Psi_{i|j}^{(3)}$  será simétrico e  $\Psi_i$  é irrotacional em terceira ordem.

---

<sup>8</sup>Sem soma em  $i$ .

Novamente poderemos escrever

$$\Psi_{i|i}^{(3)} = \nabla_q \phi^{(3)}.$$

Utilizando a equação (2.46) e resolvendo a equação de Poisson, obtemos

$$\Psi_i^{(3)} = \frac{\beta_i q_i}{9} \delta_0^3 \left\{ \frac{1}{27} \beta_1 \beta_2 \beta_3 - \frac{5}{14} \left[ 1 - \frac{1}{9} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \right]^2 \right\}, \quad (3.78)$$

onde novamente não há soma em  $i$  nessa expressão.

Note que, para obter as expressões (3.77) e (3.78), não é preciso supor que o elipsóide fica homogêneo ou que ele mantém a sua forma durante a evolução, já que a solução da equação de Poisson é obtida em  $a \rightarrow 0$ . No entanto, com o  $\Psi_i$  calculado até terceira ordem podemos ver (pela eq. 3.69) que a densidade é a mesma em todos os pontos, já que  $\Psi_{i|j}^{(n)}$  não dependem da posição. Se  $\Psi_{i|j}$  continua simétrico até ordem  $n$ , poderemos sempre escrever uma equação de Poisson para  $\phi^{(n)}$ . Se  $\Psi_{i|j}^{(n-1)}$  não depende da posição, a solução para  $\phi^{(n)}$  será dada pela (3.76), de modo que  $\Psi_{i|j}^{(n)}$  não dependerá da posição. Assim, se  $\Psi_{i|j}$  é simétrico até ordem  $n$  o elipsóide continuará homogêneo até essa ordem. Além disso, teremos sempre que  $\Psi_i^{(n)} \propto q_i$ , de modo que a relação (3.23) é mantida.

Até terceira ordem a trajetória será dada por

$$x_i = q_i + \Psi_i^{(1)} a + \Psi_i^{(2)} a^2 + \Psi_i^{(3)} a^3. \quad (3.79)$$

Quando fizermos a comparação com o MEH, vamos escolher  $q_i$  como sendo os valores iniciais dos semi-eixos, de modo que  $x_i = Y_i$ .

Vamos aplicar a (3.79) às três simetrias para verificar as expressões (3.77) e (3.78):

- Para simetria plana temos  $\beta_1 = 3$ ,  $\beta_2 = \beta_3 = 0$ , de modo que  $\Psi_i^{(2)} = \Psi_i^{(3)} = 0$ , como era de se esperar, pois a aproximação de Zel'dovich é exata nesse caso e todos os termos de ordem mais alta se anulam.
- Na simetria esférica temos  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ . Nesse caso, a (3.79) com as expressões

(3.77) e (3.78) dá

$$x_i = q_i \left( 1 - \frac{\delta_0 a}{3} - \frac{\delta_0^2 a^2}{21} - \frac{23\delta_0^3 a^3}{1701} \right),$$

que está em acordo com a expressão (2.75) e com o resultado obtido em [107] para a PPZA.

- Com simetria cilíndrica temos  $\beta_1 = \beta_2 = 3/2$ ,  $\beta_3 = 0$ , de modo que a (3.79) fica

$$x_i = q_i \left( 1 - \frac{\delta_0 a}{2} - \frac{3\delta_0^2 a^2}{56} - \frac{5\delta_0^3 a^3}{336} \right),$$

para  $i = 1, 2$  e  $x_3 = q_3$ . Assim

$$w = -\frac{\delta_0}{2} \left( 1 + a\delta_0 \frac{3}{28} + \delta_0^2 a^2 \frac{5}{168} \right),$$

que também está em acordo com a expansão (2.80).

### Comparação com as aproximações locais

Vamos agora escrever a solução de segunda ordem das aproximações locais com as condições iniciais do elipsóide homogêneo (eq. 3.30). Nesse caso  $\lambda_i^0 = \delta_0 \beta_i / 3$ , e a solução de segunda ordem da DTA e CZA fica

$$\begin{aligned} w_i^{(2)} &= -\frac{3}{14} \lambda_i^0 (\lambda_j^0 + \lambda_k^0) a^2 = -\frac{\beta_i}{14} \delta_0^2 \frac{1}{3} (\beta_j + \beta_k) a^2 = \\ &= -\frac{\beta_i}{14} \delta_0^2 \left( 1 - \frac{\beta_i}{3} \right) a^2. \end{aligned}$$

Vemos que essa expressão é diferente da que seria obtida da equação (3.77):

$$w_i^{(2)} = -\frac{\beta_i}{14} \delta_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{9} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \right] a^2. \quad (3.80)$$

Portanto podemos ver explicitamente que as aproximações locais dão um resultado equivocado, já em segunda ordem. O quanto isso afeta a qualidade das aproximações locais,



não está claro. Precisamos varrer todos os valores possíveis de  $\beta_i$  e ver como se comportam as diferenças entre essas duas expressões.

A solução em segunda ordem da MZA (2.53) fica:

$$w_i^{(2)} = -\frac{\beta_i}{7} \frac{1}{9} \delta_0^2 (\beta_1 \beta_2 + \beta_2 \beta_3 + \beta_3 \beta_1) a^2 = \quad (3.81)$$

$$-\frac{\beta_i}{14} \delta_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{9} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \right] a^2,$$

onde, na última igualdade utilizamos o fato de que  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 3$ , e que  $\eta_1 = \delta_0$ . Vemos que as expressões (3.80) e (3.81) são idênticas, de modo que a MZA é correta em segunda ordem para o elipsóide.

Vamos ver agora os resultados em terceira ordem. O termo de terceira ordem da CZA fica

$$w_i^{(3)} = -\frac{\delta_0^3 a^3 \beta_i}{9} \frac{1}{13230} \left[ 221 (\beta_j^2 + \beta_k^2) + 226 \beta_j \beta_k + 471 (\beta_j + \beta_k) \right],$$

que novamente difere da solução da TPL em terceira ordem (eq. 3.78):

$$\Psi_i^{(3)} = \frac{\beta_i}{9} \delta_0^3 a^3 \left\{ \frac{1}{27} \beta_1 \beta_2 \beta_3 - \frac{5}{14} \left[ 1 - \frac{1}{9} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \right]^2 \right\}.$$

No caso da MZA, a solução de terceira ordem (2.54) fica:

$$w^{(3)} = -\frac{\beta_i}{9} \delta_0^3 a^3 \left\{ \frac{5}{14} \left[ 1 - \frac{1}{9} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) \right]^2 - \frac{1}{27} \beta_1 \beta_2 \beta_3 \right\}$$

Que é idêntica ao resultado da TPL em terceira ordem. Dessa forma, a MZA é exata para o elipsóide pelo menos até a terceira ordem. Talvez por isso a MZA forneça o melhor resultado para a evolução dos eixos (como vimos na seção 3.3.1).

## Conclusão

Nesta seção comparamos a TPL com as aproximações locais no caso do elipsóide homogêneo. Com essa escolha, temos a solução exata da equação de Poisson, o que permite determinar completamente os  $\Psi_i^{(n)}$ . Temos também uma solução analítica aproximada (veja a seção 3.3.1) que pode ser utilizada para comparar com as expansões lagrangianas e com as aproximações locais. Além disso, com a escolha do elipsóide evitamos dois aspectos problemáticos das aproximações locais: a manutenção da diagonalidade e a recomposição das posições (que estão diretamente ligados). Com isso podemos testar essas aproximações independentemente desses problemas.

Verificamos neste caso que a MZA é exata, pelo menos até terceira ordem. Como qualquer elemento de volume com  $\lambda_i^0 > 0$  pode ser identificado localmente com o elipsóide, esse resultado implicaria que a MZA é a melhor aproximação local para esse tipo de condição inicial. De qualquer forma, para quantificar os desvios das outras aproximações com relação à solução exata, deveríamos calcular as diferenças em todo o intervalo de variação de  $\beta_i$ .

## 3.5 Perspectivas futuras

Nesta seção, discutiremos algumas perspectivas de trabalho futuro para completar o estudo das aproximações locais. Como vimos nas seções anteriores, essas aproximações têm um comportamento muito semelhante. Por ser uma expressão analítica, os cálculos com a CZA são muito mais rápidos. No entanto, essa aproximação não pode ser aplicada a flutuações subdensas, porque a expansão em série de potências deixa de valer. Esses resultados, levaram à idéia de buscar uma aproximação local escrita como uma função racional (eq. 2.83), que fosse válida para quaisquer condições iniciais. Alguns parâmetros seriam escolhidos de modo a reproduzir o comportamento assintótico genérico discutido nas seções (2.73) e (3.1.1). Os outros seriam determinados utilizando os resultados de outras aproximações locais. Essa nova aproximação permitiria incorporar as vantagens de todas as aproximações locais, sendo exata nas três simetrias, podendo ser aplicada a

quaisquer condições iniciais, reproduzindo o comportamento assintótico correto e oferecendo grande velocidade de cálculo.

A seguir, apresentaremos uma proposta para fazer a comparação entre as aproximações locais e as simulações computacionais de  $N$ -corpos. Esse seria o teste definitivo para determinar o limite de validade dessas aproximações. Depois discutiremos algumas extensões das aproximações locais.

### 3.5.1 Simulações de $N$ -corpos

Para testar a acurácia das aproximações locais, nós comparamos os seus resultados com o modelo do elipsóide homogêneo (seção 3.3.1) e com a teoria de perturbação lagrangiana (seção 3.4). No entanto, esses estudos se restringem ao regime quase linear ou a situações ainda muito simétricas. Para testar as aproximações locais em situações genéricas, é preciso recorrer a simulações de  $N$ -corpos.

Nas simulações de  $N$ -corpos a matéria escura é representada por partículas. Para realizar essas simulações devemos fornecer as posições e velocidades iniciais das partículas e, é claro, o modelo cosmológico de fundo. Cada partícula segue uma trajetória definida pela equação (2.6), onde o campo gravitacional peculiar na partícula  $A$  é calculado por

$$\phi^A = -Ga^2 \sum_{B \neq A} \frac{m_B}{|\vec{x}_B - \vec{x}_A|}. \quad (3.82)$$

Na verdade é preciso colocar uma suavização no cálculo do potencial, para representar a força entre dois corpos finitos, de modo a evitar a formação não física de binárias compactas. Para isso basta acrescentar uma constante no denominador na equação (3.82). Calcular as forças pela soma direta entre todos os pares é proibitivo, mesmo com os grandes supercomputadores de processamento paralelo. Um número típico de partículas numa simulação atual é  $N = 10^7$ . Nesse caso, um único cálculo das forças por soma direta levaria várias horas num computador de 100-GFlops ( $10^9$  operações de ponto flutuante por segundo). Existem vários algoritmos para calcular as forças gravitacionais. O mais popular atualmente para simulações cosmológicas é o  $P^3M$  (*particle-particle/particle-*

*mesh*) adaptativo, que combina métodos de transformada de Fourier para a contribuição das partículas distantes, e soma direta para as partículas próximas. Nesse método o número de operações varia como  $N \log N$ , enquanto na soma direta teríamos  $N^2$  operações. Existem até processadores desenvolvidos exclusivamente para o cálculo direto das forças gravitacionais. Para um excelente artigo de revisão sobre simulações cosmológicas veja a referência [45]. Nós não discutiremos mais nenhum aspecto das simulações de  $N$ -corpos aqui. Trataremos esses métodos como uma “caixa preta”, onde entramos com as posições e velocidades iniciais perturbadas e obtemos as posições, para um dado valor posterior do fator de escala  $a$ . Um pacote que implementa o algoritmo de  $P^3M$  e é bastante popular para simulações cosmológicas é o HYDRA [109, 110].

### Comparação entre as simulações de $N$ -corpos e as aproximações locais

Na seção 3.1.2, nós mostramos que as aproximações locais não reproduzem corretamente a dinâmica do tensor de deformação, impedindo o cálculo das posições. Para isso, escolhemos um conjunto particular de condições iniciais (para as quais  $J_{ij}$  é diagonal em todos os pontos) e mostramos que a evolução é inconsistente com a preservação da diagonalidade (implicada em todas as aproximações estudadas). Como fazer então para comparar as aproximações locais com as simulações de  $N$ -corpos se as primeiras podem fornecer apenas quantidades locais, enquanto as últimas fornecem apenas as posições?

Uma possibilidade é calcular os parâmetros cinemáticos a partir do resultado das simulações de  $N$ -corpos. Por exemplo, se conhecemos as posições das partículas, podemos calcular a densidade utilizando uma suavização:

$$\delta(\vec{x}) = \sum_A m_A W(\vec{x} - \vec{x}_A, h),$$

onde  $W$  é um núcleo (*Kernel*) de largura  $h$  que faz a interpolação. Assim, obtemos o campo de contraste de densidade em função da posição. Entretanto, o que temos nas aproximações locais é  $\delta(\vec{q})$  e não  $\delta(\vec{x})$ . Mas nós podemos identificar cada partícula e, se

guardamos as posições iniciais, sabemos a coordenada lagrangiana correspondente a cada uma delas. Assim, se calculamos a densidade na posição  $\vec{x}_B$  da partícula  $B$ , sabemos que ela corresponde à coordenada lagrangiana  $\vec{q}_B$ . Temos então

$$\delta(\vec{q}_B) = \sum_A m_A W(\vec{x}_B - \vec{x}_A, h),$$

que pode ser comparado diretamente com o resultado das aproximações locais. Interpolando a função  $\delta(\vec{q}_B)$  podemos ter o campo de densidades contínuo  $\delta(\vec{q})$ .

Nós poderíamos aplicar um procedimento semelhante para obter os outros parâmetros cinemáticos, como o cisalhamento  $\sigma_{ij}(\vec{q})$ , por exemplo. Para isso deveríamos obter a derivada do campo de velocidades com relação à posição, o que pode introduzir erros que dependem fortemente da resolução e que são difíceis de controlar. Se a interpolação é uma tarefa relativamente segura, a derivação é muito sensível a variações locais. Dessa forma, o cálculo de  $\delta(\vec{q})$  é muito mais robusto que o dos outros parâmetros cinemáticos. Assim, vale a pena nos concentrarmos primeiramente nessa quantidade. Além disso, como foi discutido nas seções 3.1.2 e 3.4, acreditamos que as aproximações locais possam fornecer bons resultados para  $\delta$  mesmo se os outros parâmetros cinemáticos não são reproduzidos adequadamente.

Propomos que a função  $\delta(\vec{q})$  seja a base para a comparação entre as aproximações locais e as simulações de  $N$ -corpos, chamaremos os gráficos dessa função de *mapas lagrangianos*. A partir desses mapas é possível estudar várias propriedades da distribuição de massa. Por exemplo, podemos definir uma estrutura como uma região que tem um contraste de densidade maior que um certo valor  $\delta_e$ . As superfícies com  $\delta = \delta_e$  definem a forma das estruturas no espaço lagrangiano.

No entanto, não podemos fazer uma comparação direta entre os valores de  $\delta(\vec{q})$  gerados pelas aproximações locais e as simulações de  $N$ -corpos. Em primeiro lugar, porque há regiões em que  $\delta(\vec{q})$  pode divergir nas aproximações locais, correspondendo ao cruzamento das trajetórias nas simulações. Em segundo lugar, porque a evolução nas simulações de

$N$ -corpos é caótica, e portanto só tem sentido fazer uma análise estatística. Existem vários métodos estatísticos para estudar as propriedades da distribuição de matéria. Os mais conhecidos são o cálculo da função de correlação de dois pontos  $\xi(r)$ , definida por

$$\xi(\vec{r}) := \langle \delta(\vec{r} + \vec{r}') \delta(\vec{r}') \rangle,$$

e o espectro de potência  $P(k)$ , que é a transformada de Fourier de  $\xi(r)$ . Esses métodos foram projetados para trabalhar no espaço real  $r$ , mas podem ser aplicados à distribuição estatística no espaço lagrangiano. No entanto, no nosso conhecimento, a função de correlação no espaço  $q$  não tem nenhuma interpretação física e não pode ser relacionada com nenhuma quantidade observacional. Ela só serviria para fazer a comparação entre as aproximações locais e as simulações de  $N$ -corpos.

Há uma nova família de estatísticas baseada nas superfícies bidimensionais de densidade constante (para uma revisão desses métodos, veja a referência [111]). A mais conhecida delas é o gênero (*genus*) das superfícies de isodensidade. O gênero  $G(\delta)$  de uma superfície é um invariante topológico que mede o número de buracos menos o número de regiões isoladas. Pacotes computacionais para calcular o gênero estão disponíveis em [111] e [112]. A área das superfícies de isodensidade também é uma medida estatística útil. Uma forma completa de descrever a topologia das superfícies de isodensidade é dada pelos funcionais de Minkowski, que foram introduzidos na cosmologia recentemente [113]. Em três dimensões há quatro funcionais de Minkowski, dois deles são o gênero e a estatística da área e os outros dois são o volume ocupado (relacionada à função de probabilidade dos *voids*) e a curvatura média integral. Também existem algoritmos disponíveis para calcular esses funcionais [114].

Uma propriedade importante dos funcionais de Minkowski é que eles são medidas *globais e aditivas*. A aditividade permite calcular essas quantidades somando as suas contribuições locais. A grande vantagem dessas medidas é que elas são invariantes topológicos e portanto não mudam quando passamos do espaço lagrangiano para o euleriano (supondo que a transformação de coordenadas é bem definida). Dessa forma poderíamos

até calculá-las no espaço real nas simulações de  $N$ -corpos e no espaço lagrangiano nas aproximações locais. O mais importante é que podemos comparar os resultados com os dados observacionais, sem nos preocuparmos com a transformação  $\vec{q} \rightarrow \vec{x}$ . Uma outra vantagem desses métodos é que podemos estudar essas quantidades num determinado intervalo de  $\delta$  para o qual não ocorre o cruzamento das trajetórias nem a divergência nas aproximações locais. Além disso, esses funcionais são numericamente robustos em relação a irregularidades espaciais em pequenas escalas. Eles fornecem resultados robustos mesmo para amostras com um número relativamente pequeno de pontos. Vemos portanto que muitas informações interessantes acerca da distribuição de matéria podem ser obtidas a partir dos mapas lagrangianos, sem a necessidade de calcular as posições.

Uma outra quantidade interessante é função de distribuição de probabilidade do contraste de densidade  $f(\delta)$ , que pode ser calculada diretamente das aproximações locais com a distribuição estatística de condições iniciais. Definindo uma estrutura como uma região com  $\delta > \delta_e$ , podemos determinar a massa contida nessa região. Com a fração de estruturas de massa  $M$  podemos calcular a função de massa. Note que esse método é totalmente diferente do apresentado na seção 3.3.3. Lá utilizamos um critério puramente local para determinar a distribuição das massas. Aqui usamos a distribuição de matéria no espaço lagrangiano. Esse cálculo forneceria a própria função de massa, e não a função de massa universal (veja a seção 3.3.3)

## Condições iniciais

Na apresentação acima, pressupomos que tínhamos uma distribuição de condições iniciais que eram evoluídas no tempo, seja pela aproximações locais, seja com simulações de  $N$ -corpos. Discutimos como poderíamos comparar os resultados dos dois métodos utilizando os mapas lagrangianos. Mas como faremos para escolher as condições iniciais?

Nas simulações de  $N$ -corpos, as partículas, todas com a mesma massa, são deslocadas de uma rede cartesiana e uniforme inicial usando a solução linear (eqs. 2.18, 2.22 e 2.23).

de modo que as posições e velocidades iniciais são dadas por

$$\vec{x}(\vec{q}, t) = \vec{q} + \delta_+(t)\vec{\Psi}^0(\vec{q}), \quad \vec{v} = \dot{\delta}_+\vec{\Psi}^0 = aHf\delta_+\vec{\Psi}^0.$$

O campo de deslocamento  $\vec{\Psi}_0$  é calculado através da equação de continuidade linearizada<sup>9</sup> (eq. 1.47):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi}^0 = -\frac{\delta}{\delta_+(t)} = -\delta_k^0,$$

que pode ser resolvida usando métodos de transformada de Fourier. Numa simulação realista, o contraste de densidade é calculado pela transformada de Fourier de<sup>10</sup>  $\delta_k$ . Este pode ser obtido a partir flutuações iniciais gaussianas e alguma prescrição para o espectro de potência da matéria (veja o apêndice B).

Utilizando as equações (2.21) e (1.33) podemos obter a transformada de Fourier de<sup>11</sup>  $\Psi_{i,j}^0$ :

$$\Psi_{i,j}^0(\vec{k}) = -\frac{k_i k_j}{k^2} \delta_k^0. \quad (3.83)$$

Assim, para uma dada distribuição de  $\delta_k^0$  poderíamos obter a transformada do deslocamento  $\Psi_i^0$  e do seu gradiente. Nas aproximações locais, as condições iniciais são dadas pelos  $\lambda_i^0$  que são os autovalores de  $\Psi_{i,j}^0$ , de modo que precisamos diagonalizar essa matriz em cada ponto  $\vec{q}$ . Se esse processo for feito numericamente, poderemos introduzir erros mesmo antes de iniciar a integração temporal.

No momento, o que queremos testar é a capacidade das aproximações locais representarem corretamente e evolução não-linear. Nesse sentido, não precisamos nos preocupar com uma escolha realista das condições iniciais. Se escolhermos condições iniciais realistas (que vem de um dado espectro de potência) acabaremos gerando erros numéricos

<sup>9</sup>Notando que no regime linear  $\delta = \delta_+(t)\delta_0(\vec{q})$ , teremos  $\dot{\delta} = \dot{\delta}_+\delta_0(\vec{q}) = (\dot{\delta}_+/\delta_+)\delta$ .

<sup>10</sup>A quantidade  $\delta_k$  é a transformada de Fourier da perturbação  $\delta_0 = a \rightarrow \text{Olim}\delta/\delta_+$ .

<sup>11</sup>Note que, como  $x_i \rightarrow q_i$ , quando  $a \rightarrow 0$ , temos  $\Psi_{i,j}^0 = \Psi_{ij}^0$ .



para obter  $\lambda_i^0$ , de modo que estaríamos começando com condições iniciais diferentes das simulações de  $N$ -corpos. Podemos gerar as condições iniciais por uma expressão analítica, de modo que  $\Psi_{i,j}^0$  saia automaticamente diagonalizado, evitando assim a introdução de erros numéricos. Dessa forma, testamos apenas a habilidade das aproximações locais em reproduzir os resultados das simulações. Podemos determinar, por exemplo, até que valor de  $\delta$  ou de  $a$  essas aproximações são boas. Um exemplo de condições iniciais analíticas seria escolher

$$\Psi_i^0 = C_i \cos(k_i q_i).$$

Desse modo, temos automaticamente  $\langle \delta \rangle = 0$ , as condições iniciais são periódicas e é fácil normalizá-las. Com essa escolha obtemos

$$\delta_0(\vec{q}) = [C_1 k_1 \sin(k_1 q_1) + C_2 k_2 \sin(k_2 q_2) + C_3 k_3 \sin(k_3 q_3)].$$

Condições iniciais semelhantes foram utilizadas em [64] para estudar a invariância de escala antes do colapso na formação dos halos de matéria escura.

Depois podemos fazer a comparação com condições iniciais cosmológicas realistas e ver qual a influência dos erros numéricos no cálculo de  $\lambda_i^0$ . Podemos partir de alguma forma analítica de  $\delta_k$ , ou utilizar um pacote de condições iniciais como o COSMICS [252, 115]. Esse pacote calcula diretamente o campo de deslocamento  $\Psi_i^0$  dada a cosmologia de fundo e a normalização do espectro de potência. O contraste de densidade  $\delta_k$  é calculado a partir do espectro de potência, que inclui vários processos físicos das flutuações primordiais até a recombinação.

### Reconstrução das posições

Apesar de  $J_{ij}$  não ser um campo gradiente nas aproximações locais, podemos insistir em calcular as posições a partir de  $w_i$ , ignorando a inconsistência discutida na seção 3.1.2. Para condições iniciais genéricas, cada elemento de volume terá uma matriz  $T_{ij}(\vec{q})$

que diagonaliza  $J_{ij}$ . No final da integração no tempo, devemos calcular  $J_{ij}$  no mesmo referencial para todas as partículas. Só assim poderíamos integrar para obter  $\vec{x}(t, \vec{q})$ . O algoritmo seria o seguinte: Dado  $J_{ij}(\vec{q})$ , determinar  $T_{ij}(\vec{q})$  tal que:

$$J_{ij}(\vec{q}, t_0) = \sum_l T_{il}(\vec{q}) (1 + w_l(\vec{q}, t_0)) T_{lj}(\vec{q}),$$

calcular  $w_i(\vec{q}, t)$  por alguma aproximação local

$$J_{ij}(\vec{q}, t) = T_{il}(\vec{q}) (1 + w_l(\vec{q}, t)) T_{lj}(\vec{q}).$$

Note que, como os autovetores do tensor de deformação não mudam, a matriz  $T_{ij}(\vec{q})$  permanece a mesma. Com o tensor de deformação calculado em todos os pontos, integra-se a equação

$$\frac{\partial x_i}{\partial q^j} = J_{ij}(\vec{q}, t),$$

para obter  $x_i$ . Esse algoritmo de reconstrução das posições serviria para qualquer aproximação local sempre que  $J_{ij}$  tenha os seus eixos principais mantidos ao longo da evolução.

Esse método tem uma grande vantagem com relação à integração direta pelos parâmetros cinemáticos sugerida pelo Bertschinger [72]. Com eles calculamos (lembrando que  $\omega^i = 0$ )

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}.$$

Para cada intervalo de tempo deveríamos integrar no espaço obtendo  $v_i$ . A partir da velocidade seriam evoluídas as posições:  $x^i(t + dt, q) = x^i(t, q) + v^i(t, q)dt$ . Esse processo envolveria uma integração espacial para cada passo  $dt$ . Já se partimos do tensor de deformação, diagonalizamos  $J_{ij}$  uma única vez e fazemos apenas uma integração espacial no final.

No caso das condições iniciais diagonais em todos os pontos, seria fácil obter as

posições integrando

$$x_i^A = \int_{q_i^0}^{q_i^A} [1 + w_i(t, q)] dq_i.$$

Poderíamos comparar o resultado alcançado com esse cálculo com simulações de  $N$ -corpos e ver até que ponto a inconsistência discutida na seção 3.1.2 impede a recomposição das posições, ou seja, qual é o erro cometido ao supor que o tensor de deformação é dado realmente por  $1 + w_i$ .

### 3.5.2 Extensões das Aproximações Locais

É fácil mostrar que as aproximações locais podem ser aplicadas a flutuações num universo com  $\Omega \neq 1$ , ou que contém uma componente de energia adicional, distribuída uniformemente (como por exemplo um termo cosmológico). A razão disso é que a forma das equações de movimento não se altera, pois elas não envolvem explicitamente essa componente adicional. Ela aparece apenas nas quantidades homogêneas, como a taxa de expansão  $a(t)$  e a densidade  $\bar{\rho}$ .

#### Aproximações locais com vorticidade

Uma extensão interessante seria incorporar a vorticidade nas aproximações locais. No regime linear, os termos rotacionais não se acoplam às flutuações, mas apenas ao fluido homogêneo em expansão. Dessa forma, a vorticidade acaba diminuindo, devido à conservação do momento angular. Como vimos na seção 1.3.4 a vorticidade decai como  $\omega_r \propto a^{-2}$ . Por outro lado, fora do regime linear,  $\omega$  se acopla com as outras perturbações e, nas regiões que colapsam, esperaríamos que a vorticidade seja amplificada. Qual seria o efeito mais importante, o decaimento inicial de  $\omega$ , ou a amplificação nas regiões não-lineares? Poderia uma pequena vorticidade inicial, dentro dos limites observacionais, ser responsável pelo momento angular das galáxias, como é sustentado em [116]? Qual seria a ordem de grandeza desse efeito comparado com os mecanismos usuais para a geração de momento angular? Essas questões merecem um estudo mais aprofundado. Desenvolver

aproximações locais com rotação pode ser um caminho nessa investigação.

Podemos utilizar a conservação do momento angular para termos uma estimativa do efeito nas regiões não-lineares. Considerando uma região de massa  $m$ , a conservação do momento angular leva a  $mr^2\omega = \text{const}$ . Se a massa da flutuação de mantém constante, teremos  $r^3 \propto (1 + \delta)^{-1} \bar{\rho}^{-1}$ . Como  $\bar{\rho} \propto a^{-3}$  teremos

$$\omega_r \propto \frac{(1 + \delta)^{2/3}}{a^2}. \quad (3.84)$$

Esse resultado é igual ao obtido para pequenas flutuações da vorticidade sobre a aproximação de Zel'dovich [60]. A equação (3.84) implica que a rotação local deve ser maior nas regiões mais densas, como era de se esperar. No regime linear, obtemos o resultado da seção 1.3.4:  $\omega_r \propto a^{-2}$ .

As aproximações baseadas nos parâmetros cinemáticos são mais fáceis de generalizar do que as baseadas no tensor de deformação. No caso rotacional  $E_{ij}$  e  $\sigma_{ij}$  não podem mais ser diagonalizados simultaneamente ao longo da evolução. Entretanto, ainda podemos utilizar as equações (2.99) e (2.100), incluindo a vorticidade, para definir a NMA e LTA. Neste caso, além das equações de continuidade, Raychaudhuri e propagação do cisalhamento, devemos utilizar a equação de propagação da vorticidade (2.88).

Nas aproximações que partem do tensor de deformação  $J_{ij}$ , geralmente utiliza-se a hipótese de que os autovetores de  $J_{ij}$  não mudam com o tempo, de modo que podemos escrever:  $J_{ij} = (1 + w_i) \delta_{ij}$ . Entretanto, como vimos na seção 2.2, a manutenção da diagonalidade não é possível com vorticidade.

A aproximação de Zel'dovich foi estendida para o caso rotacional por Buchert [59]. Nessa solução aparece claramente o efeito da amplificação da vorticidade nas regiões colapsantes. Barrow e Saich [60] mostraram que a vorticidade só acopla com o fundo de Zel'dovich, não com as outras perturbações sobre essa solução. A teoria de perturbação lagrangiana (seção 2.2.2) usa a condição de irrotacionalidade apenas para obter equações para  $\Psi_{ij}^{(n)} - \Psi_{ji}^{(n)}$ , mas até onde sabemos, não foi proposta nenhuma extensão para o caso rotacional.

Nós aplicaremos a LTA com vorticidade e procuraremos estender as outras aproximações locais para o caso rotacional.

Para investigar as aproximações com rotação, podemos fazer testes semelhantes aos que aplicamos no caso irrotacional. Podemos, por exemplo, estender os resultados da seção 3.3.1 para tratar um elipsóide em rotação. Também podemos estudar o comportamento para condições iniciais genéricas incluindo a vorticidade.

Um estudo interessante seria investigar os efeitos das propriedades estatísticas da vorticidade inicial. Dada uma distribuição de  $\omega^i$  podemos calcular a abundância de objetos colapsados e a distribuição final da vorticidade. Poderíamos inclusive calcular a função de massa com  $\omega^i \neq 0$ . Dois tipos de distribuição são fisicamente interessantes:

- $\omega^i = \text{const}$ , representando um universo com pequena rotação homogênea inicial;
- distribuição aleatória de direções, com uma distribuição para o módulo  $\omega$  (gaussiana, por exemplo), representando a evolução de flutuações primordiais de vorticidade

Podemos estender a solução do elipsóide (seção 3.3.1) para o caso rotacional. Para um esferóide no vácuo, a solução foi obtida por Lynden-Bell [117], que verificou que a rotação se mantém homogênea, assim como o esferóide. Esperamos que o mesmo ocorra num universo em expansão.

Como as simulações de  $N$ -corpos não pressupõem  $\omega^i = 0$ , bastaria dar condições iniciais apropriadas com vorticidade. Poderíamos utilizar os métodos sugeridos na seção 3.5.1 para fazer a comparação com as aproximações locais.

### Aproximações locais relativísticas

Como vimos na seção (2.3.4), uma motivação para introduzir as aproximações locais veio de relatividade geral. De fato, a primeira aproximação local depois da de Zel'dovich foi proposta no contexto relativístico (veja a seção A.2.3) e corresponde à NMA no caso

newtoniano. Seria interessante investigar os análogos relativísticos de outras aproximações locais. No caso das aproximações baseadas na evolução do campo de maré e dos parâmetros cinemáticos, como a LTA, essa extensão é direta. Já para as aproximações baseadas no tensor de deformação a generalização relativística pode ser mais complicada. A aproximação de Zel'dovich na relatividade geral é discutida nas referências [118, 119].

A NMA não fornece bons resultados no contexto newtoniano. Apesar disso, em escalas maiores do que o raio de Hubble o seu análogo relativístico poderia ser acurado. No entanto mostrou-se que ele também não é uma boa aproximação (veja discussão na seção A.2.3). Já que a LTA é bem melhor do que a NMA no caso newtoniano, seria interessante investigar o seu comportamento no contexto da relatividade geral.

### 3.6 Discussão e Conclusões

Neste capítulo analisamos vários aspectos das aproximações locais. Esse estudo incluiu todas as aproximações conhecidas dessa categoria que são exatas para as simetrias plana, esférica e cilíndrica: a Aproximação de Zel'dovich Modificada (MZA), a Aproximação do Tensor de Deformação (DTA), a Aproximação Completa de Zel'dovich (CZA) e a Aproximação de Maré Local (LTA). As principais motivações dessa pesquisa foram: a possibilidade de estudar propriedades da evolução não-linear da dinâmica gravitacional, a obtenção de quantidades estatísticas e a grande velocidade de cálculo proporcionada por essas aproximações.

Como a evolução dos parâmetros cinemáticos não depende das partículas vizinhas, é possível investigar o seu comportamento a partir das condições iniciais em cada elemento de volume. Dessa forma, podemos estudar apenas a dinâmica gravitacional, sem a necessidade de fornecer condições iniciais em todo o espaço, que dependem do espectro das flutuações primordiais. Com isso, pode-se procurar propriedades gerais e simetrias subjacentes do regime não-linear.

A partir da distribuição de probabilidades das condições iniciais e com a evolução temporal fornecida pelas aproximações locais, é possível calcular uma série de propriedades

estatísticas, como por exemplo a função de massa.

Devido à localidade, não é preciso calcular o campo gravitacional gerado pela distribuição de todas as partículas em cada ponto, dessa forma, as aproximações locais ocupam muito menos tempo de cálculo do que as simulações de  $N$ -corpos.

Apesar dessas vantagens e da diversidade de aplicações discutidas na seção 3.3 não há estimativas teóricas sobre a validade dessas aproximações. Elas resolvem formalmente as equações de Euler e de continuidade, mas utilizam uma equação aproximada para o campo gravitacional. Como essas aproximações não envolvem nenhuma expansão no contraste de densidade  $\delta$ , seriam válidas, em princípio, até o regime altamente não-linear. Entretanto, a sua motivação física não é transparente, o que dificulta a determinação do seu limite de validade.

Uma limitação intrínseca à descrição da matéria escura como um fluido com  $p = 0$ , é que qualquer aproximação lagrangiana deixa de valer após o cruzamento das trajetórias, que corresponde a  $\delta \rightarrow \infty$  nessas aproximações. Na descrição de partículas, após esse momento ocorreria a virialização. Dessa forma, essas aproximações só podem ser aplicadas à distribuição de matéria em grande escala, onde ainda não ocorreu a formação de objetos gravitacionalmente ligados. Mesmo assim, há vários fenômenos interessantes que ocorrem no regime não-linear pré-virialização. Só para citar um exemplo, a partir de simulações numéricas mostrou-se que um perfil de densidade do tipo  $\rho \propto r^\gamma$  é obtido na formação dos halos de matéria escura antes do colapso [64]. Essa é uma propriedade genérica, com o expoente  $\gamma$  dependendo das condições iniciais. Com as aproximações locais temos a esperança de investigar comportamentos genéricos desse tipo.

Fizemos uma série de testes e aplicações das aproximações locais para procurar qual delas poderia reproduzir melhor a dinâmica não-linear e tentar estabelecer algum limite no seu domínio de validade. Nas seções 3.1 e 3.3.2 estudamos as suas características gerais e o tempo de colapso com condições iniciais genéricas. Descobrimos que o comportamento de todas as aproximações estudadas (MZA, DTA, CZA e LTA) é muito semelhante. Esse resultado é surpreendente, já que a origem dessas aproximações é bastante diferente. Já a NMA, que tem uma origem bastante semelhante à LTA, mas não é exata para simetria

cilíndrica, tem um comportamento muito diferente das outras aproximações locais.

Para testar as aproximações locais, nós comparamos os seus resultados com o modelo do elipsóide homogêneo (seção 3.3.1) e com a teoria de perturbação lagrangiana (seção 3.4). Todas as aproximações locais forneceram ótimos resultados nesses casos. Com esses testes ainda não é possível discriminar as diferentes aproximações, já que eles se limitam ao regime quase linear (expansão perturbativa), ou à situação ainda muito simétrica do elipsóide homogêneo. Tanto pela aplicação da teoria de perturbação lagrangiana ao elipsóide homogêneo, quanto pela comparação com a solução numérica desse modelo, vimos que MZA é a melhor aproximação nesse caso. Entretanto ela se comporta de forma bastante diferente das outras aproximações para grandes cisalhamentos. Além disso, a MZA não pode ser aplicada a várias condições iniciais, o que impede, por exemplo o cálculo da função de massa nessa aproximação. O mesmo ocorre com a CZA.

Descobrimos uma relação geral envolvendo o tempo de colapso em função das condições iniciais<sup>12</sup>, que é aproximadamente satisfeita pelas as aproximações locais (eqs. 3.39 e 3.43):

$$a_c(\delta_0, \varepsilon_0, \alpha_0) \simeq |\delta_0^{-1}| H[(\varepsilon_0/|\delta_0|)g(\alpha_0)]. \quad (3.85)$$

Desse modo,  $\delta_0 a_c$  depende apenas de uma função do produto de  $\varepsilon_0/|\delta_0|$  por uma função de  $\alpha_0$ . Além disso, temos que  $a_c \propto \varepsilon_0^{-1} [g(\alpha_0)]^{-1}$ , quando  $\varepsilon_0/|\delta_0| \gg 1$ . A forma funcional dessas quantidades é semelhante, mas os parâmetros dependem de cada aproximação (veja a seção 3.3.2 e as figs. 3-2 e 3-5). Talvez essa seja uma propriedade universal da fase de pré-virialização, ou pelo menos uma característica genérica das aproximações locais. Também verificamos que o tempo de colapso não é muito sensível à componente intermediária do cisalhamento<sup>13</sup>  $\sigma_2^0$ . Essa poderia igualmente ser uma propriedade geral da fase não-linear do colapso.

Uma das aplicações das aproximações locais é o cálculo da função de massa, que

---

<sup>12</sup>As condições iniciais podem ser parametrizadas por  $\delta_0$ ,  $\varepsilon_0$  e  $\alpha_0$  (eq. 3.36). Veja também as seções 2.2 e 2.3.4.

<sup>13</sup>Escolhemos, por convenção, a ordenação  $\sigma_3^0 \leq \sigma_2^0 \leq \sigma_1^0$ .



determina a fração de objetos cosmológicos em função de sua massa. A partir de uma estimativa do tempo de colapso e da distribuição de probabilidade das condições iniciais, a abordagem de Press-Schechter (PS) fornece uma receita para obter a função de massa. Na seção 3.3.3 calculamos a função de massa para a LTA, a DTA e a ZA. Comparamos o resultado com o cálculo original de PS, que utiliza o modelo do colapso esférico e com dados obtidos a partir de simulações de  $N$ -corpos. As aproximações locais fornecem uma função de massa que reproduz melhor que a ZA, e em certa medida que a expressão de PS, os resultados de simulações de  $N$ -corpos. Por outro lado, vimos que a função de massa não é um teste claro para a dinâmica, pois há outras suposições envolvidas, como por exemplo, o critério para definir a formação de um objeto (tanto nas simulações, como no cálculo a partir da abordagem de PS). Além disso, estamos levando as aproximações lagrangianas ao limite de sua validade, indo até o colapso do elemento de volume. Ainda por cima, como a função de massa é uma média sobre todas as aproximações locais, esse é apenas um teste do comportamento médio e não da dinâmica local. Tanto que a abordagem baseada no colapso esférico fornece bons resultados, enquanto localmente a ele difere completamente da dinâmica real.

Na seção 3.1.2, mostramos que as aproximações locais não fornecem a evolução do tensor de deformação de forma consistente, de modo que não é possível recuperar as posições  $x^i$  a partir das coordenadas lagrangianas  $q^i$ . Mesmo se não reproduzem corretamente as componentes  $w_i$  do tensor de deformação, as aproximações locais podem fornecer bons resultados para o contraste de densidade e os outros parâmetros cinemáticos. Um exemplo explícito foi dado na seção 3.4, onde vimos que o contraste de densidade é exato até segunda ordem, enquanto os  $w_i$  são diferentes nessa mesma ordem.

Apesar de não ser possível determinar o mapeamento  $q^i \rightarrow x^i$ , várias propriedades interessantes podem ser obtidas no próprio espaço lagrangiano, como foi discutido na seção 3.5.1. Um exemplo é dado pela topologia das superfícies de mesma densidade. Se o mapeamento  $q^i \rightarrow x^i$  é contínuo, o que ocorre por hipótese nas aproximações lagrangianas, então a topologia deve ser a mesma nesses dois espaços. Medidas estatísticas da topologia, como os funcionais de Minkowski, podem ser utilizadas para fazer a comparação com

os resultados de simulações de  $N$ -corpos. Esses métodos estatísticos também poderiam servir para fazer a comparação com dados observacionais.

A comparação com as simulações de  $N$ -corpos será uma prova definitiva para as aproximações locais, permitindo testá-las em situações sem nenhuma simetria, até grandes valores de  $\delta$ . Além disso, ela permitirá estabelecer o limite de validade dessas aproximações, tanto em  $z$  quanto em  $\delta$ .

Destacamos a seguir alguns aspectos inovadores deste trabalho. As quatro aproximações locais estudadas - MZA, DTA, CZA e LTA - já haviam sido propostas na literatura e algumas propriedades já tinham sido investigadas. No entanto, cada uma foi introduzida num contexto diferente e nunca houve nenhuma comparação entre elas. Nós apresentamos essas aproximações de uma forma unificada, a partir dos autovalores do tensor de deformação (seção 2.3) e realizamos uma série de testes e aplicações dessas aproximações. A comparação com o modelo do elipsóide homogêneo (seção 3.3.1) não havia sido feita para a MZA. A análise para condições iniciais genéricas (seção 3.3.2) também foi feita pela primeira vez no caso da MZA e CZA. O cálculo da função de massa (seção 3.3.3) só tinha sido feito para a DTA. Além disso, nós introduzimos uma nova forma de calcular a função de massa nas aproximações locais. As abordagens anteriores na literatura não utilizaram a propriedade (3.39). Como vimos na seção 3.3.3, essa propriedade não apenas facilita o cálculo da função de massa, como também o torna mais robusto, já que evitamos fazer uma integração numérica para depois ter que derivar novamente, o que acaba introduzindo erros. Com a (3.43) podemos simplificar ainda mais o cálculo da função de massa, realizando as integrais em  $\nu$  e  $\alpha_0$  separadamente. Isso só é possível graças à parametrização das condições iniciais por  $\delta_0$ ,  $\varepsilon_0$  e  $\alpha_0$ , para as quais a distribuição de probabilidade conjunta é naturalmente separável em três distribuições individuais.

Nós investigamos propriedades gerais da evolução local que não dependem da aproximação em consideração (seção 3.1). Em particular, mostramos que não é possível recuperar as posições dos elementos de volume, pois elas não são integráveis na hipótese de

localidade (seção 3.1.2). Nós estudamos o comportamento assintótico no colapso para a DTA e LTA (seções 2.3.2 e 2.3.4) e também no caso genérico (seção 3.1.1). Também estudamos o comportamento genérico para expansão infinita (seção 2.3.3). Introduzimos uma melhora na CZA para configurações quase esféricas e discutimos a possibilidade de estender essa aproximação para as regiões subdensas (seção 2.3.3).

A aplicação da teoria de perturbação lagrangiana ao elipsóide homogêneo e a comparação com as aproximações locais (seção 3.4) também são inéditas. A proposta dos métodos para a comparação com as simulações computacionais de  $N$ -corpos (seção 3.5.1) é igualmente apresentada pela primeira vez.

E encontramos também alguns erros no artigo [70]. Os autores dizem que a CZA é exata até segunda ordem e que a MZA é errada já nessa ordem. Além disso, eles afirmam que a CZA seria exata sempre que os autovalores  $w_i$  tensor de deformação não dependessem da posição. Na seção 3.4.1 nós aplicamos a teoria de perturbação lagrangiana ao elipsóide homogêneo. Nesse caso  $w_i$  é independente de  $q^i$  e mesmo assim a CZA não fornece os valores exatos dessas quantidades em segunda ordem, embora  $\delta$  seja exato até essa ordem. Já a MZA fornece os valores corretos de  $w_i$  até a terceira ordem, pelo menos.

Os resultados das seções 3.1.2 e 3.3 foram publicados na referência [1]. Os resultados das seções 3.1.1 e 3.4 ainda não foram publicados.

# Capítulo 4

## Formalismo Variacional para a Hidrodinâmica Relativística

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos o formalismo variacional para a dinâmica relativística de fluidos e discutiremos algumas aplicações e extensões.

As equações da hidrodinâmica relativística formam um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas, cuja resolução é extremamente difícil. Só é possível obter soluções analíticas em alguns casos muito particulares; e mesmo assim, apenas nas geometrias mais simples (como simetria esférica ou problemas unidimensionais). Na maioria dos casos é preciso recorrer a soluções numéricas, que com uma equação de estado realista, se tornam proibitivas.

O formalismo variacional é geralmente utilizado para obter as equações de movimento de um determinado sistema, a partir de uma densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$ , escrita em termos de campos fundamentais. A vantagem da formulação lagrangiana, nesse caso, é a possibilidade de obter a forma funcional de  $\mathcal{L}$  a partir desses campos, utilizando argumentos simples, como por exemplo a existência de certas simetrias.

No entanto, a abordagem variacional possui vantagens práticas, além do seu lado formal. Uma vez estabelecida a ação, podemos minimizá-la para determinar parâmet-

ros ótimos de uma dada família de soluções tentativa (*Ansatz*), obtendo assim soluções aproximadas do problema. Apesar dessas soluções não serem corretas localmente, podem fornecer resultados globais acurados. Por isso, essa abordagem é particularmente útil quando estamos interessados nos aspectos globais da dinâmica.

No caso da dinâmica de fluidos é possível obter uma lagrangiana *efetiva*. Ela não é escrita em termos dos campos fundamentais das partículas que compõem o fluido, mas fornece uma descrição em termos das variáveis macroscópicas desse fluido, como densidade e velocidade. Utilizando essa lagrangiana podemos dar uma formulação variacional à mecânica de fluidos. Através da ação efetiva, podemos obter soluções aproximadas para um dado *Ansatz*.

Talvez a aplicação mais interessante da formulação lagrangiana, seja a possibilidade de obter as equações hidrodinâmicas no método de SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*). Esse método tem sido amplamente utilizado em simulações numéricas em astrofísica e cosmologia, e mais recentemente, até em colisões hadrônicas. A obtenção das equações do SPH a partir da ação, no caso relativístico, será brevemente discutida na seção 4.6.

O princípio variacional na hidrodinâmica newtoniana foi apresentado por Herivel [120]. Uma das primeiras aplicações da ação efetiva foi no estudo do Hélio superfluido, no contexto dos modelos de dois fluidos de Landau e London-Tisza [121]. Ele também foi aplicado ao estudo da vorticidade em fenômenos atmosféricos [122] e a misturas de bolhas de gás em líquidos [123], entre outros.

Na relatividade geral, a ação efetiva para um fluido perfeito foi apresentada primeiramente por [124]. Várias aplicações também foram desenvolvidas, principalmente em estudos de estabilidade e para configurações estacionárias (veja as refs. [125] a [131]).

Como as equações da hidrodinâmica relativística nada mais são do que lei de conservação do tensor energia-momentum,  $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ , a descrição hidrodinâmica também pode ser aplicada a sistemas mais genéricos do que fluidos propriamente ditos. Um exemplo é dado em modelos de colisões hadrônicas de altas energias [132, 133]. Em algumas situações um tratamento hidrodinâmico pode ser utilizado em vez da descrição em termos de campos fundamentais [134].

Exploraremos a utilização do princípio variacional para a dinâmica de fluidos como um método prático para resolver problemas. Seja para a obtenção de soluções aproximadas a partir da minimização da ação para um dado *Ansatz*; ou pelo desenvolvimento de um algoritmo de SPH relativístico. Aqui, nos concentramos sobre o desenvolvimento desses métodos e não sobre a sua aplicação propriamente dita.

Há também muitas aplicações mais teóricas do princípio variacional que não serão discutidas aqui. A ação efetiva leva naturalmente ao tratamento de fluidos em teorias alternativas da gravitação (veja as refs. [135] a [137]). Ela também pode ser um ponto de partida para a quantização da gravidade em certos sistemas [138, 139]. Para uma discussão de outros aspectos teóricos, veja a referência [140].

Como a formulação variacional para a hidrodinâmica não é muito conhecida, começamos apresentando ação para um fluido perfeito na relatividade restrita (seção 4.2). Depois discutimos a ação na relatividade geral (seção 4.3). Calculamos a lagrangiana efetiva no caso esférico, em coordenadas co-móveis e obtemos as equações de Misner e Sharp (seções 4.3.1 e 4.3.2). Discutimos a relação entre o referencial co-móvel e as coordenadas inerciais no espaço de Minkowski (seção 4.3.3). Na seção 4.4 discutimos o formalismo variacional com campo fraco, e mostramos como fica a ação do fluido quando a gravidade é incorporada através da solução das equações de Einstein. Para completar a discussão sobre o formalismo variacional, examinamos algumas extensões da lagrangiana efetiva na seção 4.5. A aplicação ao SPH e perspectivas futuras são discutidas na seção 4.6. Na seção 4.7 apresentamos as conclusões e destacamos os principais resultados. Finalmente na seção 4.8 apresentamos um breve comentário sobre soluções homólogas na relatividade geral.

Os resultados das seções 4.3.1 a 4.3.3 foram publicados na referência [2]. Os resultados da seção 4.4 são originais e ainda não foram publicados.

## 4.2 A Ação para um Fluido Relativístico

Nesta seção, apresentaremos a ação efetiva para um fluido relativístico, e mostraremos como as equações hidrodinâmicas são obtidas a partir do princípio variacional. Vamos considerar primeiro o caso da relatividade restrita. Na seção 4.3 discutiremos a ação efetiva na relatividade geral.

Seja  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$  o campo de velocidades do fluido. A quadrivelocidade do escoamento será dada por,  $u^\mu(x)$  com

$$u^0 = \gamma, \quad \vec{u} = \gamma\vec{v} \quad \text{e} \quad u_\mu u^\mu = -1. \quad (4.1)$$

Se o número de partículas é conservado, teremos a equação de continuidade<sup>1</sup>

$$(nu^\mu)_{,\mu} = 0, \quad (4.2)$$

onde  $n$  é a densidade do número de partículas. O princípio variacional pode ser utilizado mesmo se o número de partículas não é conservado, desde que haja outra quantidade conservada (veja discussão na seção 4.6). Supondo o equilíbrio termodinâmico local, teremos (eq. A.56)

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_s = \frac{\rho + P}{n},$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia, e  $P$  é a pressão, e  $s$  é a entropia específica.

Para obter a ação do fluido, vamos partir da ação de uma partícula na relatividade restrita. Nesse caso, temos

$$I_{1p} = - \int dt \sqrt{1 - v^2} m_0$$

onde  $m_0$  é a massa de repouso da partícula. Se essa partícula tem um volume infinitesimal

---

<sup>1</sup>Uma vírgula precedendo um índice denota a derivada parcial em relação a esse índice.

$\Delta\bar{V}$  no seu referencial de repouso podemos escrever

$$m_0 = \rho \Delta\bar{V},$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia da partícula medida no referencial de repouso. No referencial do laboratório, onde a partícula se move com velocidade  $v$  teremos

$$m_0 = \rho \Delta V / \sqrt{1 - v^2}$$

onde  $\Delta V$  é o volume medido no referencial do laboratório. Dessa forma, a ação desse elemento de volume infinitesimal será dada por

$$I_{1p} = - \int dt \sqrt{1 - v^2} m_0 = - \int dt \Delta V \rho.$$

Considerando o fluido como uma soma de volumes infinitesimais, somos levados à seguinte forma para a ação

$$I_M \rightarrow - \int dt \int dV \rho = - \int d^4x \rho.$$

As equações de movimento devem ser obtidas minimizando a ação, para variações arbitrárias dos parâmetros do fluido  $n$  e  $u^\alpha$ . Entretanto, devemos considerar os vínculos da normalização da quadrivelocidade e a equação de continuidade (eq. 4.2). Para incluir esses vínculos na ação, utilizamos multiplicadores de Lagrange. Dessa forma, a ação para um fluido perfeito na relatividade restrita será dada por

$$I_M = \int d^4x \left\{ -\rho(n) + \xi(x) (nu^\mu)_{,\mu} + \frac{1}{2} \zeta(x) (u^\mu u_\mu - 1) \right\}. \quad (4.3)$$

Para obter as equações de movimento, precisamos fazer

$$\delta I_M = 0,$$



para variações arbitrárias de  $u^\mu$ ,  $n$ ,  $\xi$ , e  $\zeta$ . Como veremos na próxima seção, para aplicações práticas do formalismo variacional é conveniente escolher uma parametrização para  $u^\mu$  e  $n$  de modo que os vínculos sejam automaticamente satisfeitos. Assim, os multiplicadores de Lagrange  $\xi$  e  $\zeta$  não aparecerão na ação.

As variações com relação a  $\xi$  e  $\zeta$  levam imediatamente aos vínculos  $u^\mu u_\mu = -1$  e  $(nu^\mu)_{,\mu} = 0$ . Fazendo uma integral por partes no segundo termo da equação (4.3), a ação pode ser escrita como

$$I_M = \int d^4x \left\{ -\rho(n) - nu^\mu \xi(x)_{,\mu} + \frac{1}{2} \zeta(x) (u^\mu u_\mu + 1) \right\}. \quad (4.4)$$

Num sistema de coordenadas genérico, basta substituir a derivada parcial pela derivada covariante nas equações que resultam da expressão (4.4). Além disso, o elemento de volume  $d^4x$  deve ser substituído pelo invariante  $\sqrt{-g}d^4x$ .

A variação com relação a  $n$  leva a

$$-\frac{d\rho}{dn} - u^\mu \xi_{,\mu} = 0, \quad (4.5)$$

e a variação em  $u^\mu$  leva a

$$\xi_{,\mu} = \frac{1}{n} \zeta u_\mu. \quad (4.6)$$

Substituindo esse resultado na equação (4.5), obtemos:

$$\zeta = n \frac{d\rho}{dn}, \quad (4.7)$$

onde utilizamos que  $u^\mu u_\mu = -1$ . Logo a equação (4.6) fica

$$\xi_{,\mu} = \frac{d\rho}{dn} u_\mu. \quad (4.8)$$

Contraindo os dois lados com a quadrivelocidade temos

$$u^\mu \xi_{,\mu} = -\frac{d\rho}{dn}.$$

de modo que

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\frac{d\rho}{dn}, \quad (4.9)$$

onde  $d/d\tau =_{,\mu} u^\mu$  é a derivada total com relação ao tempo próprio.

Se não há viscosidade nem fluxo de calor, a evolução é adiabática, de modo que a mudança na energia causada por uma variação de  $n$  é dada por

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{\rho + P}{n}, \quad (4.10)$$

Dessa forma, teremos

$$d\left(\frac{d\rho}{dn}\right) = \frac{1}{n}dP. \quad (4.11)$$

Assim, a equação (4.9) fica

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)_{,\mu} = -\left(\frac{d\rho}{dn}\right)_{,\mu} = -\frac{1}{n}P_{,\mu}. \quad (4.12)$$

Para processos não adiabáticos, veja a seção 4.5.3.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)_{,\mu} &= (u^\nu \xi_{,\nu})_{,\mu} = u^\nu \xi_{,\mu,\nu} + u^\nu_{,\mu} \xi_{,\nu} \\ &= u^\nu \xi_{,\mu,\nu} - u^\nu_{,\mu} \frac{\rho + P}{n} u_\nu \\ &= \frac{d}{d\tau} \xi_{,\mu} - \frac{\rho + P}{n} \left(\frac{1}{2} u_\nu u^\nu\right)_{,\mu} = \frac{d}{d\tau} \xi_{,\mu}, \end{aligned}$$

de modo que as duas derivadas  $_{,\mu}$  e  $d/d\tau$  comutam quando aplicadas a  $\xi$ . Assim, das

equações (4.8) e (4.9), podemos eliminar  $\xi$  para obter

$$\left[ \frac{\rho + P}{n} u_\mu \right]_{;\nu} u^\nu = -\frac{P_{;\mu}}{n}, \quad (4.13)$$

onde utilizamos a equação (4.11). O lado esquerdo dessa expressão pode ser escrito como

$$\left[ \frac{\rho + P}{n} u_\mu \right]_{;\nu} u^\nu = \frac{1}{n} \left[ (\rho + P)_{;\nu} u^\nu u_\mu + (\rho + P) (u^\nu_{;\nu} u_\mu + u_{\mu;\nu} u^\nu) \right],$$

onde utilizamos a equação de continuidade (4.2). A equação (4.13) pode então ser escrita como

$$\partial_\nu T_\mu^\nu = 0, \quad (4.14)$$

onde

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_\mu u_\nu + P \eta_{\mu\nu}.$$

Dessa forma chegamos à equação de movimento da hidrodinâmica relativística, com o tensor energia-momentum de um fluido perfeito. A partir dessa equação obtemos a equação de Euler relativística [31],

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{(\rho + P) \gamma^2} \left[ \nabla P + \vec{v} \frac{\partial P}{\partial t} \right]. \quad (4.15)$$

Na dedução acima, utilizamos coordenadas de Minkowski, para as quais  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Mas, como foi dito antes, todos os cálculos podem ser estendidos para um sistema de coordenadas genérico. Por exemplo, o resultado final da equação (4.14) em coordenadas genéricas ficaria

$$T^\nu_{\mu;\nu} = 0, \quad (4.16)$$

onde ; é a derivada covariante. Na seção 4.3 vamos considerar a ação para um fluido

relativístico no espaço curvo e incluiremos também a ação da gravitação.

A partir da equação (4.6), podemos ver que a ação (4.3) leva apenas a escoamentos irrotacionais, já que a velocidade é proporcional ao gradiente de uma função escalar (veja a seção 4.5.1). Para incluir movimentos rotacionais é preciso adicionar um outro termo de vínculo na ação original (veja discussão nas seções 4.5.1 e 4.5.4). Entretanto, para situações unidimensionais, como o caso esfericamente simétrico considerado a seguir, o escoamento é irrotacional, e não precisamos nos preocupar com isso.

### 4.2.1 Simetria Esférica

A abordagem variacional discutida acima é particularmente útil quando podemos resolver explicitamente os vínculos, como nos casos das simetrias plana e esférica. Vamos considerar agora o caso esfericamente simétrico. Seja  $\bar{n}$  a densidade do número de partículas no referencial do laboratório

$$\bar{n} := n\gamma. \quad (4.17)$$

A velocidade pode ser determinada a partir da equação de continuidade

$$v = -\frac{1}{r^2\bar{n}} \int_0^r \bar{n}_{,t} r^2 dr. \quad (4.18)$$

Se utilizamos essa expressão para o campo de velocidades, então podemos omitir os termos de vínculo na ação. Dessa forma, temos uma lagrangiana para  $\bar{n}$

$$L = -4\pi \int_0^\infty r^2 dr \rho(n), \quad (4.19)$$

onde a densidade  $n$  no referencial próprio é dada pela equação (4.17). Pode-se mostrar explicitamente [2] que a lagrangiana (4.19), com  $n$  calculado pela expressão acima leva à equação de Euler (4.15).

Para uma aplicação prática, fornecemos um *Ansatz* para a função  $\bar{n}$ , em termos de

alguns parâmetros livres dependentes do tempo  $a_i = a_i(t)$ , que determinam a forma de  $\bar{n}$

$$\bar{n}(t, r) = f(r, a_i(t)), \quad (4.20)$$

Por construção, a função  $f$  é normalizada para quaisquer valores dos parâmetros  $a_i$ . De modo que o número de partículas é conservado

$$4\pi \int_0^\infty r^2 f dr = N.$$

O perfil de velocidades (eq. 4.18) fica então

$$v(r, t) = -\dot{a} \frac{1}{r^2 f} \int_0^r r'^2 \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right) dr' \equiv \Delta \dot{a}, \quad (4.21)$$

onde

$$\Delta = \Delta(r, a) = -\frac{1}{r^2 f} \int_0^r r'^2 \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right) dr'. \quad (4.22)$$

Se temos mais de um parâmetro as equações (4.21) e (4.22) ficam

$$v(r, t) = \sum_{i=1}^n \Delta_i \dot{a}^i, \quad \Delta_i = -\frac{1}{r^2 f} \int_0^r r'^2 \left( \frac{\partial f}{\partial a^i} \right) dr'.$$

Note que o campo de velocidades é sempre linear em  $\dot{a}$ . Vamos considerar a situação mais simples em que temos apenas um parâmetro livre  $a(t)$ . Nesse caso, a lagrangiana fica

$$L(a, \dot{a}) = -4\pi \int_0^\infty r^2 dr \rho(n), \quad (4.23)$$

onde  $n = f(r, a)/\gamma$  e  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (\Delta \dot{a})^2}$ . A equação de movimento para a variável  $a$  é

obtida a partir da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} \right) - \frac{\partial L}{\partial a} = 0,$$

e leva a

$$4\pi \int_0^\infty r^2 dr \left[ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\delta \rho}{\delta n} n \gamma^2 \Delta^2 \dot{a} \right\} + \frac{\delta \rho}{\delta n} \frac{\partial n}{\partial a} \right] = 0,$$

Para processos adiabáticos teremos

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty r^2 dr \{ (\rho + P) \gamma^2 v \Delta \} = - \int_0^\infty r^2 dr (\rho + P) \left( \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial a} - \gamma^2 v \frac{\partial v}{\partial a} \right).$$

Esse resultado foi aplicado a um modelo simples de uma bolha homogênea e esfericamente simétrica imersa num fluido homogêneo [2]. Nesse caso, a função  $f$  é dada por

$$f = \begin{cases} \rho_{0G} = \frac{3}{4\pi} \frac{N_G}{R^3}, & 0 < r < R \\ \rho_{0L} = \frac{3}{4\pi} \frac{N_L}{R_\infty^3 - R^3}, & R < r < \infty \end{cases} \quad (4.24)$$

onde o raio da bolha  $R = R(t)$  é a única variável dinâmica. Os subscritos  $G$  e  $L$  especificam as quantidades no gás e no fluido, respectivamente. Assim  $N_G$  e  $N_L$  dão o número (constante) de partículas no gás e no fluido. Esse modelo corresponde à generalização relativística da equação de Rayleigh-Plesset que descreve a dinâmica de uma bolha de gás homogênea num fluido.

Com a expressão (4.24) para  $f$ , e com uma equação de estado do tipo  $p \propto \rho^\Gamma$ , todas as integrais espaciais que aparecem nas equações de Euler-Lagrange podem ser escritas em termos de funções hipergeométricas. O resultado numérico para a evolução da bolha com diferentes razões iniciais  $p_G/\rho_G$  é mostrado em [2]. Observa-se que efeitos relativísticos aparecem mesmo para baixas velocidades<sup>2</sup>, quando  $p_G/\rho_G \gtrsim 1$ .

---

<sup>2</sup>Veja no apêndice 1 uma generalização da teoria newtoniana, para lidar com sistemas em que  $v \ll c$ , mas  $p \sim \rho$ .

### 4.3 Relatividade Geral

Na relatividade geral as componentes da métrica também são variáveis dinâmicas. A ação será dada por

$$I = I_M + I_G, \quad (4.25)$$

onde

$$I_G = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \mathfrak{R}, \quad (4.26)$$

é a ação gravitacional,  $\kappa = 8\pi G$  e  $\mathfrak{R}$  é o escalar de curvatura. A ação da matéria é obtida da expressão (4.4) utilizando o acoplamento mínimo

$$I_M = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\rho(n) + \xi(x) (n u^\mu)_{,\mu} + \frac{1}{2} \zeta(x) (u^\mu u_\mu - 1) \right\}, \quad (4.27)$$

onde  $\xi$  e  $\zeta/2$  são multiplicadores de Lagrange. Essa expressão para a ação de um fluido perfeito na relatividade geral foi obtida primeiramente por Taub [124]. Devemos variar a ação com relação a  $g_{\mu\nu}$ ,  $n$ ,  $u^\mu$ ,  $\xi$ , e  $\zeta$ , independentemente. O resultado das variações com relação a  $n$ ,  $u^\mu$ ,  $\xi$ , e  $\zeta$  é o mesmo que no caso sem gravitação (eqs. 4.5 a 4.8, e eq. 4.16), bastando substituir as derivadas parciais por derivadas covariantes. Logo essas variações fornecem as equações hidrodinâmicas em uma dada métrica  $g^{\mu\nu}$ .

A derivada funcional com relação a  $g_{\mu\nu}$  é

$$\frac{\delta I_M}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} \{ \rho(n) + n \xi(x)_{,\mu} u^\mu \} + \frac{1}{2} \zeta \sqrt{-g} u^\mu u^\nu,$$

onde já utilizamos o vínculo (4.1). Utilizando a relação<sup>3</sup>

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \quad (4.28)$$

---

<sup>3</sup>Note que o sinal dessa igualdade depende da assinatura da métrica.

e substituindo os valores de  $\partial_\mu \xi$  e  $\zeta$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta I_M}{\delta g_{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \left\{ \rho(n) + n \left( \frac{\rho + P}{n} u_\mu \right) u^\mu \right\} + \frac{1}{2}\sqrt{-g} (\rho + P) u^\mu u^\nu \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} \{ (\rho + P) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} \}. \end{aligned}$$

Comparando esse resultado com a definição do tensor energia-momentum

$$\frac{\delta I_M}{\delta g_{\mu\nu}} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\mu\nu},$$

vemos que

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu},$$

que é exatamente o tensor energia-momentum de um fluido perfeito. Assim, o tensor energia-momentum do fluido é obtido a partir da densidade lagrangiana (4.3), como ocorre no caso das lagrangianas das teorias de campos. Note que o papel dos vínculos é fundamental nessa dedução.

A variação da ação gravitacional  $I_G$  com relação a  $g_{\mu\nu}$  dá o tensor de Einstein  $G^{\mu\nu}$ ,

$$\frac{\delta I_G}{\delta g_{\mu\nu}} \equiv -\frac{1}{2}\sqrt{-g}G^{\mu\nu},$$

de modo que obtemos

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \tag{4.29}$$

que é a equação de Einstein, como era de se esperar. As equações hidrodinâmicas<sup>4</sup>

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0,$$

---

<sup>4</sup>O símbolo “;” representa a derivada covariante.



podem ser obtidas a partir da equação (4.29) graças à identidade de Bianchi,

$$G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (4.30)$$

### 4.3.1 Simetria Esférica

A dedução da equação de movimento apresentada acima é formal e não tem muita utilidade na aplicação direta a problemas práticos. Para utilizar a abordagem variacional, é necessário escrever a ação efetiva em termos de funções tentativa apropriadas. Isso é possível quando o sistema possui alguma simetria, como no caso de uma distribuição esférica de matéria. Muitos objetos astrofísicos satisfazem esse requerimento com uma boa precisão. Vários problemas importantes da astrofísica, como o colapso gravitacional e explosões de estelares, podem ser tratados em primeira aproximação, como sendo esfericamente simétricos. Vamos agora escrever a lagrangiana efetiva para um sistema esfericamente simétrico.

O elemento de linha para um sistema com simetria esférica pode ser escrito como

$$ds^2 = -e^{2\phi}dT^2 + e^{2\lambda}d\xi^2 + r^2d\Omega^2, \quad (4.31)$$

onde  $T$  é a coordenada temporal,  $\xi$  denota a coordenada radial e  $\phi = \phi(\xi, T)$ ,  $\lambda = \lambda(\xi, T)$  e  $r = r(\xi, T)$  são funções dessas duas variáveis a serem determinadas. Na verdade, a métrica na simetria esférica pode sempre ser escrita com apenas duas funções livres [31]. Nesse case, a velocidade deve ser escolhida como uma variável independente. Aqui, ao utilizar a métrica (4.31), podemos aproveitar essa liberdade adicional e escolher um referencial co-móvel  $u^\alpha \propto \delta_0^\alpha$ , correspondendo à quadrivelocidade do fluido [142], de modo que

$$u^\mu = (e^{-\phi}, 0, 0, 0). \quad (4.32)$$

Nesse referencial a equação de continuidade fica

$$(nu^\mu)_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} nu^\mu)_{;\mu} = \frac{1}{r^2 e^\lambda e^\phi} (r^2 e^\lambda n)_{;T} = 0,$$

de modo que a densidade  $n$  é dada por

$$n = \frac{d}{e^\lambda r^2}, \quad (4.33)$$

onde  $d = d(\xi)$  é determinado pelas condições iniciais. A densidade lagrangiana da matéria será dada por

$$\mathcal{L}_M = -\sqrt{-g} \rho(n) = -e^\phi e^\lambda r^2 \rho(n), \quad (4.34)$$

onde  $n$  é dado pela equação (4.33). Note que não aparecem os termos com os multiplicadores de Lagrange, porque os vínculos são automaticamente satisfeitos pelas expressões (4.32) e (4.33).

A parte gravitacional pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2\kappa} e^\lambda e^\phi \left[ r' (2r\phi' + r') e^{-2\lambda} - \dot{r} (2r\dot{\lambda} + \dot{r}) e^{-2\phi} + 1 \right], \quad (4.35)$$

onde  $\dot{f} := \partial f / \partial T$  e  $f' := \partial f / \partial \xi$ . Na expressão acima eliminamos os termos do escalar de Ricci que podem ser escritos como derivadas totais, já que eles não alteram a equação de movimento. A lagrangiana total do sistema será então dada por

$$\mathcal{L}[\phi, \lambda, r] = e^\phi e^\lambda r^2 \left\{ -\rho(n) + \frac{1}{2\kappa r^2} \left[ r' (2r\phi' + r') e^{-2\lambda} - \dot{r} (2r\dot{\lambda} + \dot{r}) e^{-2\phi} + 1 \right] \right\}. \quad (4.36)$$

Quando variamos independentemente as funções  $\phi$ ,  $\lambda$  e  $r$ , essa lagrangiana é equivalente às equações de Einstein. Para verificar, escrevemos as equações de movimento de Euler-

Lagrange para  $\phi$ ,  $\lambda$  e  $r$  a partir dessa lagrangiana. Variando em relação a  $\phi$ , obtemos

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{1}{r^2} + 2e^{-2\lambda} \left( \frac{r'}{r} \lambda' - \frac{r''}{r} - \frac{r'^2}{2r^2} \right) + 2e^{-2\phi} \left( \frac{\dot{r}^2}{2r^2} + \frac{\dot{r}}{r} \dot{\lambda} \right) \right]. \quad (4.37)$$

Fazendo a variação em relação a  $\lambda$  e  $r$  obtemos, respectivamente

$$P = -\frac{1}{\kappa} \left[ \frac{1}{r^2} - 2e^{-2\lambda} \left( \frac{r'}{r} \phi' + \frac{r'^2}{2r^2} \right) + 2e^{-2\phi} \left( \frac{\ddot{r}}{r} + \frac{\dot{r}^2}{2r^2} - \frac{\dot{r}}{r} \dot{\phi} \right) \right], \quad (4.38)$$

e

$$P = -\frac{1}{\kappa} \left[ -e^{-2\lambda} \left( \phi'' + \phi'^2 - \phi' \lambda' + \frac{1}{r} (r'' + \phi' r' - \lambda' r') \right) + e^{2\phi} \left( \ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\phi} \dot{\lambda} + \frac{1}{r} (\ddot{r} + \dot{r} \dot{\lambda} - \dot{\phi} \dot{r}) \right) \right], \quad (4.39)$$

onde utilizamos a relação (4.10). Podemos ver que essas três equações correspondem exatamente à parte diagonal das equações de Einstein para um fluido perfeito:

$$\rho = \frac{1}{\kappa} G^0_0, \quad (4.40)$$

$$P = -\frac{1}{\kappa} G^1_1, \quad (4.41)$$

e

$$P = -\frac{1}{\kappa} G^2_2, \quad (4.42)$$

onde  $G^0_0$ ,  $G^1_1$  e  $G^2_2$  são dados respectivamente pelas quantidades entre colchetes das equações (4.37), (4.38) e (4.39). Elas são exatamente as componentes diagonais do tensor de Einstein calculados com a métrica (4.31).

A única diferença entre o resultado do formalismo variacional e as equações de Einstein, é que no primeiro não aparece a equação correspondendo ao termo não diagonal

$G_1^0$ . Na métrica (4.31) esse termo é diferente de zero. Como o tensor energia-momentum é diagonal no referencial co-móvel, teremos, pelas equações de Einstein

$$G_1^0 = \frac{2e^{-2\lambda}}{r} (\dot{r}' - \dot{r}\phi' - \dot{\lambda}r') = 0. \quad (4.43)$$

Pareceria que essa condição está faltando no resultado do formalismo variacional. Para mostrar que o nosso resultado é idêntico ao da relatividade geral, vamos obter a equação (4.43) a partir das equações (4.40) a (4.42). A equação de Bianchi pode ser escrita como

$$G^\mu{}_{\nu;\mu} = (\sqrt{-g}G^\mu{}_\nu)_{,\mu} + \frac{1}{2}\sqrt{-g} [G_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}{}_{,\nu}] = 0. \quad (4.44)$$

A componente  $\nu = 0$  leva a

$$(\sqrt{-g}G^0{}_0)_{,0} + (\sqrt{-g}G^1{}_0)_{,1} + \frac{1}{2}\sqrt{-g} \left[ \sum_{\alpha=0}^3 g_{\alpha\alpha} G^\alpha{}_\alpha g^{\alpha\alpha}{}_{,0} \right] = 0. \quad (4.45)$$

Utilizando as equações (4.40) a (4.42) obtemos

$$\begin{aligned} & (\sqrt{-g}G^0{}_0)_{,0} + \frac{1}{2}\sqrt{-g} \left[ \sum_{\alpha=0}^3 g_{\alpha\alpha} G^\alpha{}_\alpha g^{\alpha\alpha}{}_{,0} \right] = \\ & = r^2 e^\phi e^\kappa \left\{ G^0{}_{0,T} + 2\frac{\dot{r}}{r} (G^2{}_2 - G^1{}_1) + (G^0{}_0 + G^1{}_1) \left( 2\frac{\dot{r}}{r} + \dot{\lambda} \right) \right\} \\ & = r^2 e^\phi e^\kappa \left[ \dot{\rho} + (\rho + p) \left( 2\frac{\dot{r}}{r} + \dot{\lambda} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde utilizamos a equação de conservação da energia

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dn} (\rho/r^2 e^\lambda)_{,T} = -(\rho + P) \frac{\dot{n}}{n} = -(\rho + P) \left( 2\frac{\dot{r}}{r} + \dot{\lambda} \right).$$

Comparando as equações (4.45) e (4.46), obtemos

$$(\sqrt{-g}G^1{}_0)_{,\xi} = 0, \quad (4.47)$$

de modo que

$$r^2 e^\phi e^\lambda G_0^1 = C(T), \quad (4.48)$$

onde  $C$  é uma função de  $T$  apenas. Para uma métrica não singular, devemos ter  $r(\xi = 0, T) = 0$ , logo pela equação (4.48) teremos  $C(T) \equiv 0$ . Assim obtemos

$$G_1^0 = 0. \quad (4.49)$$

Isso completa a prova de que o resultado obtido a partir da densidade lagrangiana (4.36) descreve corretamente a dinâmica de um fluido perfeito auto-gravitante com simetria esférica.

Note que a relação (4.43) pode ser obtida sem fazer nenhuma referência ao tensor de Einstein  $G^\mu_\nu$  e suas propriedades. Bastaria definir as quantidades  $G_0^0$ ,  $G_1^1$ ,  $G_2^2$  e  $G_1^0$  pelas expressões (4.37), (4.38), (4.39) e (4.43), e verificar que elas satisfazem automaticamente a equação (4.44). De fato, esse foi o caminho utilizado primeiramente para provar a relação (4.43).

Em princípio, poderíamos fornecer três funções tentativa para  $\phi$ ,  $\lambda$  e  $r$  com alguns parâmetros livres, e obter equações para esses parâmetros minimizando a ação obtida a partir da lagrangiana (4.36). Entretanto, falta uma motivação física para a forma genérica dessas funções. Além disso seria desejável diminuir o número de funções livres, procurando relações entre elas. A seguir, vamos reescrever as equações obtidas nesta seção para colocá-las numa forma em que o seu significado físico seja mais aparente.

### 4.3.2 A Equação de Misner-Sharp

Utilizando o resultado (4.43) na componente  $\nu = 1$  da identidade de Bianchi (4.44) obtemos

$$G_{1,\xi}^1 + 2\frac{r'}{r}(G_1^1 - G_2^2) = -(G_0^0 + G_1^1)\phi'. \quad (4.50)$$

Substituindo as equações (4.40) a (4.42) nessa expressão, obtemos

$$P' = -(\rho + P)\phi', \quad (4.51)$$

que é a equação de Euler no referencial co-móvel (veja ap. 1, eq. A.53). Introduziremos uma quantidade  $U$ , definida por

$$U := \dot{r}e^{-\phi} = \frac{dr}{d\tau}, \quad (4.52)$$

onde  $d/d\tau$  é a derivada total com relação ao tempo próprio no referencial co-móvel (eq. A.25). A equação (4.49), junto com a expressão (4.43) implica na seguinte relação

$$\dot{r}' - \dot{r}\phi' - \dot{\lambda}r' = 0, \quad (4.53)$$

que em termos de  $U$  fica

$$e^{-\phi}\dot{\lambda} = \frac{U'}{r'}.$$

A equação (4.37) fica

$$8\pi G\rho r^2 = 1 - rr'(e^{-2\lambda})' - e^{-2\lambda}(r''R + r'^2) + U^2 + 2rUU'r'^{-1}, \quad (4.54)$$

que pode ser integrada em  $r$  para obter

$$e^{-2\lambda} = \frac{1}{r'^2} \left( 1 + U^2 - \frac{2MG}{r} \right), \quad (4.55)$$

onde

$$M(\xi, T) = 4\pi \int_0^\xi \rho r^2 r' d\xi = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr. \quad (4.56)$$

Utilizando a equação (4.55) na (4.41), juntamente com a equação de Euler (4.51), e fazendo algumas manipulações, obtemos

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = \dot{U}e^{-\phi} = - \left( \frac{1}{\rho + P} \right) \left( 1 + U^2 - \frac{2MG}{r} \right) \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_T - G \frac{M + 4\pi r^3 P}{r^2}. \quad (4.57)$$

Essa equação de movimento foi obtida primeiramente por Misner e Sharp [143]. As equações (4.51), (4.52), (4.56) e (4.57) junto com uma equação de estado determinam completamente a dinâmica do colapso ou da expansão com simetria esférica.

No caso de poeira ( $P = 0$ ) é possível obter uma solução exata dessas equações. Da equação (4.51), vemos que  $\phi = \phi(T)$ , de modo que a função  $\phi$  pode ser absorvida por uma redefinição do tempo  $dT' = e^{\phi(T)} dT$ . Pela equação (4.53) temos que  $r' = c(\xi) e^\lambda$ . Dessa forma, a (4.55) fica

$$k(\xi) := \frac{c^2(\xi) - 1}{2} = \frac{(dr/dT')^2}{2} - \frac{MG}{r}. \quad (4.58)$$

Para poeira, a equação de estado é  $\rho = m_0 n = m_0 d(\xi) / e^\lambda r^2$ , de modo que

$$M(\xi, T) = 4\pi \int_0^\xi \rho r^2 r' d\xi = 4\pi \int_0^\xi m_0 d(\xi) c(\xi) d\xi,$$

depende apenas de  $\xi$ . Dadas as condições iniciais, a equação (4.58) pode ser facilmente integrada para obter  $r(\xi, T')$ , para cada  $\xi$ . Note que essa equação é idêntica à equação newtoniana para uma casca esférica, com energia total por unidade de massa dada por  $k(\xi)$ . No caso geral, as equações relativísticas para poeira são muito semelhantes às newtonianas (veja o apêndice A). A solução (4.58) foi obtida primeiramente por Lemaitre [144]. Ela é conhecida como solução de Lemaitre-Tolman-Bondi e representa a solução geral para a dinâmica de poeira com simetria esférica. Se  $k$  não depende de  $\xi$ , obtem-se a solução de Oppenheimer-Snyder [145].

### 4.3.3 Sistema Co-móvel no Limite $G = 0$

Para ver a relação entre a expressão (4.57) e a equação de Euler da relatividade especial (eq. 4.15), faremos  $G = 0$ , de modo que a equação de Misner-Sharp (4.57) fica

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = - \left( \frac{1}{\rho + P} \right) (1 + U^2) \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_T.$$

Sejam  $(t, r)$  as coordenadas temporal e espacial num referencial inercial no espaço de Minkowski, de modo que o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Já em coordenadas co-móveis, os elementos da métrica não são mais constantes. Para obtê-los, vamos introduzir a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} r &= r(T, \xi), \\ t &= t(T, \xi), \end{aligned} \tag{4.59}$$

onde podemos identificar a coordenada  $\xi$  com a coordenada lagrangiana co-móvel. Logo, por definição

$$v = \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{\xi=const.} \tag{4.60}$$

Sempre é possível escolher a variável  $T$  de modo que os termos cruzados na métrica transformada se anulem, de modo que o elemento de linha é escrito na forma (4.31)

$$ds^2 = -e^{2\phi} dT^2 + e^{2\lambda} d\xi^2 + r^2(\xi, t) d\Omega^2.$$

Aqui,

$$d\tau = e^\phi dT|_{d\xi=0},$$



é o tempo próprio medido por um observador co-móvel. Note que os intervalos infinitesimais  $dt$  e  $dr$ , devem estar relacionados ao tempo próprio  $d\tau$  e à distância radial própria  $e^\lambda d\xi$  por uma transformação de Lorentz

$$\begin{pmatrix} dt \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma \\ v\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tau \\ e^\lambda d\xi \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Por outro lado, como

$$d\tau^2 = -ds^2|_{d\xi=0} = [dt^2 - dr^2]|_{d\xi=0} = dt^2|_{d\xi=0} (1 - v^2),$$

vemos que

$$\gamma^{-1} dt|_{d\xi=0} = d\tau = e^\phi dT. \quad (4.62)$$

Dessa forma, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\tau^2} &\equiv e^{-\phi} \frac{\partial}{\partial T} \left( e^{-\phi} \frac{\partial r}{\partial T} \right)_\xi = \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left( \gamma \frac{\partial r}{\partial t} \right)_\xi \\ &= \gamma \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} v + \gamma \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_\xi \right) \\ &= \gamma^2 (1 + \gamma^2 v^2) \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_\xi. \end{aligned}$$

Pela transformação (4.61) temos

$$\begin{aligned} dt|_{dT=0} &= v\gamma e^\lambda d\xi, \\ dr|_{dT=0} &= \gamma e^\lambda d\xi, \end{aligned}$$

de modo que

na equação (4.55), obtemos

$$e^\lambda = \frac{r'}{\gamma}. \quad (4.63)$$

Supondo condições iniciais isentrópicas e processos adiabáticos, podemos integrar a equação (4.51) com relação a  $\xi$  para obter

$$e^{-\phi} = \frac{\rho + P}{mn} \equiv h(n) \quad (4.64)$$

onde  $h$  é a entalpia específica da matéria e  $m$  é a massa de repouso das partículas constituintes. A constante de integração foi escolhida de modo que  $e^\phi \rightarrow 1$ , quando  $n \rightarrow 0$ .

A ação será dada por

$$I = - \int dT \int d\xi e^\phi e^\lambda r^2 \rho(n) = - \int dT \int d\xi \frac{r' r^2}{\gamma} \frac{mn}{\rho + P} \rho(n),$$

onde, pelas equações (4.33) e (4.63)

$$n = \frac{\gamma d(\xi)}{r' r^2}, \quad (4.65)$$

e  $d = d(\xi)$  é determinado pelas condições iniciais.

Se a dependência em  $T$  de  $r$  é especificada na forma

$$r(\xi, t) = f(\xi, a(T)), \quad (4.66)$$

então o fator de Lorentz  $\gamma$  fica

$$\gamma = \sqrt{1 + e^{-2\phi} \dot{r}^2} = \sqrt{1 + h^2(n) \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \dot{a}^2},$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial R}\right)_T &= \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_t + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_r \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_T \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial R}\right)_t + v \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_r.\end{aligned}$$

Temos também

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_\xi = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_r + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_t \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_\xi = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_r + v \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_t.$$

Assim a equação (4.57) fica

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_r + v \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_t = -\frac{1}{\rho + P} \frac{1}{\gamma^2} \left[ \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_t + v \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_r \right]$$

que é exatamente a equação de Euler da relatividade restrita (4.15).

A discussão acima sugere a possibilidade de utilizar coordenadas co-móveis (lagrangianas), mesmo no caso  $G = 0$ . A lagrangiana efetiva apresentada na seção 4.2.1 é baseada num *Ansatz* para a solução da equação de continuidade em coordenadas de Minkowski. Utilizando o sistema de coordenadas co-móvel, talvez seja possível escolher a função tentativa com uma maior motivação física. Evidentemente os dois sistemas de coordenadas deveriam ser equivalentes, se o *Ansatz* tiver uma flexibilidade suficiente para modelar um escoamento arbitrário da matéria. Entretanto, para aplicações práticas, uma escolha apropriada do sistema de coordenadas é essencial para obter melhores resultados.

No limite  $G \rightarrow 0$ , recuperamos o espaço de Minkowski, de modo que a parte gravitacional da densidade lagrangiana (4.36) se anula. Entretanto, no referencial co-móvel, a métrica tem a forma (4.31) e as funções  $e^\phi$  e  $e^\lambda$  ainda devem ser determinadas. Nesse limite as equações (4.51) e (4.55) devem ser utilizadas como vínculos sobre as funções  $r$ ,  $\phi$  e  $\lambda$ . Fazendo  $G = 0$  na equação (4.55), e usando a relação

$$\sqrt{1 + U^2} = \sqrt{1 + (\dot{r}e^{-\phi})^2} = \sqrt{1 + \gamma^2 v^2} = \gamma$$

de modo que a densidade numérica  $n = n(a, \dot{a}; \xi)$  deve ser determinada pela relação

$$f' f^2 n = d(\xi) \sqrt{1 + h^2(n) \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2} \dot{a}^2. \quad (4.67)$$

A lagrangiana efetiva para  $a = a(T)$  é dada por

$$L(a, \dot{a}) = - \int d(\xi) \rho(n) d\xi, \quad (4.68)$$

e a equação de Euler-Lagrange para  $a$  fica

$$\frac{d}{dt} \int d(\xi) (\rho + P) \frac{1}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial \dot{a}} \right) d\xi = \int d(\xi) (\rho + P) \frac{1}{n} \left( \frac{\partial n}{\partial a} \right) d\xi.$$

Em contraste com o caso discutido na seção 4.2.1, aqui precisamos da equação de estado para determinar a densidade da matéria como função da variável dinâmica (eq. 4.66). Note a diferença entre os perfis de densidade  $n(r, t)$  da seção 4.2.1 e  $n(\xi, T)$  definido pela equação (4.67). O primeiro é definido para um dado  $t$  no sistema de coordenadas fixo em relação ao fluido, e o último é definido com  $T$  fixo no referencial co-móvel.

Embora o sistema co-móvel pareça ser fisicamente mais vantajoso do que as coordenadas de Minkowski para a escolha do *Ansatz*, ele pode gerar uma dificuldade para resolver a equação (4.67) com uma equação de estado qualquer. Para um fluido ideal com equação de estado

$$P \propto n^\Gamma,$$

com  $\Gamma = 5/3$  ou  $4/3$ , uma solução analítica da equação (4.67) para  $n$  pode ser obtida explicitamente.

## 4.4 Campo Fraco

Na seção 4.3.1 obtivemos a ação para um fluido perfeito com simetria esférica em coordenadas co-móveis. Nesse caso, a ação pode ser escrita em termos dos três elementos da métrica. Fazendo as variações com relação a essas três funções, obtivemos as equações de Misner e Sharp.

Se desejamos utilizar o princípio variacional para obter uma solução aproximada do problema, deveríamos fornecer três funções tentativa independentes:  $\phi = \phi(\xi, T)$ ,  $\lambda = \lambda(\xi, T)$  e  $r = r(\xi, T)$ . Por um lado é difícil encontrar uma motivação física para a forma funcional de cada um desses elementos. Por outro lado, relações não triviais devem ser satisfeitas entre eles (eqs. 4.53 e 4.55), de modo que não é possível escrever explicitamente duas dessas funções em termos da terceira. Além disso, os *Ansätze* para essas três funções deveriam ter um número razoável de parâmetros livres, de modo a dar flexibilidade para que elas satisfaçam as relações (4.53) e (4.55). Isso dificulta muito a aplicação do formalismo variacional nessa situação.

Nesta seção veremos que, no limite de campo gravitacional fraco e com uma escolha apropriada do sistema de coordenadas, é possível escrever as componentes da métrica e as variáveis do fluido em termos de uma única função. Isso simplifica muito a solução e elimina problemas de auto-consistência.

Para qualquer sistema com simetria esférica, é possível escrever o elemento de linha na forma<sup>5</sup>

$$ds^2 = -F(r, t) dt^2 + G(r, t) dr^2 + r^2 d\Omega.$$

Esse sistema de coordenadas é conhecido como sistema de Schwarzschild ou coordenadas de curvatura. Ele é o mais utilizado para o estudo de configurações estáticas, ou para pequenas flutuações em torno do equilíbrio. Já para situações dinâmicas utilizam-se geralmente as coordenadas co-móveis discutidas na seção 4.3.1. Entretanto, veremos que

---

<sup>5</sup>Ver a referência [146], box 23.3.

no limite de campo fraco é mais conveniente trabalhar em coordenadas de curvatura<sup>6</sup>.

Devido à possibilidade de escolher arbitrariamente o sistema de coordenadas, é geralmente difícil encontrar o significado físico das coordenadas na relatividade geral (se é que elas sempre têm um). No entanto, às vezes elas têm uma interpretação simples, como é o caso das coordenadas de Schwarzschild.

Numa superfície bidimensional com  $r$  e  $t$  constantes, a distância entre dois pontos é dada por  $ds^2 = r^2 d\Omega^2$ . Aqui, a coordenada  $r$  tem o mesmo papel que a função  $r(\xi, T)$  no sistema co-móvel, e por isso utilizamos a mesma notação para designá-la. A área dessa esfera bidimensional é

$$A = \int (R d\theta) (R \sin \theta d\phi) = 4\pi r^2.$$

Assim, dado um ponto  $P$ , podemos determinar a coordenada  $r$  medindo a área própria  $A$  da superfície composta por todos os pontos rotacionalmente equivalentes a  $P$ :  $r := (A/4\pi)^{1/2}$ . Como veremos mais à diante, a coordenada  $t$  está relacionada com o tempo medido por um observador em repouso nas coordenadas  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ , de forma que uma configuração que não depende de  $t$  é uma configuração estática.

Já no sistema co-móvel,  $\xi$  é associado a uma coordenada lagrangiana, de modo que a componente espacial da quadrivelocidade se anula nesse referencial. O tempo  $T$  está relacionado ao tempo próprio medido por um observador co-móvel com o fluido, de modo que  $d/d\tau = e^{-\phi} d/dT$ .

Por conveniência, escolheremos  $F = Af^2$ ,  $G = A^{-1}$ , de modo que o elemento de linha será dado por

$$ds^2 = -Af^2 dt^2 + A^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega, \quad (4.69)$$

onde  $A = A(r, t)$  e  $f = f(r, t)$ . Agora não temos mais a liberdade de escolher um referencial co-móvel, pois a métrica já tem o menor número possível de funções independentes.

---

<sup>6</sup>Um exemplo da utilização de coordenadas de curvatura em problemas dinâmicos com simetria esférica é encontrado na ref. [147].

Como o sistema tem simetria esférica, a quadrivelocidade só pode ter as componentes 0 e 1:

$$u^\alpha = (u^0, u^1, 0, 0).$$

A condição de normalização leva a:

$$u^1 = \sqrt{(u^0)^2 f^2 A^2 - A} \quad (4.70)$$

Aqui estaremos interessado no caso de um fluido perfeito, de forma que o tensor energia-momentum será dado por

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}.$$

Para obter as funções  $A$  e  $f$  em termos de  $u^0$ ,  $p$  e  $\rho$  precisaremos apenas das componentes 11 e 00 das equações de Einstein. Estas são:

$$G^{00} = -\frac{A_{,r} r + A - 1}{A f^2 r^2} = 8\pi G \left[ (\rho + p) (u^0)^2 - \frac{p}{A f^2} \right] = T^{00}, \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} G^{11} &= \frac{A}{f r^2} [f (A_{,r} + A - 1) + 2r A f_{,r}] = \\ &= 8\pi G \left\{ (\rho + p) \left[ (u^0)^2 A^2 f^2 - A \right] + p A \right\} = T^{11}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

onde utilizamos a expressão de  $u^1$  em termos de  $u^0$  (eq. 4.70). Da equação (4.71) obtemos

$$A = 1 - \frac{2\mu G}{r}, \quad \text{com } \mu = 4\pi \int_0^r [(\rho + p) (u^0)^2 f^2 A - p] r^2 dr. \quad (4.73)$$

Substituindo a (4.71) na (4.72) teremos

$$f = e^{\Phi G}, \quad \text{com } \Phi = 4\pi \int_0^r (\rho + p) \left( 2 (u^0)^2 f^2 - A^{-1} \right) r dr. \quad (4.74)$$

Vamos chamar de “referencial parado” num dado sistema de coordenadas aquele cuja

4-velocidade é dada por

$$v^\alpha = \delta_0^\alpha / \sqrt{g_{00}}.$$

Na métrica (4.69) esse referencial corresponde exatamente a um observador estático, já que a equação de Euler com  $u^\alpha = v^\alpha$  leva à solução de Oppenheimer-Volkoff [148], para um objeto esférico estático.

O fator de Lorentz  $\gamma$ , entre o referencial  $v^\alpha$  parado no sistema de coordenadas (4.69) e o referencial do fluido  $u^\alpha$  é definido pela relação

$$\gamma := v_\alpha u^\alpha. \quad (4.75)$$

Assim, a componente temporal  $u^0$  será dada por

$$u^0 := \gamma (A f^2)^{-1/2}.$$

Escrevendo as expressões para  $\mu$  (4.73) e  $\Phi$  (4.74) em função de  $\gamma$  obtemos:

$$\mu = 4\pi \int_0^r [(\rho + p) \gamma^2 - p] r^2 dr, \quad (4.76)$$

$$\Phi = 4\pi \int_0^r (\rho + p) (2\gamma^2 - 1) A^{-1} r dr. \quad (4.77)$$

Dessa forma, se conhecemos  $\gamma$  e  $n$  (lembrando que  $\rho = \rho(n)$  e  $p = p(n)$ ) podemos calcular  $\mu$  e  $A$  (eq. 4.73), e com isso obter  $\Phi$  e  $f$  (eq. 4.74). No formalismo variacional, poderíamos fornecer  $\gamma$  e  $n$  como *Ansätze* independentes e calcular a ação. Nesse caso, deveríamos manter o termo de vínculo  $\xi(x) (n u^\mu)_{;\mu}$  sobre a conservação do número de partículas, na ação.

Uma alternativa é resolver explicitamente a equação de continuidade. Como  $\sqrt{-g} =$



$fr^2$ , essa equação é dada por:

$$(nu^\alpha)_{;\alpha} = (\sqrt{-g}nu^\alpha)_{,\alpha} = (nfr^2u^0)_{,t} + (nfr^2u^1)_{,r} = 0,$$

cuja solução é:

$$B := \frac{u^1}{u^0} = -\frac{1}{r^2fnu^0} \int (fnu^0)_{,t} r^2 dr. \quad (4.78)$$

Fornecendo um *Ansatz* para a quantidade

$$\bar{n} := fnu^0 = n\gamma A^{-1/2}, \quad (4.79)$$

podemos calcular  $B$ . Em termos de  $B$  a quadrivelocidade e o fator  $\gamma$  ficam

$$u^\alpha = (Af^2)^{-1/2} (\gamma, \gamma B, 0, 0), \quad (4.80)$$

$$\gamma = \left( 1 - \left( \frac{B}{Af} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad (4.81)$$

onde utilizamos a condição de normalização (eq. 4.70)

Com a solução da equação da continuidade, temos agora apenas três funções que determinam completamente o problema:  $\bar{n}$ ,  $A$  e  $f$ . Aqui nos deparamos com uma dificuldade semelhante ao que ocorria em coordenadas co-móveis: não é possível fornecer um *Ansatz* para uma quantidade, e obter as outras duas, pois elas estão relacionadas de uma forma altamente não-linear. Como  $A$  e  $f$  representam o campo gravitacional, as expressões (4.81), (4.76) e (4.77) mostram que o próprio campo entra no cálculo do campo gravitacional. Essa é provavelmente uma propriedade geral, que vem da não-linearidade das equações de Einstein. Não deve ser possível encontrar um sistema de coordenadas em que apenas uma quantidade permita calcular todos os campos.

No entanto, para campos gravitacionais fracos, não temos esse problema. Note que, pelas equações (4.73) e (4.74), se desejamos obter  $A$  e  $f$  em primeira ordem em  $G$ , podemos calcular  $\mu$  e  $\Phi$  em ordem zero em  $G$ . Desse modo, em todos os elementos que

entram no cálculo de  $\mu$  e  $\Phi$  podemos fazer  $G = 0$ , o que equivale a fazer  $A = f = 1$ . Assim, teremos

$$A = 1 - \frac{2\mu_0 G}{r} + \mathcal{O}_{G^2}, \text{ com } \mu_0 = 4\pi \int [(\rho^0 + p^0) \gamma_0^2 - p_0] r^2 dr \quad (4.82)$$

$$f = 1 + \Phi_0 G + \mathcal{O}_{G^2}, \text{ com } \Phi_0 = 4\pi \int (\rho^0 + p^0) (2\gamma_0^2 - 1) r dr, \quad (4.83)$$

onde<sup>7</sup>

$$\gamma_0 : = (1 - B^2)^{-1/2}, \quad \text{com } B := -\frac{1}{r^2 \bar{n}} \int \bar{n}_{,t} r^2 dr, \quad (4.84)$$

$$\rho^0 : = \rho(n^0) = p(\bar{n}/\gamma_0) \quad \text{e} \quad p^0 = p(\bar{n}/\gamma_0). \quad (4.85)$$

Agora sim, podemos dar um *Ansatz* para  $\bar{n}$  e minimizar a ação com relação a essa função.

Antes de desenvolver mais o princípio variacional para campo fraco, podemos nos perguntar qual é o sentido de se fazer esse limite. É possível termos campo gravitacional fraco com pressões e velocidades relativísticas? Em geral argumenta-se que quando os campos são fracos devemos ter baixas velocidades e pressões, e que se as velocidades e pressões ficam relativísticas, não podemos considerar o campo linear [146]. Entretanto essa afirmação depende do contexto. Para sistemas em que a gravitação exerce um papel fundamental nos movimentos, como no caso das órbitas no sistema solar, temos

$$\frac{MG}{R} \sim \frac{v^2}{2},$$

de modo que a intensidade da gravitação e o valor da velocidade estão ligados. Por exemplo,  $v \sim c$ , teremos  $R \sim R_{Schwarzschild}$  e o campo é forte. Para um corpo em equilíbrio, como uma estrela por exemplo, temos

$$\nabla p \sim -\rho \nabla \phi$$

---

<sup>7</sup>Aqui colocamos um superescrito na densidade  $\rho^0$  calculada com  $G = 0$ . Não confundir com a densidade de massa de repouso  $\rho_0$ .

de forma que a pressão e a intensidade do campo também estão relacionados. No entanto se a gravitação não é dominante na dinâmica, podemos ter grandes velocidades e pressões com campos gravitacionais fracos<sup>8</sup>. Isso ocorre em fenômenos altamente energéticos como jatos relativísticos e explosões de supernovas. Nesse caso, a velocidade é determinada fundamentalmente pela inércia e pelo gradiente de pressão, e temos  $v \gg MG/r$ . É claro que a gravidade desempenha um papel importante, mas enquanto não houver colapso, o campo pode ser considerado fraco. Assim, fenômenos explosivos são a arena ideal de aplicação desse limite, pois à medida que o escoamento se desenvolve, a intensidade do campo diminui. Entretanto outros fenômenos altamente energéticos talvez possam ser tratados neste limite, como por exemplo colisões de estrelas de nêutrons.

#### 4.4.1 A Nova Ação

Como vimos acima, no limite de campo fraco é possível escrever as componentes da métrica e as quantidades do fluido em termos de uma única função  $\bar{n}$ . Para isso, resolvemos as equações de Einstein para  $G^{00}$  e  $G^{11}$  e a equação da continuidade. Agora bastaria minimizar a ação (eqs. 4.25, 4.26 e 4.27)

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{\mathfrak{R}}{2\kappa} - \rho(n) \right), \quad (4.86)$$

onde não colocamos os termos de vínculo porque eles são automaticamente satisfeitos pela nossa escolha de variáveis (eqs. 4.70 e 4.78). Nessa expressão, tanto  $n$  como as componentes da métrica, seriam escritas em termos de  $\bar{n}$ :  $n = n[\bar{n}]$ ,  $A = A[\bar{n}]$  e  $f = f[\bar{n}]$ , e faríamos as variações com relação a  $\bar{n}$  ou aos parâmetros de um *Ansatz* para essa função.

No entanto, a ação não será mais dada pela expressão (4.86), pois já estamos utilizando algumas soluções que vem da variação dessa ação. Agora as componentes da métrica não são mais independentes e devemos determinar a nova forma da lagrangiana para esse caso.

---

<sup>8</sup>Em alguns casos, podemos inclusive ter velocidades não relativísticas, mesmo com altas pressões (veja por exemplo o apêndice 1, seções A.3 e A.4).

Podemos dar um exemplo simples de um problema semelhante que ocorre na mecânica newtoniana. Considere a lagrangiana de uma partícula num potencial central

$$\mathcal{L} = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}{2} + V(r).$$

Fazendo a variação em relação a  $\theta$  obtemos

$$mr^2\dot{\theta} = \text{const.} = l. \quad (4.87)$$

Se substituirmos esse resultado na lagrangiana  $\mathcal{L}$  para eliminar  $\dot{\theta}$ , obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r).$$

Variando em relação a  $r$  teríamos

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

que é a equação de movimento errada! Uma vez que usamos a equação (4.87) para eliminar um grau de liberdade do problema, não podemos mais utilizar a lagrangiana original. Essa lagrangiana é válida apenas para *variações arbitrárias* de  $\theta$  e  $r$ . É preciso obter uma nova lagrangiana quando utilizamos uma das equações de movimento. Neste caso simples, a lagrangiana correta é

$$\mathcal{L}' = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{l^2}{2mr^2} + V(r).$$

Infelizmente não conhecemos nenhum método geral que permita obter a expressão da lagrangiana quando eliminamos alguns graus de liberdade através das equações de movimento. A procura da expressão para a ação do fluido perfeito na relatividade geral, com os campos  $A$  e  $f$  sendo dados pelas as equações (4.73) e (4.74), levou a um esforço

considerável. Obtivemos uma expressão muito simples para essa ação:

$$I = -4\pi \int dt \int dr [\rho(n) r^2 + \xi_{,\alpha} \sqrt{-g} (n u^\alpha)], \quad (4.88)$$

onde  $\sqrt{-g} = f r^2$ . Aqui mantivemos o vínculo para simplificar alguns cálculos, de modo que as variações de  $u^0$  e  $n$  são independentes. Quando  $u^0$  e  $n$  são dados em termos de  $\bar{n}$ , podemos eliminar o vínculo correspondente à equação de continuidade. A seguir apresentaremos várias motivações para essa expressão, depois discutiremos a sua aplicação a um problema prático, a partir de um *Ansatz* para  $\bar{n}$ . Na seção (4.6) discutiremos como poderíamos utilizar essa ação para desenvolver um método de SPH relativístico incluindo a gravitação.

### Caso Estático: A Solução de Oppenheimer-Volkoff

No caso estático a componente espacial da velocidade se anula, assim teremos:

$$u^0 = (A f^2)^{-1/2}, \quad u^1 = 0$$

Substituindo essa expressão na (4.73), obtemos:

$$A = 1 - \frac{2GM(r)}{r}, \quad \text{com } M = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr.$$

A lagrangiana da (4.88) fica

$$I = -4\pi \int [\rho(n) + \xi_{,t} n A^{-1/2}] r^2 dr.$$

Se não tivéssemos utilizado diretamente a normalização da quadri-velocidade, poderíamos mostrar facilmente que  $\xi_{,\mu} \propto u_\mu$  (como na eq. 4.6). Assim, como  $u_1 = 0$ ,  $\xi$  é apenas uma

função do tempo. Dessa forma, como  $n$  não depende de  $t$ , teremos

$$-L/4\pi = \int_0^\infty \rho r^2 dr + \lambda \int_0^\infty r^2 n \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1/2} dr, \quad (4.89)$$

onde  $\lambda := \xi_{,t}$ . Como essa lagrangiana não depende do tempo  $t$ , e seu extremo equivale ao extremo da ação. Minimizando a (4.89) com relação a  $n$  obtemos a equação de Oppenheimer-Volkoff<sup>9</sup> [148]:

$$p_{,r} = -\frac{\rho + p}{1 - 2MG/r} \frac{1}{r^2} (M + 4\pi r^3 p) G.$$

Verificamos, portanto, que a ação (4.88) leva à solução correta para uma distribuição estática, para qualquer valor do campo gravitacional.

### Limite newtoniano

Consideraremos agora o limite newtoniano da ação (4.88). Nesta subseção colocaremos explicitamente a constante  $c$ , para que o limite newtoniano fique mais claro. A lagrangiana associada à ação (4.88) é dada por

$$L = -4\pi \int_0^\infty \rho(n) r^2 dr,$$

onde já utilizamos a solução da equação de continuidade (eq. 4.78), de modo que  $n = \bar{n}A^{1/2}/\gamma$ . No limite de baixas velocidades teremos  $v/c := B \ll 1$ . Portanto, vamos reter apenas termos de primeira ordem em  $B$  e  $G$ . Nesse caso, o fator de Lorentz fica  $\gamma \simeq \gamma_0 \simeq 1 - 1/2(v/c)^2$  (cf. eqs. 4.81 e 4.84), e o parâmetro  $\mu_0$  será dado por

$$\mu_0(r) = 4\pi \int_0^r [(\rho^0 + p^0) \gamma_0^2 - p_0] r^2 dr \simeq 4\pi \int_0^r \rho(\bar{n}/\gamma_0) r^2 dr.$$

---

<sup>9</sup>Veja por exemplo Weinberg [31], seção 11.2, teorema 2 (p. 306).

É importante lembrar que a densidade de energia contém tanto densidade de massa de repouso quanto a energia interna, de modo que

$$\rho(n) = m_0 n c^2 + \varepsilon(n).$$

Assim, teremos

$$\mu_0(r) \simeq 4\pi \int_0^r \rho(\bar{n}/\gamma_0) r^2 dr \simeq 4\pi \int_0^r m_0 \bar{n} c^2 \gamma_0^{-1} r^2 dr \simeq 4\pi \int_0^r m_0 \bar{n} c^2 r^2 dr =: M(r) c^2.$$

Dessa forma  $n$  será dado por<sup>10</sup>

$$n = \frac{\bar{n} A^{1/2}}{\gamma} = \bar{n} A^{1/2} \simeq \bar{n} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{MG}{c^2 r} \right). \quad (4.90)$$

Assim, em primeira ordem em  $G$  e  $(v/c)^2$ , a densidade de energia  $\rho(n)$  será dada por

$$\rho(n) = m_0 n c^2 + \varepsilon(n) \simeq m_0 \bar{n} \left( c^2 - \frac{v^2}{2} - \frac{MG}{r} \right) + \varepsilon(\bar{n}). \quad (4.91)$$

Finalmente, a lagrangiana, no limite newtoniano, será dada por

$$L = -4\pi \int_0^\infty \rho(n) r^2 dr = T - U - E_0, \quad (4.92)$$

onde  $T$  é a energia cinética,  $U$  é energia potencial total (energia interna mais energia potencial gravitacional) e  $E_0$  é a energia de repouso:

$$T : = 4\pi \int_0^\infty \frac{\rho_0 v^2}{2} r^2 dr \quad (4.93)$$

$$U : = 4\pi \int_0^\infty \varepsilon(\rho_0) r^2 dr - 4\pi \int_0^\infty \frac{\rho_0 M(r) G}{r} r^2 dr \quad (4.94)$$

$$E_0 : = \mathcal{M}_0 c^2, \quad \mathcal{M}_0 = 4\pi \int_0^\infty \rho_0 r^2 dr = M(r = \infty), \quad (4.95)$$

---

<sup>10</sup>Colocando os fatores com  $c$ , teremos  $A = 1 - 2\mu_0 G/(rc^4)$ .

onde

$$\rho_0 = m_0 \bar{n} \quad (4.96)$$

é a densidade de massa de repouso. Dessa forma, mostramos que a ação (4.88) leva à lagrangiana correta para a hidrodinâmica newtoniana (veja, por exemplo, a referência [121]).

Podemos reescrever o segundo termo de  $U$  para que fique mais aparente de que se trata da energia potencial gravitacional. Se temos uma distribuição finita de raio  $R$ , a densidade se anula para  $r > R$  e as integrais vão até  $R$ , assim esse termo pode ser escrito como

$$\begin{aligned} -G \int_0^R 4\pi r M(r) \rho_0(r) dr &= -\frac{G}{2} \int_0^R \frac{1}{r} d(M^2(r)) dr = \\ &= -\frac{GM^2}{2R} - \frac{G}{2} \int_0^R \frac{1}{r^2} M^2(r) dr = \frac{\phi(R) M(R)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^R M(r) d\phi(r) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^R \phi(r) dM(r) \end{aligned}$$

onde  $\phi$  é o potencial newtoniano no interior da matéria

$$\phi(r) = -\frac{GM}{R} - G \int_r^R \frac{M(r')}{r'^2} dr'.$$

#### 4.4.2 A Hamiltoniana

Como vimos nas seções anteriores, tanto no caso estático, como no limite newtoniano, a ação (4.88) fornece o resultado correto para a dinâmica, se o campo gravitacional é calculado pelas equações (4.73) e (4.74). Talvez a melhor motivação para essa forma da ação, seja a possibilidade de obtê-la a partir da Hamiltoniana do sistema.

Para situações em que a parte espacial da métrica tende assintoticamente para a solução de Schwarzschild a grandes distâncias, a energia total do sistema está bem definida



[149]:

$$\mathcal{M} := \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ r \left[ 1 - \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \right] \right\}. \quad (4.97)$$

Essa definição é válida para qualquer coordenada radial  $r$ , desde que métrica tenda para alguma forma da solução de Schwarzschild para  $r \rightarrow \infty$ .

Com a nossa escolha de coordenadas, teremos  $g_{22} = r^2$  e  $g_{11} = A^{-1} = (1 - 2\mu G/r)^{-1}$ , com  $\mu$  definido por (eqs. 4.69 e 4.73):

$$\mu = 4\pi \int_0^r [(\rho + p) \gamma^2 - p] r^2 dr$$

Substituindo estas expressões na equação (4.97), a massa será dada por:

$$\mathcal{M} = \mu_\infty = 4\pi \int_0^\infty [(\rho + p) \gamma^2 - p] r^2 dr. \quad (4.98)$$

Pela definição (4.97) a massa deve ser constante no tempo. Assim, escolheremos  $\mathcal{M}$  como a hamiltoniana do sistema. Veremos a seguir alguns limites em que  $\mathcal{M}$  é realmente a energia total. Mostraremos que é possível obter a lagrangiana do sistema a partir dessa hamiltoniana.

Associada à hamiltoniana (4.98), temos uma densidade hamiltoniana

$$\mathcal{H} = [(\rho + p) \gamma^2 - p].$$

Ela é justamente a densidade de energia  $\rho'$  medida por um observador com velocidade  $v^\alpha$ . Por definição, temos (a seção A.2.1 eq. A.36)

$$\rho' = T^{\mu\nu} v_\nu v_\mu = [(\rho + P) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}] v_\nu v_\mu = (\rho + p) \gamma^2 - p$$

onde a última igualdade segue da definição de  $\gamma$  (eq. 4.75).

## Caso estático

No caso estático, para obter a solução do problema basta minimizarmos a energia total (4.98). Ao fazer as variações, devemos manter constante o número de bárions  $N$ . Ou seja, a quantidade

$$F := \mathcal{M} + \lambda N \quad (4.99)$$

deve ser estacionária para variações de  $n$ . O número de bárions é dado por

$$N := \int n u^0 \sqrt{-g} d^3x = 4\pi \int_0^\infty r^2 n \left(1 - \frac{2GM(r)}{r}\right)^{-1/2}, \quad (4.100)$$

onde utilizamos que  $u^0 = (Af^2)^{-1/2}$ , e  $\sqrt{-g} = fr^2$ . Pela própria definição do fator de Lorentz (eq. 4.75), teremos  $\gamma = 1$ . Dessa forma,  $\mathcal{M}$  será dado por

$$\mathcal{M} = 4\pi \int_0^\infty \rho r^2 dr.$$

Comparando com os resultados da seção 4.4.1 (eq. 4.89), vemos que minimizar a (4.99) é exatamente igual a minimizar a ação (4.88). Como era de se esperar, no caso estático minimizar a ação é equivalente a minimizar a energia total.

## Limite Newtoniano

Para pressões não relativísticas e baixas velocidades, teremos

$$(\rho + p) \gamma^2 - p \simeq \rho \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).$$

No limite de  $G$  pequeno e baixas velocidades a densidade de energia  $\rho(n)$  é dada pela equação (4.91). Dessa forma, a massa  $\mathcal{M}$  (4.98) fica<sup>11</sup>

$$\mathcal{M} \simeq 4\pi \int_0^\infty \left[ m_0 \bar{n} \left( c^2 + \frac{v^2}{2} - \frac{MG}{r} \right) + \varepsilon(\bar{n}) \right] r^2 dr = E_0 + T + U, \quad (4.101)$$

que corresponde exatamente à energia total newtoniana incluindo a energia de repouso. Novamente vemos que os resultados deduzidos a partir da ação (4.88) estão em acordo com a hamiltoniana (4.98).

### Transformação da hamiltoniana para a lagrangiana

Para utilizar o formalismo variacional, é preciso saber a lagrangiana do sistema. No entanto, como foi discutido na seção 4.4.1, quando eliminamos alguns graus de liberdade através das equações de movimento, precisamos determinar uma nova expressão para a lagrangiana. Depois de diversas tentativas nós obtivemos a expressão (4.88) para a nova ação, sem no entanto ter uma boa motivação física para ela. Já no caso da hamiltoniana, há um boa motivação física: podemos defini-la como sendo a massa total relativística do sistema (pelo menos no caso esférico).

Tendo a hamiltoniana, podemos calcular a lagrangiana, bastando saber quais são as variáveis canonicamente conjugadas. No caso newtoniano podemos fazer  $\dot{\pi} = \rho_0 v$  e  $\dot{q} = v$ , de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dot{q}\pi - \mathcal{H} = \rho_0 v^2 - \left[ \rho_0 \left( c^2 + \frac{v^2}{2} - \frac{MG}{r} \right) + \varepsilon(\bar{n}) \right] \\ &= - \left[ \rho_0 \left( c^2 - \frac{v^2}{2} - \frac{MG}{r} \right) + \varepsilon(\bar{n}) \right]. \end{aligned}$$

Assim, a partir da densidade hamiltoniana (4.101) obtemos a densidade lagrangiana (4.92).

---

<sup>11</sup>As quantidades  $E_0$ ,  $T$  e  $U$  são definidas pelas equações (4.93) a (4.95).

Na relatividade restrita a (4.88) fica

$$\mathcal{L} = -\rho(n) r^2 - \xi_{,\alpha} (n u^\alpha) r^2, \quad \text{com } u^\alpha = (\gamma, \gamma v, 0, 0) \text{ e } \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

Se  $\dot{q}_1 := v$  teremos

$$\pi_1 := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_1} = 0.$$

Na densidade lagrangiana  $\mathcal{L}$  aparece também a quantidade  $\xi$ . Fazendo  $\dot{q}_2 = \dot{\xi}$  obtemos

$$\pi_2 := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_2} = -n\gamma.$$

Dessa forma, a densidade hamiltoniana fica

$$\mathcal{H} = \dot{q}_1 \pi_1 + \dot{q}_2 \pi_2 - \mathcal{L} = -n\gamma \xi_{,t} + \rho(n) + \xi_{,\alpha} (n u^\alpha) = \rho(n) + \xi_{,r} n u^r.$$

Da expressão (4.8) temos  $\xi_{,\mu} = u_\mu d\rho/dn$ , de modo que  $\xi_{,r} = \gamma v (\rho + p)/n$ . Dessa forma, a densidade hamiltoniana será dada por

$$\mathcal{H} = \rho + (\rho + p) \gamma^2 v^2 = (\rho + p) \gamma^2 - p.$$

Novamente, a partir da lagrangiana (4.88) obtemos a hamiltoniana (4.98).

Agora vamos ver como fica a hamiltoniana associada à lagrangiana (4.88) no caso geral. Primeiramente, vamos escrever a densidade lagrangiana (4.88) sem impor a normalização da velocidade a priori

$$\mathcal{L} = -\rho(n) - \xi_{,\alpha} (n u^\alpha) f + \frac{1}{2} \zeta (u^\alpha u_\alpha + 1). \quad (4.102)$$

Fazendo a variação em relação a  $n$  com obtemos

$$-\frac{\partial \rho}{\partial n} - \xi_{,\alpha} u^\alpha f = 0.$$

Variando em relação a  $u^\alpha$  temos

$$\xi_{,\alpha} n f = \zeta u_\alpha f.$$

Combinando essas duas equações teremos

$$\xi_{,\alpha} = \left( \frac{\rho + p}{n} \right) u_\alpha f^{-1}. \quad (4.103)$$

Como na ação (4.88) só aparecem derivadas no campo  $\xi$ , somente podemos definir o momento conjugado a esse campo, de modo que

$$\pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \xi_{,t}} = -n u^0 f.$$

A densidade hamiltoniana será da por

$$\mathcal{H} = -n u^0 f \xi_{,t} + \rho(n) + \xi_{,\alpha} n u^\alpha f = \rho(n) + \xi_{,r} n u^r f.$$

Pela (4.103) temos  $\xi_{,r} n u^r f = (\rho + p) u_r u^r$ . Utilizando as expressões (4.80), (4.69) e (4.81) obtemos  $u_r u^r = \gamma^2 B^2 / (A f)^2 = \gamma^2 - 1$ . Assim, obtemos finalmente

$$\mathcal{H} = \rho + (\rho + p) (\gamma^2 - 1) = (\rho + p) \gamma^2 - p.$$

Temos agora uma boa justificativa física para a ação (4.88). A lagrangiana associada a essa ação leva à hamiltoniana do sistema (4.98). Essa não é ainda uma prova rigorosa da expressão (4.88). Mesmo supondo que a hamiltoniana é realmente dada pela massa total, ainda é preciso mostrar que a coordenada generalizada  $\xi$  e o momento generalizado  $-n u^0 f$  são variáveis canonicamente conjugadas. Entretanto todos os resultados desta seção 4.4, motivam a expressão (4.88) como a ação do sistema. Além disso, pelo menos no caso newtoniano, sabe-se que  $\xi$  é realmente a variável conjugada da densidade [150].

Em princípio, poderíamos mostrar diretamente que a ação (4.88) com as expressões (4.73) e (4.74) levam às equações de movimento corretas. Bastaria fazer variações ar-

bitrárias de  $u^0$  e  $n$ . No entanto essas equações envolvem relações integrais não-lineares, o que dificulta muito a obtenção direta das equações de movimento. Mesmo no limite linear em  $G$  quando temos as equações (4.82) e (4.83), essa dedução ainda é muito complicada. Se desejamos ter apenas  $\bar{n}$  como variável independente, a obtenção direta das equações fica ainda mais difícil. Essas dificuldades não atrapalham a aplicação prática do princípio variacional, já não é preciso deduzir as equações de movimento genéricas, e sim para uma dada função tentativa.

A seguir, discutiremos como calcular a ação (4.88) a partir de um *Ansatz* para  $\bar{n}$ , e mostraremos um exemplo simples de sua aplicação. A utilização da ação (4.88) para obter as equações de movimento do SPH, incluindo a gravitação com campo fraco, será discutida na seção (4.6).

### 4.4.3 Uma Aplicação Simples

Agora podemos utilizar a ação (4.88) para obter uma solução aproximada para a dinâmica de um fluido relativístico, de modo semelhante ao que foi descrito na seção 4.2.1 para o caso sem gravitação. Como vimos no início desta seção 4.4, se consideramos situações em que o campo gravitacional é linear, podemos obter todas as quantidades em termos de um único *Ansatz* para a função  $\bar{n}$ . Em termos de  $\bar{n}$  a velocidade é dada por (eqs. 4.78 e 4.79)

$$B = -\frac{1}{r^2 \bar{n}} \int \bar{n}_{,t} r^2 dr. \quad (4.104)$$

Como essa relação obedece, por construção, à equação de continuidade, a lagrangiana da (4.88) será dada simplesmente por

$$L = -4\pi \int dr \rho(n) r^2, \quad (4.105)$$

onde  $n$  deve ser calculado em primeira ordem em  $G$ . Nessa ordem, o fator  $\gamma$  fica (eqs. 4.81 a 4.85)

$$\gamma \simeq \gamma_0 - \gamma_0^3 B^2 (\Phi_0 - 2\mu_0/r) G, \quad (4.106)$$

onde

$$\gamma_0 := \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}}$$

e

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \int \{[\rho(\bar{n}/\gamma_0) + p(\bar{n}/\gamma_0)] \gamma_0^2 - p(\bar{n}/\gamma_0)\} r^2 dr, \\ \Phi_0 &= 4\pi \int [\rho(\bar{n}/\gamma_0) + p(\bar{n}/\gamma_0)] (2\gamma_0^2 - 1) r dr. \end{aligned}$$

Assim, a densidade  $n$  será dada por (eq. 4.79)

$$n = \frac{\bar{n} A^{1/2}}{\gamma} \simeq \frac{\bar{n}}{\gamma_0} \left[ 1 + \gamma_0^2 B^2 \Phi_0 G - \frac{\mu_0}{r} (2\gamma_0^2 B^2 + 1) G \right]. \quad (4.107)$$

Agora podemos fazer um procedimento análogo ao da seção 4.2.1: fornecer um *Ansatz* para a função  $\bar{n}$ , com algum parâmetro livre  $a(t)$ , calcular a lagrangiana (4.105) e obter uma equação de movimento para  $a$  através da equação de Euler-Lagrange. Com um *Ansatz*  $\bar{n} = f(r, a(t))$ , a velocidade  $B$  fica (eq. 4.104)

$$B(r, t) = \Delta \dot{a}, \quad \text{com} \quad \Delta(r, a) = -\frac{1}{r^2 f} \int_0^r r'^2 \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right) dr'.$$

A função  $f$  deve estar normalizada para qualquer  $a(t)$

$$4\pi \int_0^\infty r^2 f dr = N.$$

Essas expressões são idênticas às da seção 4.2.1 (eqs. 4.21 e 4.22). Aqui entretanto,

a densidade é dada por  $fA^{1/2}/\gamma$ , e não simplesmente por  $f/\gamma$ . Além disso, é preciso calcular  $\mu_0$  e  $\Phi_0$  para obter  $n$ . Vemos que, incluir a gravitação, mesmo com campo fraco, já dificulta bastante o problema.

A título de exemplo, escolhemos uma distribuição uniforme em  $\bar{n}$  com raio  $R(t)$ :

$$f = \begin{cases} \frac{3N}{4\pi R^3(t)}, & 0 < r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (4.108)$$

onde novamente  $R = R(t)$  é a única variável dinâmica. Essa distribuição pode representar uma estrela de raio  $R$  expandindo-se violentamente numa explosão, ou as primeiras fases do colapso, quando o campo ainda pode ser considerado fraco.

A equação de movimento para  $R(t)$  é obtida à partir da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} \right) - \frac{\partial L}{\partial R} = 0.$$

A aplicação numérica desse problema foi realizada por Lázia Cadé [151], como parte de sua dissertação de mestrado.

A escolha da distribuição (4.108) simplifica muito o cálculo numérico e serve como ilustração do método variacional. Para verificar a acurácia do método e comparar com os resultados numéricos obtidos a partir das equações locais da hidrodinâmica relativística, deveríamos utilizar um perfil de densidade mais realista. Do mesmo modo, para uma aplicação prática a um modelo astrofísico também seria necessário considerar um *Ansatz* com maior motivação física. Ainda assim, com esse modelo simples é possível tirar algumas conclusões interessantes sobre o efeito da gravitação na dinâmica. Em particular pode-se investigar quando são importantes os efeitos de altas pressões e densidades, e quando a aproximação de campo fraco deixa de valer (veja a ref. [151]). Como o formalismo variacional permite obter informação global sobre o sistema, é provável que o resultado qualitativo não se modifique muito com a escolha de um perfil de densidade mais realista.



Uma aplicação semelhante poderia utilizada para jatos relativísticos, supondo que eles possam ser tratados como um problema unidimensional. Nesse caso também é possível resolver a equação de continuidade em termos de um *Ansatz* para  $\bar{n}$ . Além disso a massa total está bem definida, de modo que temos a hamiltoniana do problema e podemos obter a lagrangiana.

## 4.5 Extensões

Nas seções precedentes, nos restringimos a sistemas formados por uma única componente, tratada como um fluido perfeito isentrópico num escoamento irrotacional. A seguir, apresentaremos algumas extensões da ação (4.3) de modo a eliminar cada uma dessas restrições.

Esta seção foi incluída para completar a discussão sobre o formalismo variacional. Até agora, apenas os resultados da subseção 4.5.3 foram aplicados na solução de problemas práticos [2, 141].

### 4.5.1 Escoamento Rotacional

A vorticidade do fluido é dada por<sup>12</sup>

$$\omega^\alpha := \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} u_\beta u_{\mu;\nu}. \quad (4.109)$$

Se calculamos essa expressão utilizando a equação (4.6)  $u_\mu = \xi_{,\mu} n / \zeta$ , obtemos

$$\omega^\alpha := \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \xi_{,\beta} \frac{n}{\zeta} \left[ \xi_{,\mu} \left( \frac{n}{\zeta} \right)_{,\nu} + \left( \frac{n}{\zeta} \right) (\xi_{,\mu;\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \xi_{,\gamma}) \right] = 0. \quad (4.110)$$

Portanto, o princípio variacional com a ação (4.3) descreve somente escoamentos irrotacionais. Esse problema ocorre mesmo no caso newtoniano<sup>13</sup> [121]. Uma maneira de

<sup>12</sup>Veja o apêndice 1, eqs. A.32 e A.23.

<sup>13</sup>Essa restrição não atrapalha no modelo de Landau para superfluidos, pois, por construção, a vorticidade macroscópica é nula.

superar essa restrição foi apresentada por Ray [152], seguindo o mesmo método utilizado na dinâmica newtoniana. Atribuímos a cada partícula um rótulo  $X$ , e exigimos que esse rótulo seja conservado ao longo da evolução

$$\frac{dX}{d\tau} := X(x)_{,\mu} u^\mu = 0.$$

Essa equação implica na conservação da identidade das partículas. Adicionando essa condição como mais um vínculo, a densidade lagrangiana (4.3), fica

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ -\rho(n) - nu^\mu \xi(x)_{,\mu} + \frac{1}{2} \zeta(x) (u^\mu u_\mu + 1) + \eta(x) X_{,\mu} u^\mu \right]. \quad (4.111)$$

A variação com relação a  $n$  leva à equação (4.5). Já a variação com relação a  $u^\mu$  fica

$$u_\mu = (n\xi_{,\mu} - \eta X_{,\mu}) / \zeta. \quad (4.112)$$

Contraindo essa expressão com  $u^\mu$ , utilizando o vínculo  $X_{,\mu} u^\mu = 0$ , e a equação (4.5) obtemos novamente a equação (4.7). A variação em  $X$  dá simplesmente

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta X} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_{,\mu}} \right)_{,\mu} = -(\eta u^\mu)_{,\mu} = 0,$$

e não altera as equações do fluido. Nenhuma outra equação é modificada pela presença do novo termo de vínculo. Obtemos assim as mesmas equações de movimento para o fluido, mas agora a quadri-velocidade é dada pela equação (4.112), cujo rotacional não é necessariamente nulo. Assim, tanto escoamentos rotacionais como os irrotacionais estão incluídos nos extremos do princípio variacional. Dessa forma, a densidade lagrangiana (4.111) descreve qualquer escoamento de um fluido perfeito isentrópico. Uma outra forma de evitar a restrição para escoamentos irrotacionais será discutida na seção (4.5.4).

## 4.5.2 Fluido Perfeito Genérico

Um fluido perfeito possui, em geral, dois graus de liberdade termodinâmicos, que podem ser escolhidos como sendo a densidade numérica  $n$  e a entropia específica  $s$ . Num escoamento genérico,  $s$  não tem o mesmo valor em todo o fluido, mas deve ser constante para cada partícula<sup>14</sup>. Isso significa que não há troca de calor entre diferentes partes do fluido, ou seja, o escoamento é adiabático. Dessa forma, devemos ter  $s_{,\mu}u^\mu = 0$ . Podemos escrever essa expressão em termos do fluxo de entropia

$$(nsu^\mu)_{;\mu} = s(nu^\mu)_{;\mu} + ns_{,\mu}u^\mu = 0.$$

Nas seções anteriores nos restringimos a fluidos isentrópicos, para os quais a única quantidade termodinâmica era  $n$ . Se queremos tratar  $s$  como uma *variável dinâmica*, devemos adicionar o vínculo acima na ação. A densidade lagrangiana será dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ -\rho(n, s) - nu^\mu \xi(x)_{,\mu} - nsu^\mu \chi(x)_{,\mu} + \frac{1}{2} \zeta(x) (u^\mu u_\mu + 1) \right], \quad (4.113)$$

onde já utilizamos a integração por partes para simplificar a obtenção das equações de movimento. A variação com relação a  $s$  leva a

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} + \chi_{,\mu} nu^\mu = nT + \chi_{,\mu} nu^\mu = 0, \quad (4.114)$$

onde utilizamos a relação termodinâmica  $\partial \rho / \partial s = nT$  (eq. A.56). A variação com relação a  $n$  fica

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} + \xi_{,\mu} u^\mu + \chi_{,\mu} u^\mu s = \frac{\rho + p}{n} + \xi_{,\mu} u^\mu - Ts = 0, \quad (4.115)$$

---

<sup>14</sup>Veja o apêndice 1, eq. A.57.

onde usamos a (4.114). Variando em relação a  $u^\mu$ , multiplicando o resultado por  $u^\mu$ , utilizando as equações (4.114) e (4.115) e a normalização da quadrivelocidade, obtemos

$$\zeta = n \left( \frac{\rho + p}{n} - Ts \right) + Tns = \rho + p.$$

Variando a ação em relação a  $g_{\mu\nu}$  obtemos o tensor energia-momentum

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = \left[ \frac{1}{2} \frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \mathcal{L} + \frac{\zeta}{2} u^\mu u^\nu \right] \sqrt{-g} =: \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\mu\nu},$$

onde utilizamos a (4.28). Assim, temos

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu} \mathcal{L} / \sqrt{-g} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu},$$

onde utilizamos as relações (4.114) e (4.115). Dessa forma, obtivemos o tensor energia-momentum de um fluido perfeito, incluindo a entropia por partícula  $s$  como variável dinâmica. Se adicionamos o vínculo da conservação da identidade das partículas, teremos a descrição completa da dinâmica de um fluido perfeito. A extensão do formalismo variacional para um escoamento adiabático genérico também foi apresentada primeiramente por Ray [152].

### 4.5.3 Processos não Adiabáticos

Até agora, consideramos processos adiabáticos, para os quais não há geração de entropia. Entretanto, em muitos casos, há uma transferência irreversível do movimento coletivo para a energia térmica interna. Por exemplo, no limite de grandes números de Reynolds, a mudança do volume pode levar a escoamentos altamente turbulentos em pequenas regiões do fluido, e esse movimento complexo acaba por termalizar no elemento de volume. Nesse caso, há geração de calor dentro desse elemento. Se a escala temporal da termalização é desprezível, a geração de entropia pode se manifestar em termos de um tensor de viscosidade. Quando não há fluxo de calor entre os elementos de volume, podemos representar esse processo por um escalar: a viscosidade volumar. Nesse caso o tensor

energia-momentum é dado por:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P + Q) u^\mu u^\nu + (P + Q) g^{\mu\nu},$$

onde  $P$  é a pressão termodinâmica<sup>15</sup> e  $Q$  é a viscosidade volumar. Note que essa expressão é idêntica à do tensor energia-momentum de um fluido perfeito, substituindo a pressão  $P$ , pela pressão dinâmica  $P + Q$ . O fluxo de entropia é dado por<sup>16</sup>

$$(nsu^\alpha)_{;\alpha} = s(nu^\alpha)_{;\alpha} + ns_{,\alpha}u^\alpha = -\frac{Q}{T}u^\alpha_{;\alpha}, \quad (4.116)$$

onde, na última igualdade, utilizamos a conservação do número de partículas.

A única alteração no formalismo variacional é que devemos utilizar a relação<sup>17</sup>

$$\frac{d\rho}{dn} = \frac{\rho + P}{n} + nT \frac{ds}{dn} = \frac{\rho + P + Q}{n}$$

em vez da (4.10), e a relação

$$d\left(\frac{d\rho}{dn}\right) = \frac{1}{n}d(P + Q)$$

no lugar da (4.11).

A função  $Q$  deve ser especificada de acordo com os processos não adiabáticos em consideração, e depende das quantidades termodinâmicas e da taxa de expansão local. A viscosidade volumar também utilizada na hidrodinâmica não-relativística por Neumann-Richtmyer [153] para simular o mecanismo de produção de entropia numa onda de choque. Esse método, conhecido como pseudo-viscosidade é fundamental em simulações numéricas hidrodinâmicas. A generalização das equações da hidrodinâmica relativística com a inclusão da pseudo-viscosidade foi apresentada nas referências [2] e [141].

<sup>15</sup>A pressão termodinâmica é definida através da relação de Gibbs (eq. A.56).

<sup>16</sup>Veja o apêndice 1, equação (A.19).

<sup>17</sup>Na última igualdade utilizamos a eq. (A.19), notando que  $\theta = -(dn/d\tau)/n$ .

#### 4.5.4 A Ação para Vários Fluidos

Até agora, consideramos a ação de um fluido composto por uma única espécie. No entanto há muitos processos que envolvem duas ou mais componentes. Elas podem descrever fluidos distintos ou um modelo de dois fluidos de um único composto, como no caso de um superfluido. Sistemas compostos por vários fluidos têm diversas aplicações em cosmologia e astrofísica. Por exemplo, numa estrela de nêutrons as partículas com carga podem ser tratadas com um único fluido, e a componente superfluida de nêutrons é tratada como um outro fluido independente [154, 155]. Outro exemplo envolvendo estrelas de nêutrons ocorreria numa transição de fase de hádrons para matéria estranha. Também existem modelos cosmológicos de dois fluidos [156, 157]. Particularmente interessantes são os processos envolvendo reações entre fluidos e a geração de entropia [158, 159, 160].

Se não há interação entre as diferentes espécies que compõem o fluido, a ação do sistema é simplesmente a soma das ações dos fluidos individuais. Sejam  $n_i$ , e  $u_i^\mu$  as quantidades do fluido  $i$ , e  $\xi_i$  os vínculos associados à conservação do número de partículas de cada componente. As variações da ação  $I_{\text{tot}} = \sum_i I_i$  em relação a essas quantidades levam a uma equação de Euler para cada espécie.

Poderíamos considerar também situações em que os fluidos interagem, como por exemplo numa reação química. Nesse caso, o número de partículas de cada espécie varia, mas o número atômico total é conservado. O mesmo ocorre em reações nucleares, onde o número bariônico é conservado.

Por simplicidade, vamos considerar o caso de dois fluidos. O argumento pode ser estendido a  $N$  componentes de forma direta. Sejam  $n_1$  e  $n_2$  a densidade numérica para cada componente da quantidade fundamental que é conservada, como por exemplo o número bariônico. Assim, se a espécie é 1 composta por  $A$  bárions temos  $n_1 = A\bar{n}_1$ , onde  $\bar{n}_1$  é a densidade numérica das “partículas” que identificam a espécie 1 (como moléculas, ou núcleos). O número bariônico total é conservado, de modo que

$$N_{\text{tot};\alpha}^\alpha = (n_1 u_1^\mu + n_2 u_2^\mu)_{,\mu} = 0.$$

Podemos encontrar a ação do sistema de modo direto, bastando alterar o termo de vínculo da conservação do número de partículas. Em vez de requerer que cada componente se conserve separadamente, vamos impor a condição acima. Por simplicidade, suporemos que a entropia de cada partícula é conservada, de modo que

$$\dot{s}_1 = s_{1,\mu}u^\mu = 0 \quad \text{e} \quad \dot{s}_2 = s_{2,\mu}u^\mu = 0. \quad (4.117)$$

Dessa forma, a entropia só será gerada pela conversão de uma espécie na outra. Colocando essas condições como vínculos, a ação do sistema será dada por

$$I_M = \int d^4x \sqrt{-g} \{ -\rho_1(n_1) - \rho_2(n_2) + \zeta_1(x) (u_1^\mu u_{1\mu} + 1) / 2 + \zeta_2(x) (u_2^\mu u_{2\mu} + 1) / 2 \\ - (n_1 u_1^\mu + n_2 u_2^\mu) \xi(x)_{,\mu} + \chi_1(x) s_{1,\mu} u^\mu + \chi_2(x) s_{2,\mu} u^\mu \} \quad (4.118)$$

Fazendo as variações com relação a  $n_A$ ,  $u_A^\mu$  e  $s_A$ , onde  $A = 1, 2$  obtemos respectivamente

$$\frac{\rho_A + P_A}{n_A} + u_A^\mu \xi_{,\mu} = 0, \quad (4.119)$$

$$\zeta_A u_{A\mu} - n_A \xi_{,\mu} + \chi_A s_{A,\mu} = 0, \quad (4.120)$$

$$n_A T_A + (\chi_A u^\mu)_{,\mu} = 0. \quad (4.121)$$

Dessas expressões, temos que

$$n_A \xi_{,\mu} u_A^\mu = \zeta_A = (\rho_A + P_A). \quad (4.122)$$

O tensor energia-momentum será dado por

$$T_{\text{tot}}^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \mathcal{L} + \zeta_1 u_1^\mu u_1^\nu + \zeta_2 u_2^\mu u_2^\nu = \\ = (P_1 + P_2) g^{\mu\nu} + (\rho_1 + P_1) u_1^\mu u_1^\nu + (\rho_2 + P_2) u_2^\mu u_2^\nu = \\ = : T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu}. \quad (4.123)$$

Vemos portanto que a ação (4.118) leva a um  $T_{\mu\nu}$  que representa dois fluidos perfeitos.

Apesar disso, podemos ter uma geração de entropia pelas reações, devido à não conservação do número de partículas de cada espécie. Como o número bariônico total é conservado, temos  $(n_1 u_1^\mu)_{;\mu} = -(n_2 u_2^\mu)_{;\mu} := \Gamma$ , de modo que

$$S^\alpha_{;\alpha} = (n_1 s_1 u_1^\mu + n_2 s_2 u_2^\mu)_{;\mu} = s_1 (n_1 u_1^\mu)_{;\mu} + s_2 (n_2 u_2^\mu)_{;\mu} = (s_1 - s_2) \Gamma.$$

Como devemos ter  $S^\alpha_{;\alpha} \geq 0$ , as partículas da espécie que está sendo criada nas reações devem possuir uma entropia maior do que a espécie que está se transformando, como era de se esperar.

A ação (4.118) leva ao tensor energia-momentum (4.123), que é conservado. No entanto, a condição  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$  não é suficiente para determinar a dinâmica do sistema. Precisamos de uma equação para cada componente. As equações (4.119) a (4.121) não são suficientes para determinar completamente o problema. Como há a conversão de elementos de um fluido no outro, o tensor energia-momentum de cada componente não é conservado separadamente. Dessa forma, temos<sup>18</sup>

$$T_1^{\mu\nu}_{;\nu} = t_{\text{int}}^\mu \quad \text{e} \quad T_2^{\mu\nu}_{;\nu} = -t_{\text{int}}^\mu.$$

É fácil mostrar que, quando  $\dot{s}_1 = \dot{s}_2 = 0$ ,  $t_{\text{int}}^\mu$  e  $\Gamma$  estão relacionados por [158]

$$\Gamma = \frac{n_1}{\rho_1 + P_1} u_{1\mu} t_{\text{int}}^\mu = \frac{n_2}{\rho_2 + P_2} u_{2\mu} t_{\text{int}}^\mu.$$

Mesmo assim, a parte  $t_{\text{int}}^\mu h_{\mu\nu}$  ainda fica indeterminada. No entanto, alguns resultados interessantes sobre a geração de entropia podem ser obtidos, mesmo sem informação sobre  $t_{\text{int}}^\mu$  [158].

Como vimos, apesar de levar à expressão correta do tensor energia-momentum do sistema, a ação (4.118) não é suficiente para resolver o problema. Seria possível incluir alguma informação sobre as reações de uma forma efetiva, como foi feito na seção 4.5.3

---

<sup>18</sup>Além disso, o próprio  $T_{\mu\nu}$  deve incluir um termo de viscosidade volumar associado à produção de partículas [161, 162].



para a viscosidade volumar? Talvez seja melhor determinar primeiramente a ação de um fluido perfeito com criação de partículas, colocando a fonte e a viscosidade volumar associada à criação [161] de uma forma efetiva. No futuro, faremos investigações nessa direção.

### Representação de dois fluidos para escoamentos rotacionais

Como vimos na seção 4.5.1, a ação (4.3) só se aplica a escoamentos irrotacionais. Se desejamos incluir a vorticidade, é preciso acrescentar mais um vínculo na densidade lagrangiana. Há uma outra forma de lidar com escoamentos rotacionais, que consiste em representar o fluido por uma superposição de duas componentes. Esse método foi desenvolvido para a ação na hidrodinâmica newtoniana na referência [163]. Ele possui algumas vantagens em relação ao método da seção 4.5.1: ele leva a um formalismo hamiltoniano simples, e pode ter implicações físicas no estudo da superfluidez e na teoria quântica dos fluidos [163].

Aqui, mostraremos apenas que esse método pode ser estendido diretamente à hidrodinâmica relativística. O fluido será descrito pelas quantidades  $n_A$  e  $u_A^\mu$  ( $A = 1, 2$ ) associadas às duas componentes. Como temos efetivamente um único fluido, teremos uma única equação de estado  $\rho(n)$ , onde  $n$  representa a densidade total do número de partículas. No caso newtoniano temos simplesmente  $n = n_1 + n_2$ . No entanto, no caso relativístico, a densidade depende do referencial e portanto devemos determinar  $n$  de outro modo.

O fluxo total de partículas é dado por

$$N^\mu = N_1^\mu + N_2^\mu = n_1 u_1^\mu + n_2 u_2^\mu.$$

Pela definição de Eckart<sup>19</sup>,  $u^\mu$  representa a fluxo de partículas, de modo que

$$n u^\mu := N^\mu = n_1 u_1^\mu + n_2 u_2^\mu. \quad (4.124)$$

---

<sup>19</sup>Veja o apêndice 1, seção A.2.1.

Dessa forma, a equação de continuidade  $(nu^\mu)_{;\mu} = 0$  é automaticamente satisfeita. A densidade  $n$  será dada por

$$n^2 = -N_\mu N^\mu = n_1^2 + n_2^2 - 2n_1 n_2 u_{1\mu} u_2^\mu. \quad (4.125)$$

Note que, no caso newtoniano  $u_1^\mu = (1, v_1^i/c)$  e  $u_2^\mu = (1, v_2^i/c)$ , de modo que  $u_{1\mu} u_2^\mu \simeq 1$  e  $n \simeq n_1 + n_2$ .

Como não há interação entre as duas componentes, elas são conservadas separadamente

$$(n_1 u_1^\mu)_{;\mu} = (n_2 u_2^\mu)_{;\mu} = 0. \quad (4.126)$$

Como estamos representando um único fluido, é razoável supor que  $u_1^\mu = u_2^\mu$ . Nesse caso, teremos  $n = n_1 + n_2$  (eq. 4.125), e pela (4.124)  $u^\mu = u_1^\mu$ . Dessa forma, colocando as condições (4.126) como vínculos, a ação será dada por

$$I_M = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\rho(n) - \xi_1(x)_{;\mu} n_1 u_1^\mu + \xi_2(x)_{;\mu} n_2 u_2^\mu + \frac{\zeta(x)}{2} (u^\mu u_\mu + 1) \right]. \quad (4.127)$$

A variação com relação a  $n_A$  leva a:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial n_A} - \xi_{A,\mu} = 0. \quad (4.128)$$

Variando em relação a  $u^\mu$  obtemos:

$$\zeta u_\mu = \xi_{1,\mu} n_1 + \xi_{2,\mu} n_2. \quad (4.129)$$

Contraindo essa expressão com  $u^\mu$  e utilizando a equação (4.128), obtemos

$$\zeta = (\rho + P). \quad (4.130)$$

Dessa forma, a quadrivelocidade será dada por

$$u_\mu = (\rho + P)^{-1} (\xi_{1,\mu} n_1 + \xi_{2,\mu} n_2). \quad (4.131)$$

Agora podemos resolver o sistema (4.128), (4.129) e (4.130) para as incógnitas  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , com  $u_\mu$  dado pela (4.131). Vemos, da expressão (4.131), que a velocidade é, em geral, rotacional (veja a expressão 4.110). Podemos reproduzir os passos da seção 4.2 e obter a equação de Euler relativística para  $u^\mu$  e  $\rho$ . Alternativamente, podemos calcular o tensor energia-momentum a partir da ação (4.127):

$$T^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \mathcal{L} + \zeta u^\mu u^\nu = P g^{\mu\nu} + (\rho + P) u^\mu u^\nu,$$

que é dado por um fluido perfeito. As equações de conservação  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  levam então à equação de Euler relativística.

Obtivemos assim a ação para um fluido perfeito para um escoamento genérico a partir da representação de dois fluidos. Aqui lidamos apenas com escoamentos isentrópicos, mas podemos incluir  $s$  como variável dinâmica, do mesmo modo que na seção 4.5.2. Também poderíamos incluir uma viscosidade volumar, como na seção 4.5.3. A representação de dois fluidos foi apenas um artifício matemático para obter soluções rotacionais da equação de Euler. No entanto, a discussão apresentada aqui poderia ter implicações numa descrição relativística de superfluidos.

## 4.6 Perspectivas

Neste trabalho, o princípio variacional foi discutido visando aplicações práticas na solução de problemas. Na seção 4.2.1 mostramos como é possível utilizar a formulação variacional para obter as equações de movimento dos parâmetros de um dado *Ansatz* para o perfil de densidade. Na seção 4.4.3 esse mesmo método foi estendido para o caso da relatividade geral com campo fraco. No entanto, esse método se aplica somente a situações simétricas, nas quais é possível resolver explicitamente a equação de continuidade. Além disso ele

da partícula  $A$ .

As equações de conservação da energia e do momentum são satisfeitas *exatamente* pelas equações de movimento do SPH:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{A=1}^N m_0 \nu_A v_A^i \right) = 0, \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \left( \sum_{A=1}^N m_0 \nu_A \left[ \frac{v_A^2}{2} + u(n_A) \right] \right) = 0.$$

Uma implementação do SPH para problemas astrofísicos acrescenta à equação (4.134) as forças gravitacionais e um termo de viscosidade artificial para modelar a produção de entropia em ondas de choque:

$$\frac{dv_A^i}{dt} = a_A^{i(grav)} + a_A^{i(SPH)}, \quad \text{com} \quad a_A^{i(SPH)} = - \sum_B \frac{1}{m_0} \left( \frac{P_A}{n_A^2} + \frac{P_B}{n_B^2} + \Pi_{AB} \right) \nu_B W_{AB,i}. \quad (4.135)$$

O termo  $a_A^{i(grav)}$  representa a aceleração gravitacional do campo produzido pelo próprio fluido, e é determinado por algum algoritmo como os utilizados nas simulações de  $N$ -corpos (veja a seção 3.5.1). Já o termo  $\Pi_{AB}$  representa a viscosidade artificial, como na seção 4.5.3.

Aqui supusemos que o parâmetro  $h$  que determina a dimensão do kernel é constante no tempo e o mesmo para todas as partículas. Na prática é comum utilizar parâmetros individuais e variáveis no tempo. Para situações em que há direções privilegiadas, como num jato por exemplo, utiliza-se um kernel anisotrópico. Já em problemas isotrópicos utiliza-se um kernel que é função apenas de  $|r^i|$ .

Há várias extensões do método de SPH, como por exemplo na magneto-hidrodinâmica [165], e no limite pós-newtoniano da relatividade geral [166]. A seguir mostraremos brevemente como esse método é utilizado na hidrodinâmica relativística.

cada partícula  $A$ , como função de  $\nu_B$  e da posição  $r_B^i$  dos elementos vizinhos. No SPH, a densidade  $n$  é dada pela média local

$$n(r^i) = \sum_B \nu_B W(r^i - r_B^i; h), \quad (4.133)$$

onde  $W(r^i, h)$  é um kernel de dimensão  $\sim h$ . O kernel  $W(r^i, h)$  tem que ser normalizado, de modo que a integral da (4.133) em todo o espaço forneça o número bariônico total. Além disso, ele deve aproximar-se da função delta de Dirac  $\delta(r^i)$ , para  $h \rightarrow 0$ . Fisicamente falando, estamos substituindo o fluido por uma série de “partículas” de massa  $m_0 \nu_B$ , com trajetória  $r_B^i(t)$ . A velocidade do fluido na posição  $r_B^i$ , é dada pela velocidade da partícula de SPH nesse ponto:  $v_B^i = dr_B^i/dt$ . É interessante notar que essas “partículas” têm propriedades macroscópicas, como a energia interna, que obedece às relações termodinâmicas. A densidade na vizinhança da partícula  $A$  será dada por  $n_A = n(r_A^i)$ . Agora podemos obter as equações de movimento a partir da lagrangiana (4.132). Fazendo as variações com relação a  $r_A^i$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_{SPH}}{\delta r_A^i} &= \frac{\partial L_{SPH}}{\partial r_A^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_{SPH}}{\partial (v_A^i)} \right) = \\ &= - \sum_C v_C \frac{P_C}{n_C^2} \frac{\partial n_C}{\partial r_A^i} - v_A m_0 \frac{dv_A^i}{dt} = \\ &= - \sum_{C,B} v_C \frac{P_C}{n_C^2} \nu_B W_{CB,i} (\delta_{BA} + \delta_{CA}) - v_A m_0 \frac{dv_A^i}{dt} = 0, \end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade supusemos que  $W$  é escolhido de forma que  $W_{CB} := W(r_C^i - r_B^i; h) = W_{BC}$ . Assim, a equação de movimento será dada por

$$\frac{dv_A^i}{dt} = - \sum_B \frac{1}{m_0^2} \left( \frac{P_A}{n_A^2} + \frac{P_B}{n_B^2} \right) m_0 \nu_B W_{AB,i}, \quad (4.134)$$

Na prática, escolhemos um kernel que não seja nulo apenas para  $|r_A^i - r_B^i| \lesssim h$ , de modo que um número finito de “partículas” próximas de  $r_A^i$  contribui para o lado direito da (4.134). Esse termo representa a aproximação discreta para a aceleração  $[-(m_0 n)^{-1} p_{,i}]_A$

O método de SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) representa o escoamento em termos das coordenadas lagrangianas (denotadas por “partículas”) associadas a uma quantidade conservada, como o número bariônico. Portanto esse método possui uma grande vantagem em relação a algoritmos que utilizam malhas fixas no espaço. Ele fornece um algoritmo robusto que é particularmente apropriado a situações em que a densidade tem uma grande variação dinâmica. Muitos fenômenos astrofísicos, como a formação de estruturas em grande escala, explosões de supernovas e jatos relativísticos, envolvem variações muito grandes de tamanho e densidade no decorrer da evolução. Também em colisões relativísticas de íons pesados, a matéria se expande numa região espacial grande, a partir de um estado inicial extremamente denso. Portanto o SPH é útil tanto em simulações de processos astrofísicos, quanto para colisões hadrônicas.

A melhor forma de obter as equações de movimento no SPH é utilizar a representação discreta da lagrangiana do fluido [164]. No caso newtoniano temos (eq. 4.92)

$$L_{SPH} = \sum_{A=1}^N \nu_A \left[ \frac{m_0 v_A^2}{2} - u(n_A) \right], \quad (4.132)$$

onde a soma é efetuada para um número grande, porém finito, de elementos de volume. Aqui  $\nu$  é o número de partículas do elemento de volume,  $n$  é a densidade do número de partículas,  $u(n) = \varepsilon(n)/n$  é a energia interna por partícula, e  $m_0$  é a massa das partículas. A quantidade  $n$  pode ser associada à densidade do número bariônico, por exemplo, de modo que  $m_0$  é a massa dos bárions. A partir de agora, chamaremos essas partículas fundamentais apenas de “bárions”, para evitar a confusão com um outro conceito de “partículas”, que representam um elemento de volume, introduzido pelo SPH. Poderíamos escrever o problema em termos da densidade de massa de repouso  $\rho_0 = m_0 n$  (eq. 4.96), como é feito geralmente. Entretanto, vamos manter a notação em termos de  $n$ , pois permitirá generalizar diretamente as expressões que se seguem, para a hidrodinâmica relativística.

Para que a expressão (4.132) seja a lagrangiana do problema, com um número finito de graus de liberdade, precisamos de uma prescrição para calcular  $n_A$  e  $v_A$ , na posição de

fornece apenas uma idéia qualitativa do comportamento do sistema, já que ele só é utilizável quando há poucos parâmetros que definem a forma do *Ansatz*.

No entanto, o aprendizado dos capítulos 4.2.1 e 4.4.3 será muito útil, para a aplicação mais promissora do formalismo variacional, que é a obtenção de um algoritmo de SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*). O método de SPH foi introduzido primeiramente para aplicações em astrofísica e foi utilizado para cálculos de formação de estruturas em grande escala, formação de galáxias, colisões de estrelas de nêutrons, explosões de supernovas, fragmentação de asteróides e muitos outros (veja a ref. [44] e referências nela citadas). Recentemente ele foi aplicado também a colisões hadrônicas de altas energias [141]. O SPH possui várias vantagens sobre os métodos tradicionais da hidrodinâmica, que serão discutidas na próxima subseção.

A abordagem do SPH se encaixa perfeitamente no formalismo variacional. Como veremos a seguir, as equações do SPH são deduzidas naturalmente a partir da ação do sistema. Consequentemente esse método conserva várias propriedades do princípio variacional, como a simplicidade e estabilidade com relação a mudanças na geometria, e também pela possibilidade de suavizar graus de liberdade locais.

A seguir, faremos uma breve revisão do método de SPH, mostrando como as equações de movimento são obtidas a partir da ação na dinâmica newtoniana e como fica o formalismo na relatividade especial. Depois faremos uma discussão sobre a utilização desse método na hidrodinâmica relativística, incluindo a gravitação na aproximação de campo fraco.

### 4.6.1 O método de SPH

Nas simulações hidrodinâmicas usuais, que utilizam malhas fixas no espaço, a simetria do problema é um fator crucial para efetuar cálculos razoáveis. Além disso esses métodos não são bons quando há uma variação muito grande na densidade, tanto no espaço, como no tempo. Nesse caso, ou a malha é muito fina, aumentando o tempo de cálculo, ou perde-se completamente a resolução em certas regiões. Além do mais, muito tempo de cálculo é perdido em regiões quase desprovidas de matéria.

istem duas possibilidades para definir a quadrivelocidade do fluido (veja a seção A.2.1). Na escolha de Eckart  $u^\mu$  é definido com relação ao fluxo do número de partículas  $N^\alpha$ . Já o referencial de Landau é escolhido com relação ao fluxo de energia, e não é necessário nenhuma corrente conservada para definir o escoamento. A quadrivelocidade  $u^\mu$  é a que diagonaliza o tensor energia-momentum. Essa última escolha é mais útil no limite ultra-relativístico, onde a maior parte da energia pode estar sob a forma de um gás não-bariônico.

Utilizar o fluxo de entropia para definir o escoamento é equivalente a escolher o referencial de Landau. Com essa escolha, discretiza-se a densidade de entropia  $\sigma$ , em vez de  $n$

$$\sigma_A \gamma_A = \bar{\sigma}_A = \sum_B \nu_B W(r_A^i - r_B^i(t); h).$$

Podemos incluir a produção de entropia por um termo de viscosidade de uma forma similar ao que foi discutido na seção 4.5.3. No SPH, a geração de entropia correspondendo à equação (4.116) é satisfeita pelo requerimento:

$$\frac{d\nu_A}{dt} = -\nu_A \left( \frac{Q}{T} \right)_A \theta_A.$$

Isso completa o desenvolvimento do SPH para colisões hadrônicas de altas energias [141]. Para aplicar o método de SPH a fenômenos astrofísicos, é fundamental incluir a gravitação. Discutiremos a seguir como isso poderia ser feito.

## 4.6.2 Lagrangiana para Campo Fraco com Geometria Arbitrária

Na relatividade geral, podemos seguir a mesma discretização que no espaço chato em coordenadas genéricas. A equação de continuidade  $(\sqrt{-g}nu^\alpha)_{,\alpha} = 0$ , é satisfeita se parametrizamos a quantidade  $\bar{n} := \sqrt{-g}nu^0$ :



## Relatividade especial

A dedução das equações do SPH a partir da ação (4.3) foi apresentada recentemente por Aguiar, Kodama, Osada e Hama [141]. A discretização é feita para<sup>20</sup>  $\bar{n} = n\gamma$ :

$$\bar{n}(r^i) = \sum_B \nu_B W(r^i - r_B^i(t); h).$$

Com essa expressão, e pelas propriedades do kernel  $W$ , o número bariônico total é automaticamente conservado

$$N = \int n\gamma d^3r = \int \bar{n}d^3r = \sum_A \nu_A.$$

A velocidade é dada por  $v_A^i = dr_A^i/dt$ , de modo que o fator de Lorentz da partícula  $A$  é dado por  $\gamma_A = (1 - v_A^2)^{-1/2}$ . Com essa escolha, se os  $\nu_A$  são constantes,  $n = \bar{n}/\gamma$  obedece automaticamente a equação de continuidade  $(nu^\alpha)_{,\alpha} = 0$ . As equações de movimento são facilmente obtidas a partir da discretização da ação (4.3):

$$L_{SPH}[r_A^i, dr_A^i/dt] = - \sum_{A=1}^N \frac{\nu_A}{\gamma_A} u\left(\frac{\bar{n}_A}{\gamma_A}\right)$$

Não colocamos os vínculos nessa ação, porque a representação de  $n$  na discretização do SPH já satisfaz automaticamente a equação de continuidade. Aqui, como no caso newtoniano, escrevemos a ação em termos da energia (total) por bárion  $u(n) := \rho(n)/n$ , de modo que  $\nu_A u(\bar{n}_A/\gamma)/\gamma$  é a energia do elemento de volume  $A$ . A dedução completa das equações relativísticas de SPH a partir da ação acima é discutida na referência [141].

Em processos altamente energéticos, como colisões de íons pesados ou fenômenos astrofísicos, o número de partículas não é conservado. Para aplicar o método de SPH nesses casos é preciso utilizar outra quantidade, que não  $n$ , para definir a discretização.

Na hidrodinâmica relativística, a própria definição do escoamento não é única. Ex-

---

<sup>20</sup>Na verdade, a dedução do SPH em [141] aplica-se à densidade de qualquer quantidade termodinâmica extensiva, como o número de bárions ou a entropia, por exemplo.

$$\bar{n}(r^i) = \sum_B \nu_B W(r^i - r_B^i(t); h).$$

Note que é preciso escrever todas as quantidades em termos de  $r_A^i$  e  $\nu_A$ , inclusive o campo gravitacional. De nada adianta escrever a ação  $I = I_M + I_G$ , pois nesse caso, as componentes da métrica seriam independentes das quantidades do fluido. Assim, teríamos um sistema acoplado para o campo e para a dinâmica do fluido. Nós gostaríamos de incluir o campo numa única equação para  $r_A^i$ , como foi feito para o caso newtoniano na equação (4.135).

Aqui estamos na mesma situação que na seção 4.4: desejamos escrever a ação do fluido, conhecendo a solução para o campo gravitacional em termos das quantidades desse fluido. A forma da ação foi encontrada nessa seção para o caso esférico. Mostramos que o problema fica bem definido se trabalhamos no limite linear em  $G$  (campo fraco) e calculamos todas as quantidades em função de  $\bar{n}$ . Assim, os resultados da seção 4.4 podem ser aplicados diretamente para obter as equações de movimento no SPH, bastando deduzi-las a partir da ação (4.88). No entanto, esse resultado só se aplicaria a problemas com simetria esférica. Justamente a grande vantagem do SPH sobre os outros métodos é a sua aplicabilidade em qualquer geometria. É fundamental estender os resultados da seção 4.4, em particular a ação (4.88), para configurações arbitrárias.

Resolver as equações de Einstein com campo fraco no caso genérico, é muito simples. A questão é mesmo determinar a forma da ação. Uma generalização direta da ação (4.88), com as aproximações da seção 4.4 é

$$I = - \int \rho(n) d^4x,$$

onde  $n = \bar{n}/(\sqrt{-g}u^0)$ ,  $g$  é dado pela solução de campo fraco e  $u^0$  é calculado através da velocidade  $v$ , que vem da solução da equação de continuidade para  $\bar{n}$ . Seria esta a expressão correta para a ação do sistema. Qual seria a sua motivação física?

No caso esférico, a lagrangiana pode ser obtida a partir da hamiltoniana, que é associada à massa total  $\mathcal{M}$  do sistema. Essa quantidade é bem definida e é invariante em relação à escolha do sistema de coordenadas. No entanto, a expressão (4.97) para a massa total só se aplica a situações em que a solução exterior tende assintoticamente à solução de Schwarzschild.

A hamiltoniana estaria bem definida numa geometria genérica? Provavelmente não, já que pode haver geração de ondas gravitacionais. Dessa forma,  $\mathcal{M}$  não é mais constante e não pode ser associada à hamiltoniana. Por outro lado, estamos interessados em situações em que o campo gravitacional é fraco, de modo que, possivelmente, a perda de matéria por emissão de radiação possa ser desprezível. No futuro próximo realizaremos investigações para abordar essas questões. Procuraremos determinar a ação do sistema para geometrias genéricas, com o campo gravitacional incluído no limite de campo fraco. Com isso, poderíamos deduzir de forma direta as equações relativísticas de SPH com campo gravitacional fraco, o que não foi feito por nenhum outro método. Assim, poderíamos lidar com processos altamente energéticos, envolvendo velocidades e pressões relativísticas, mas campos gravitacionais pouco intensos. Como foi discutido na seção 4.4, esse limite teria inúmeras aplicações em astrofísica, como em explosões de supernovas, modelos de geração de pulsos de raios gama, jatos relativísticos, coalescência de estrelas de nêutrons, etc.

## 4.7 Conclusão

O formalismo variacional para a dinâmica relativística de fluidos foi estudado visando principalmente suas possíveis utilizações em problemas práticos. As duas aplicações básicas são: o desenvolvimento de um algoritmo de SPH relativístico (seção 4.6), e a obtenção de parâmetros ótimos de soluções tentativa em geometrias simples, como a simetria esférica (seções 4.2.1 e 4.4.3).

A partir da ação para um fluido relativístico podemos construir um método de SPH. As equações de movimento deduzidas a partir da ação, garantem que o método forneça

a maior eficiência para um dado número de graus de liberdade, mantendo a conservação da energia e do momento linear.

A grande vantagem do princípio variacional na busca de soluções aproximadas é a possibilidade de integrar a parte espacial da ação para um *Ansatz*, obtendo uma lagrangiana efetiva com funções dependentes do tempo. Assim, o problema se reduz a resolver equações diferenciais ordinárias no tempo, obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange. Esse método pode ser utilizado no espaço chato (seção 4.2.1), ou incluindo a gravitação com campo fraco (seção 4.4.3). Ele foi aplicado em [2] para obter a dinâmica de uma bolha relativística sem gravitação. Ele também foi utilizado na referência [151] para a explosão de uma estrela, incluindo a gravitação com campo fraco, a partir da ação obtida na seção 4.4. Pelo que sabemos, essa foi a primeira aplicação prática do formalismo variacional a uma situação não estacionária em relatividade geral.

Na relatividade restrita essas duas aplicações do formalismo variacional são razoavelmente diretas, pois as únicas variáveis são as quantidades do fluido  $n$  e  $u^\alpha$ . Elas estão relacionadas pela equação de continuidade, que aparece como vínculo na ação. Uma vez resolvida essa equação, seja por um *Ansatz*  $\tilde{n}$ , seja por uma parametrização de SPH, o resto do formalismo segue de forma relativamente fácil.

Já na relatividade geral, além das variáveis  $n$  e  $u^\alpha$ , temos o campo gravitacional gerado pelo próprio fluido. Quando a métrica e as quantidades do fluido são independentes, a ação do sistema é a soma das ações da matéria e da gravitação. Nós determinamos uma lagrangiana efetiva simples para sistemas esfericamente simétricos e deduzimos as equações de movimento para o colapso gravitacional (seções 4.3.1 e 4.3.2). Nesse caso, seria necessário fornecer três *Ansätze* independentes, o que acaba dificultando a aplicação prática do formalismo variacional (seção 4.4).

Seguindo a inspiração da relatividade geral, vimos como fica a ação do fluido sem gravitação ( $G = 0$ ) num referencial co-móvel (4.3.3). Nesse referencial os elementos da métrica são obtidos a partir das quantidades do fluido. Trabalhando no sistema co-móvel poderíamos encontrar um *Ansatz* para  $n$  com maior motivação física do que no referencial usual de Minkowski.

Para aplicações a problemas astrofísicos, é fundamental incluir os efeitos da gravitação. Em vez de considerar os elementos da métrica como variáveis independentes, gostaríamos que a solução do campo gravitacional já estivesse incluída na ação, como no caso newtoniano. Assim poderíamos fazer as variações apenas com relação às quantidades do fluido. Isso é importante se queremos minimizar a ação para um dado *Ansatz*, pois diminuimos o número de funções independentes e é fundamental se queremos desenvolver um SPH relativístico incluindo a gravitação. No limite de campo fraco podemos resolver formalmente as equações de Einstein, escrevendo os elementos da métrica como funcionais das quantidades do fluido. Nesse caso a ação deve ser modificada, pois as variações na métrica não são mais independentes. Na seção 4.4, nós obtivemos uma solução explícita para esse problema no caso esfericamente simétrico, determinando o campo gravitacional e a nova forma da ação, que é dada simplesmente por (eq. 4.88)

$$I = -4\pi \int dt \int \rho(n) r^2 dr. \quad (4.136)$$

O campo gravitacional só aparece na equação de continuidade. Quando resolvemos explicitamente essa equação em termos de  $\bar{n}$ , o efeito da gravitação se manifesta no cálculo de  $n$ , do mesmo modo que os efeitos da relatividade especial:  $n = \bar{n}A^{1/2}/\gamma$  (eqs. 4.79, 4.82 e 4.107). Apesar de extremamente simples, a expressão (4.136) não é nada intuitiva. Não aparece explicitamente a contribuição do campo gravitacional. Além disso, essa integral não é invariante sob mudanças no sistema de coordenadas (note a ausência do termo  $\sqrt{-g}$ ). Na seção 4.4.2 mostramos que essa é a ação correta do sistema, pelo menos quando trabalhamos em coordenadas de curvatura. Ela foi obtida a partir da hamiltoniana do problema, que é a massa total do sistema. Além disso, mostramos que ela fornece os resultados corretos no caso estático (solução de Oppenheimer-Volkoff), no limite newtoniano e na relatividade restrita (seção 4.4.1).

A expressão (4.136) é válida qualquer que seja a intensidade do campo gravitacional. No entanto, se desejamos ter apenas  $\bar{n}$  como variável dinâmica, eliminando o termo de vínculo na lagrangiana, e se quisermos calcular  $A$  e  $\gamma$  explicitamente em termos de  $\bar{n}$ ,

precisamos nos restringir a campos fracos (seção 4.4). Considerar o campo gravitacional “fraco” é equivalente a dizer que a gravitação pode ser tratada como uma teoria linear. Isso se aplica a objetos de dimensões bem maiores do que o seu raio de Schwarzschild.

Conjecturamos que a expressão (4.136) possa ser estendida diretamente para geometrias arbitrárias, pelo menos em algum sistema de coordenadas apropriado, se desprezamos a emissão de ondas gravitacionais. Investigaremos esse assunto no futuro, procurando desenvolver um algoritmo de SPH para a o limite de campo fraco da relatividade geral.

Essa aplicação teria importantes implicações no estudo vários processos astrofísicos envolvendo pressões e velocidades relativísticas, mas campos gravitacionais fracos. Alguns exemplos são: jatos relativísticos e ejeção de matéria em núcleos ativos de galáxias, modelos explosivos para a geração de pulsos de raios gama, colisão de objetos compactos, como anãs brancas, primeiras fases da coalescência de estrelas de nêutrons e explosão de supernovas primordiais, entre outros.

## 4.8 Um comentário sobre a solução homóloga

Como vimos na seção 4.4, é difícil aplicar o formalismo variacional a partir da lagrangiana (4.36). Nesse caso temos as três componentes da métrica (4.31) como variáveis independentes. Uma solução foi utilizar um outro sistema de coordenadas, e trabalhar com a gravitação linear. Essa solução é fisicamente interessante, pois não acrescenta nenhuma restrição adicional, desde que os campos sejam fracos. Além disso, esse limite tem inúmeras aplicações em astrofísica.

Uma outra forma de colocar o problema da seção 4.3.1 de forma mais tratável é impor algumas restrições sobre a métrica. Isso levou ao estudo de uma classe de soluções, que chamaremos de homólogas. Acabamos não utilizando esses resultados no formalismo variacional. No entanto, esse estudo pode ajudar na obtenção de novas soluções exatas das equações de Einstein. Apesar da maioria das soluções exatas não se aplicarem a casos muito realistas, elas são um importante teste para algoritmos numéricos. Aqui faremos

um breve comentário sobre a métrica homóloga, mostrando uma solução exata muito simples que tem propriedades interessantes.

Utilizaremos o mesmo sistema de coordenadas co-móvel, e as mesmas convenções que na seção 4.3.1. Definiremos como homóloga, uma solução para a qual a densidade  $n(\xi, T)$  pode ser escrita na forma:

$$n(\xi, T) = \frac{g(\xi)}{a^3(T)}.$$

Comparando com a equação (4.33), temos que  $e^{\lambda r^2} = a^3 d/g$ , de modo que o produto  $e^{\lambda r^2}$  deve ser separável no produto de uma função só  $\xi$  por outra função dependente apenas de  $T$ . Se impomos que um dos elementos da parte espacial de métrica é separável essa relação obriga que o outro também seja. Aqui nos restringiremos a essa situação, ou seja:

$$e^{\lambda} = Y(T) h(\xi) \quad \text{e} \quad r = R(T) f(\xi). \quad (4.137)$$

Nesse caso, a equação de campo  $G^0_1 = 0$  (eq. 4.43) leva a

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{R}}{R} \left( 1 - \frac{f}{f'} \phi' \right).$$

O termo entre parênteses só pode depender de  $T$ , de modo que  $\phi$  será dado por

$$e^{\phi} = s(T) [f(\xi)]^{1-\alpha(T)},$$

onde

$$\alpha(T) := \frac{\dot{Y} R}{Y \dot{R}}. \quad (4.138)$$

Através de uma redefinição da variável temporal, podemos eliminar a função  $s(T)$ . Também podemos eliminar a função  $h(\xi)$  por uma redefinição da variável radial. Dessa forma,

o elemento de linha será dado por

$$ds^2 = - [\bar{f}(\bar{\xi})]^{2(1-\bar{\alpha}(\bar{T}))} d\bar{T}^2 + \bar{Y}^2(\bar{T}) d\bar{\xi}^2 + \bar{R}^2(\bar{T}) \bar{f}^2(\bar{\xi}) d\Omega^2, \quad (4.139)$$

onde a barra denota as novas variáveis e as funções transformadas. Para simplificar a notação, omitiremos esse símbolo daqui para a frente. Temos portanto, apenas duas funções de  $T$  e uma de  $\xi$  a serem determinadas.

Note que, se a métrica não é singular na origem, devemos ter  $f(\xi) \rightarrow \xi$ , quando  $\xi \rightarrow 0$ . Entretanto, para  $\alpha \neq 1$ , a parte temporal da métrica se anula ( $\alpha < 1$ ), ou diverge ( $\alpha > 1$ ) para  $\xi \rightarrow 0$ . Portanto, para que a solução seja regular em  $\xi = 0$ , é preciso fazer alguma junção com outra solução a partir de um dado  $\xi$ . Um problema semelhante foi encontrado por Cahill e Taub [167], que estudaram explicitamente algumas junções possíveis.

A partir de agora, consideraremos o caso  $\alpha = const.$  de modo que,  $Y = cR^\alpha$ . Novamente, a constante  $c$  pode ser absorvida por uma redefinição da variável espacial, de modo que o elemento de linha fica.

$$ds^2 = - [f(\xi)]^{2(1-\alpha)} dT^2 + R^{2\alpha}(T) d\xi^2 + R^2(T) f^2(\xi) d\Omega^2. \quad (4.140)$$

As equações de Einstein nesse caso ficam:

$$G^0_0 = \frac{1}{R^{2\alpha} f^2} \left( 2f'' f + f'^2 - R^{2(\alpha-1)} \right) - f^{2(\alpha-1)} (1 + 2\alpha) \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \rho, \quad (4.141)$$

$$G^1_1 = \frac{1}{R^{2\alpha} f^2} \left[ (3 - 2\alpha) f'^2 - R^{2(\alpha-1)} \right] - f^{2(\alpha-1)} \left( 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right) = -p, \quad (4.142)$$

$$G^2_2 = G^3_3 = \frac{1}{R^{2\alpha} f^2} \left[ (\alpha - 2) f'' f + (1 - \alpha)^2 f'^2 \right] - f^{2(\alpha-1)} \left( (1 + \alpha) \frac{\ddot{R}}{R} + \alpha^2 \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right) = -p. \quad (4.143)$$

O modelo de Friedmann é um caso particular dessas equações. Se fazemos  $\alpha = 1$ , e



imponamos a homogeneidade ( $\rho = \rho(T)$ ), devemos ter

$$\frac{2f''f + f'^2 - 1}{f^2} = \text{const.} := 3K.$$

A solução dessa equação, com a condição  $f(\xi) \rightarrow \xi$  quando  $\xi \rightarrow 0$ , é dada por:

$$f(\xi) = \begin{cases} (-K)^{-1/2} \sinh(\sqrt{-K}\xi), & \text{se } K < 0, \\ \xi, & \text{se } K = 0, \\ K^{-1/2} \sin(\sqrt{K}\xi), & \text{se } K > 0, \end{cases}$$

que é exatamente o elemento de linha de Robertson-Walker nas coordenadas (4.140). Nesse caso, a equação (4.141) é a equação de Friedmann, e a (4.142) fornece a outra equação para integrar  $R(T)$  com uma dada equação de estado.

Vamos analisar agora o caso  $\alpha = 0$ . Das equações (4.141) a (4.143) podemos ver que  $p = G^1_1 - 2G^2_2 = G^0_0 - 6f''/f = \rho - 6f''/f$ . Dessa forma, se  $f'' = 0$ , o fluido obedecerá à equação de estado de “matéria dura”  $p = \rho$ . Nesse caso  $f = A\xi + B$ , e como  $f\xi \rightarrow 0 \rightarrow \xi$ , teremos  $B = 0$  e  $A = 1$ . Com essa equação de estado, obtemos uma equação para  $R(T)$ , a partir da relação  $\rho - p = G^0_0 + G^1_1 = 0$ :

$$\ddot{R}R + \dot{R}^2 - 2R^2 + 1 = 0. \quad (4.144)$$

Dois soluções particulares dessa equação são dadas por  $R_{\pm} = (1 + e^{\pm 2T})^{1/2} / \sqrt{2}$ . Introduzindo uma nova variável temporal  $T'$  pela relação  $dT = dT'/T'$ , teremos

$$R_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}T'^{\pm 2}}. \quad (4.145)$$

Essa solução foi encontrada primeiramente por Wesson [168]. No entanto, podemos obter a solução geral da equação (4.144). Introduzindo a função  $g(T) := R^2$ , essa equação fica:

$$\ddot{g} + 2 - 4g = 0,$$

cuja solução é

$$g = \frac{1}{2} + ae^{2T} + be^{-2T}. \quad (4.146)$$

Essa solução, em termos da variável temporal  $t := 2T$ , foi encontrada por Gutman [169, 142]. A solução geral no sistema de coordenadas utilizado por Wesson é dada por:  $R = (1/2 + AT'^2 + BT'^{-2})^{1/2}$ .

As soluções (4.145) e (4.146) aparecem no livro de soluções exatas das equações de Einstein de Kramer et al. [142] como sendo as únicas soluções contendo todos os parâmetros cinemáticos. Vemos que elas são na verdade uma *única* solução, que corresponde ao caso  $p = \rho$ . Essas soluções aparecem como um caso particular da métrica homóloga. Um exemplo de sistema com essa equação de estado é dado por um campo escalar sem massa.

Seria possível obtermos soluções para equações de estado mais genéricas utilizando outros valores de  $\alpha$ ? Se desejarmos manter a condição  $f = \xi$ , a resposta é não. Utilizando as expressões (4.142) e (4.143) podemos obter uma equação para  $R$ , que não depende da equação de estado:

$$\frac{1}{\xi^{2\alpha}} [(2 - \alpha^2) - R^{2(\alpha-1)}] - R^{2\alpha} \left( (1 - \alpha) \frac{\ddot{R}}{R} + (1 - \alpha^2) \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right) = 0 \quad (4.147)$$

No caso  $\alpha = 0$ , essa equação também leva à (4.144). Já para  $\alpha = 1$  a equação (4.147) é identicamente satisfeita. Entretanto, no caso genérico essa equação é inconsistente já que  $\xi$  seria dado por uma função do tempo.

Poderíamos fazer restrições diferentes sobre a solução homóloga para procurar novas soluções exatas das equações de Einstein. Uma possibilidade é deixar  $f(\xi)$  livre e procurar uma solução com uma dada equação de estado. Também podem-se impor condições sobre  $f$  e  $R$  partindo dos parâmetros cinemáticos. O gradiente da aceleração, por exemplo, é

dado por

$$\dot{u}^\alpha{}_{;\alpha} = (\alpha - 1) \frac{f f'' - f'^2}{f^2}.$$

Se impomos que  $\dot{u}^\alpha{}_{;\alpha} = 0$ , teremos  $f = Ae^{B\xi}$ . Essa solução não pode ser utilizada para  $\xi \rightarrow 0$ , pois ela não tende a  $\xi$  na origem. Se a taxa de variação da expansão se anula, teremos uma restrição semelhante, mas desta vez sobre  $R$ :

$$\dot{\theta} := \theta_{;\mu} u^\mu = \frac{\alpha + 2}{f^{2(1-\alpha)}} \frac{R\ddot{R} - \dot{R}^2}{R^2} = 0 \quad \rightarrow \quad R = Ae^{BT}.$$

Com esse tipo de procedimento, podemos ir simplificando problema, diminuindo os graus de liberdade e procurando uma solução exata.

A definição de homólogo utilizada nesta seção, é equivalente impor a separabilidade na parte espacial da métrica (o que leva à expressão 4.139), e depende do sistema de coordenadas. Há três funções a serem determinadas através de equações acopladas. O termo homólogo foi utilizado em outro contexto na relatividade geral [167, 170]. Nessas referências utiliza-se uma definição invariante de coordenadas, em que a homologia é semelhante a uma isometria. A motivação de [167] estava associada à invariância de escala em algumas configurações, como numa onda de choque, ou num sistema após sofrer uma grande expansão ou contração. Essa definição é uma extensão direta das soluções auto-similares muito utilizadas na hidrodinâmica newtoniana. Nesse caso o problema é reduzido a uma equação diferencial ordinária, em termos de uma combinação da variável temporal e espacial, como por exemplo  $z = (r/r_0)(t/t_0)^{-n}$ .

Nesta seção, investigamos superficialmente algumas soluções homólogas para um fluido com simetria esférica. Nesse tipo de solução os elementos da métrica são separáveis em  $\xi$  e  $T$  e há poucas funções independentes, o que facilita a obtenção de soluções exatas. Por outro lado o escoamento possui todos os parâmetros cinemáticos (aceleração, expansão e cisalhamento). Um caso particular desse tipo de solução é o modelo cosmológico de Friedmann, outra solução analítica ocorre no caso de matéria dura ( $p = \rho$ ). Mostramos que as únicas soluções conhecidas [142] das equações de Einstein com todos os parâmetros

cinemáticos são um caso especial da métrica homóloga (4.140). Esperamos obter soluções para casos mais genéricos de escoamento homólogo.



# Conclusões

Fizemos um estudo detalhado de uma classe de aproximações para a evolução não-linear de um fluido sem colisões. Elas têm a propriedade de que a dinâmica é dada localmente em termos do tensor de deformação. A análise incluiu todas as quatro aproximações desse tipo que já foram propostas na literatura e que são exatas nas simetrias plana, esférica e cilíndrica: a Aproximação de Zel'dovich Modificada (MZA), a Aproximação do Tensor de Deformação (DTA), a Aproximação Completa de Zel'dovich (CZA) e a Aproximação de Maré Local (LTA). Para simplificar, nos referiremos a essas quatro aproximações apenas por *aproximações locais*. A título de comparação, incluímos a aproximação de Zel'dovich (ZA), que também é local, mas só é exata no caso plano. Verificamos que o comportamento dessas aproximações é muito semelhante entre si. Mostramos que as aproximações locais reproduzem com grande precisão o modelo do elipsóide homogêneo, fornecem o resultado linear correto e prevêm o valor exato para o contraste de densidade até segunda ordem. Já a aproximação de Zel'dovich superestima o tempo de colapso de elipsóide e só é correta em primeira ordem.

A principal motivação deste estudo foi a possibilidade de aplicar as aproximações locais para investigar a evolução não-linear das estruturas. No entanto não há nenhuma estimativa teórica do seu domínio de validade. Por isso realizamos alguns testes, como a comparação com o modelo do elipsóide homogêneo e com a teoria de perturbação lagrangiana. As aproximações locais se mostraram acuradas nessas duas situações. Contudo, o elipsóide é uma configuração muito simétrica e a análise perturbativa só é válida no regime quase linear. Para testar essas aproximações em situações genéricas, é preciso fazer a comparação com simulações computacionais. Propusemos um algoritmo

para confrontar as aproximações locais com as simulações de  $N$ -corpos, mas ainda não implementamos essa comparação. Entretanto, mostramos que as aproximações locais reproduzem qualitativamente alguns resultados obtidos nas simulações, como o colapso de regiões subdensas e a importância do cisalhamento no colapso.

Mostramos que não é possível calcular as posições dos elementos de volume nas aproximações locais, já que o tensor de deformação não é integrável nesse caso. Elas fornecem apenas a evolução temporal dos parâmetros do fluido (como a densidade e a expansão) em função das coordenadas lagrangianas, ou seja, das posições iniciais. Mesmo assim, uma série de propriedades podem ser obtidas com essas informações. Com as condições iniciais em todo o espaço, pode-se estudar a topologia das estruturas. A partir da distribuição de probabilidades das condições iniciais é possível calcular várias quantidades médias, como por exemplo a função de massa. Estudando o comportamento em função das condições iniciais podemos determinar propriedades gerais do colapso.

Verificamos que, em todas as aproximações locais, o tempo de colapso é pouco sensível à componente intermediária  $\sigma_2^0$  do cisalhamento inicial. Outro comportamento genérico é verificado no tempo de colapso em função das condições iniciais (expressão 3.85). Podemos nos perguntar se todas as características gerais descobertas nas aproximações locais são propriedades subjacentes da dinâmica gravitacional não-linear, ou se são apenas uma consequência da localidade. Neste momento não é possível dar uma resposta a essa questão. Seria necessário realizar a comparação com as simulações numéricas e fazer um estudo mais teórico da dinâmica gravitacional e das próprias aproximações, para tentar responder a essa pergunta. É importante destacar que, mesmo impondo a localidade, a manutenção da diagonalidade do tensor de deformação e a reprodução do resultado linear, as aproximações ainda podem se comportar de forma muito diferente. Um exemplo é dado pela Aproximação Não Magnética (NMA), que possui todas essas propriedades mas, geralmente, tem um comportamento distinto das outras aproximações.

Uma das aplicações das aproximações locais é o cálculo da função de massa dos objetos cosmológicos. Nós determinamos a função de massa para a DTA, LTA e ZA, que são as únicas aproximações definidas para quaisquer condições iniciais. Os resultados

foram comparados com o cálculo de Press-Schechter (PS) e com resultados de simulações numéricas. Para grandes massas a DTA e a LTA reproduzem melhor os resultados das simulações do que a fórmula de PS. No entanto, o cálculo da função de massa envolve várias suposições que não dependem apenas da dinâmica, de modo que não é um teste claro das aproximações.

Além da possibilidade de estudar algumas propriedades da evolução não-linear, uma vantagem das aproximações locais é a sua grande velocidade de cálculo em comparação com as simulações de  $N$ -corpos. Elas seriam aplicáveis para investigar a formação das estruturas maiores que os aglomerados de galáxias, onde ainda não ocorreu a virialização.

Também investigamos o formalismo variacional, visando a sua utilização em situações práticas. Mostramos a sua aplicabilidade para obter soluções aproximadas a partir de um dado *Ansatz*. Determinamos a ação do fluido com campo fraco, quando a métrica já é determinada em função dos parâmetros do fluido (através das equações de Einstein). Com isso foi feita a primeira aplicação do princípio variacional a situações não estacionárias na relatividade geral [151].

Com base nos resultados e discussões desta tese, surgiram motivações para vários estudos que serão desenvolvidos no futuro, tais como: comparação das aproximações locais com as simulações de  $N$ -corpos, desenvolvimento de uma aproximação local com uma expressão analítica em termos de funções racionais, estudo da função de massa em modelos não gaussianos, desenvolvimento de um método de SPH para a hidrodinâmica relativística com campo fraco, estudo de um modelo fenomenológico para a matéria escura e a repulsão cósmica, inclusão de efeitos relativísticos nas simulações cosmológicas, estudo das aproximações locais com rotação e dos análogos relativísticos dessas aproximações.





# Apêndice A

## Dinâmica de Fluidos Relativística e Newtoniana

Neste apêndice, discutiremos vários aspectos da relação entre a dinâmica de fluidos na relatividade geral e na teoria newtoniana. Essa discussão proporciona uma motivação para a introdução de aproximações locais, ajuda a esclarecer o limite newtoniano da relatividade geral e permite buscar extensões da teoria newtoniana para incluir alguns efeitos relativísticos.

Começaremos por escrever as equações newtonianas na abordagem lagrangiana (seção A.1). Depois introduziremos o formalismo de projeção da relatividade geral (seção A.2). Essa abordagem possui inúmeras aplicações, entre elas está a possibilidade de fazer uma analogia entre as equações newtonianas e relativísticas. Dessa comparação surgiu a motivação para a introdução da primeira aproximação local para a evolução não-linear das estruturas (seção A.2.3) e para a inclusão de efeitos relativísticos na hidrodinâmica newtoniana (seção A.3).

Também examinaremos superficialmente um modelo fenomenológico que poderia descrever a estrutura em grande escala do universo e a expansão cósmica com uma única equação de estado (seção A.4). Nessa proposta, a matéria se comporta como um gás sem colisões quando a densidade é maior do que a média do universo, como ocorre nas grandes estruturas. Já em regiões pouco densas, como os *voids*, ela tem um efeito grav-

itacional repulsivo, devido à sua pressão relativística negativa. Esse modelo tem um comportamento semelhante aos cenários do tipo quintessência, para explicar a expansão acelerada do universo. As propriedades mais interessantes dessa matéria aparecem no regime não-linear. Além disso, a equação de estado é relativística, ou seja,  $|p| \sim \rho$  em algumas regiões.

As simulações hidrodinâmicas são o único instrumento para se investigar a formação de estruturas quando a pressão exerce um papel importante. Existem vários algoritmos e diferentes implementações computacionais para lidar com esse problema no caso newtoniano. Já as equações relativísticas completas são intratáveis se não se impõe nenhuma simetria. Uma aplicação da dinâmica newtoniana estendida, discutida na seção A.3, seria a inclusão dos efeitos inerciais e gravitacionais da pressão nos algoritmos de simulação hidrodinâmica. Esses métodos poderiam ser utilizados para investigar a formação de estruturas com a equação de estado proposta na seção A.4.

Finalmente, discutiremos o limite newtoniano (campos gravitacionais fracos e baixas velocidades) da cosmologia relativística (seção A.5). Para isso estudaremos o comportamento de pequenas perturbações na *métrica* de um universo homogêneo e isotrópico. Como campos fracos e baixas velocidades não implicam necessariamente em pequenas flutuações, podemos investigar a dinâmica não-linear dos fluidos e das partículas mesmo tratando as perturbações na métrica e as velocidades como sendo pequenas. A teoria de perturbação relativística será efetuada num calibre que ajuda a esclarecer a limite newtoniano da cosmologia. Incluímos uma breve discussão sobre o papel da parte magnética do tensor de Weyl no limite newtoniano (seção A.5.3), que também motivou o desenvolvimento de aproximações locais.

## A.1 Dinâmica Newtoniana de Fluidos

A dinâmica newtoniana de fluidos é governada pelas leis da conservação da energia, do momento e do número de partículas, e pela ação da força gravitacional. Essas condições são expressas pelas equações de Navier-Stokes, da conservação da energia, de continuidade

e de Poisson. Nesta seção apresentaremos a dinâmica newtoniana de fluidos numa forma apropriada para fazer a comparação com os resultados da relatividade geral. Em vez das posições dos elementos de volume, teremos como variáveis fundamentais a expansão, o cisalhamento, a vorticidade, a aceleração e a densidade. Vamos obter equações de evolução para todas essas quantidades, que como veremos na próxima seção, são muito semelhantes aos seus análogos relativísticos.

O efeito combinado das forças inerciais e gravitacionais pode ser representado pelo vetor

$$a_i := \dot{v}_i + \phi_{,i}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\phi$  é o potencial gravitacional. A vírgula denota a derivada parcial:  $T^{i\dots j\dots,k} = \partial T^{i\dots j\dots}/\partial x^k$ , e o ponto denota a derivada temporal total (ou derivada convectiva):

$$\dot{T}^{i\dots j\dots} = \frac{\partial T^{i\dots j\dots}}{\partial t} + T^{i\dots j\dots,k} v^k, \quad (\text{A.2})$$

O Gradiente do sistema de referência pode ser escrito como:

$$v_{ij} := v_{j,i} = \omega_{ij} + \sigma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}, \quad (\text{A.3})$$

onde, por definição, a *expansão*  $\theta$  é o traço de  $v_{ij}$ , o *tensor de cisalhamento* (ou de *deformação*)  $\sigma_{ij}$  é a parte simétrica sem traço, e o tensor de vorticidade  $\omega_{ij}$  é a sua parte anti-simétrica:

$$\begin{aligned} \theta & : = v^i{}_{,i} = \theta^i{}_i = \text{div } v, \\ \sigma_{ij} & : = \theta_{ij} - \frac{1}{3}\theta h_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

O *vetor vorticidade* é definido em termos de  $\omega_{ij}$  por

$$\omega^i := \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\omega_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}v_{k,j} = \frac{1}{2}(\text{rot } v)^i, \quad (\text{A.5})$$

e os escalares de vorticidade  $\omega$  e de cisalhamento são definidos por

$$\omega := (\omega^i \omega_i)^{1/2} = \left( \frac{1}{2} \omega^{ij} \omega_{ij} \right)^{1/2}, \quad \sigma := \left( \frac{1}{2} \sigma^{ij} \sigma_{ij} \right)^{1/2}.$$

Como veremos na próxima seção, o tensor  $\phi_{,i,j}$  faz o papel do tensor de curvatura<sup>1</sup>  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ . O seu traço dá a equação de campo de Poisson:

$$\phi^i_{,i} = \frac{\kappa}{2} \rho, \tag{A.6}$$

onde  $\kappa = 8\pi G$ .

Vamos agora obter algumas equações para os parâmetros cinemáticos. No caso newtoniano qualquer campo vetorial satisfaz as identidades

$$\frac{\partial (v_{i,j})}{\partial t} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} \right)_{,j}, \tag{A.7}$$

$$v_{i,j,k} = v_{i,k,j}. \tag{A.8}$$

Da definição de  $a_i$  (A.1) temos:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = a_i - v_{i,k} v^k - \phi_{,i}.$$

Derivando essa equação em relação a  $j$  e utilizando as (A.7) e (A.8), junto com a definição da derivada temporal (A.2) obtemos

$$(v_{i,j})^{\cdot} - a_{i,j} + v_{i,k} v^{k,j} + \phi_{,i,j} = (v_{ji})^{\cdot} - a_{i,j} + v_{ki} v^{jk} + \phi_{,i,j} = 0. \tag{A.9}$$

Esta é a equação básica para a propagação dos parâmetros cinemáticos. Tomando o traço

---

<sup>1</sup>Esse papel fica claro na formulação da gravitação newtoniana na linguagem do espaço curvo. Veja a referência [146], capítulo 12.

dessa equação, obtemos

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 - a^i{}_{,i} + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \phi^i{}_{,i}. \quad (\text{A.10})$$

Usando agora a equação de Poisson (A.6), obtemos a equação de Raychaudhuri

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 - a^i{}_{,i} + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{1}{2}\kappa\rho = 0. \quad (\text{A.11})$$

Para obter a equação de propagação para a vorticidade, vamos pegar a parte anti-simétrica da expressão (A.9). Multiplicando essa equação por  $\varepsilon^{ijk}$  obtemos:

$$\dot{\omega}^k + \frac{2}{3}\theta\omega^k - \sigma_i^k\omega^i + \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}a_{i,j} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Como veremos à diante, no caso de um fluido perfeito,  $a_i$  é proporcional a  $p_{,i}$  (eq. A.17). Assim, o último termo desta equação se anula, levando à conservação da vorticidade.

Tomando a parte simétrica da (A.9) e subtraindo o seu traço, obtemos a equação de propagação para o cisalhamento:

$$(\sigma_{ij})' - a_{(i,j)} + \omega_i\omega_j + \sigma_{ik}\sigma^k{}_j + \frac{2}{3}\theta\sigma_{ij} + h_{ij}\left(-\frac{1}{3}\omega^2 - \frac{2}{3}\sigma^2 + \frac{1}{3}a^k{}_{,k}\right) + E_{ij} = 0, \quad (\text{A.13})$$

onde

$$E_{ij} := \phi_{,i,j} - \frac{1}{3}h_{ij}\phi^k{}_{,k}$$

é a parte sem traço do tensor  $\phi_{,i,j}$  e é conhecido como *campo de maré*.

Vemos que, enquanto a expansão é afetada diretamente pela matéria em cada ponto, através da equação de Raychaudhuri, o campo  $E_{ij}$  (força de “maré”) afeta o movimento do fluido induzindo um cisalhamento nas linhas de fluxo. Esse cisalhamento determina então a propagação da vorticidade, e entra também na equação da expansão (causando uma tendência de convergência das linhas de fluxo). Note a presença dos termos em  $\omega_i$  em (??), representando o efeito de deformação das “forças centrífugas”.

A partir da condição (A.8), obtemos equações de vínculo para os parâmetros cinemáticos. Multiplicando essa equação por  $\delta^{ik}$ , obtemos:

$$\omega_{j,i}^i + \sigma_{j,i}^i - \frac{2}{3}\theta_{,j} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Como o vetor vorticidade é o rotacional de outro campo vetorial ( $v^i$ ), ele tem divergência nula

$$\omega^i_{,i} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Multiplicando a (A.8) por  $\varepsilon^{jkl}$ , e simetrizando obtemos:

$$(\sigma_{(i}^{k,l} - \omega_{(i}^{k,l)}) \varepsilon_{j)kl} = \text{rot}(\sigma_{ij} + \omega_{ij}) = 0. \quad (\text{A.16})$$

As equações de propagação (A.11) a (A.13) são equivalentes às (A.7), e as equações de vínculo (A.14) a (A.16) são equivalentes às (A.8).

Na teoria newtoniana, a conservação do momentum é dada pela equação de Navier-Stokes

$$\dot{v}_i = -\phi_{,i} - \frac{1}{\rho} (p_{,i} + \pi_i^j{}_{,j}),$$

onde  $p$  é a pressão dinâmica isotrópica,  $\pi_{ij}$  é a pressão anisotrópica, e  $\rho$  é a densidade de massa. Usando a definição (A.1) podemos escrever essa equação na forma

$$\rho a_i + (p_{,i} + \pi_i^j{}_{,j}) = 0. \quad (\text{A.17})$$

A conservação da energia é representada pela relação de Gibbs, que é dada por<sup>2</sup>

$$d\varepsilon = \frac{\varepsilon + P}{n} dn + nT ds, \quad (\text{A.18})$$

---

<sup>2</sup>Essa equação pode ser deduzida da expressão mais familiar para a conservação da energia  $TdS = dE + PdV$ , notando que, se o número total de partículas é conservado,  $dn/n = -dV/V$ , e  $S = nsV$ .

onde  $\varepsilon$  é a energia por unidade de volume,  $n$  é a densidade do número de partículas, e  $s$  é a entropia específica (por partícula). A variação da entropia é dada por [171, 172]

$$nT\dot{s} = -(\pi_{ij}\sigma^{ij} + q^i{}_{,i} + (p - P)\theta), \quad (\text{A.19})$$

onde  $q^i$  é o fluxo de calor e  $P$  é a pressão termodinâmica. Mesmo se não há fluxo de calor e se  $\pi_{ij} = 0$ , pode haver geração de entropia através da viscosidade volumar  $Q$ , que é a diferença entre a pressão mecânica e a termodinâmica ( $Q := p - P$ ).

A conservação número de partículas<sup>3</sup> é expressa pela condição

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (nv^i)_{,i} = 0,$$

conhecida como equação de continuidade. Em termos dos parâmetros cinemáticos, temos

$$\dot{n} + n\theta = 0. \quad (\text{A.20})$$

Para um fluido perfeito adiabático, temos  $\pi_{ij} = 0 = q^i$  e  $P = p$ . Nesse caso, a expressão da conservação da energia (A.18) fica

$$\dot{\varepsilon} + (\varepsilon + P)\theta = 0. \quad (\text{A.21})$$

As equações (A.11) a (A.13), (A.17), (A.20) e (A.21) são as equações básicas da dinâmica newtoniana de fluidos (perfeitos) quando consideramos  $\theta$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\omega_i$ ,  $a_i$  e  $\rho$  como variáveis fundamentais.

---

<sup>3</sup>Note que a densidade de massa é dada por  $\rho = mn$ , onde  $m$  é a massa das partículas. Assim, na mecânica newtoniana, a conservação do número de partículas é equivalente à conservação da massa.



## A.2 Formalismo de Projeção da Relatividade Geral

Na formulação usual da relatividade geral, a equação de Einstein,

$$G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.22})$$

é vista como uma equação de campo para as componentes do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , já que o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  pode ser obtido da métrica e de suas derivadas primeiras e segundas. Assim, dada uma distribuição de matéria com um tensor energia-momentum  $T_{\alpha\beta}$ , resolvem-se das equações de campo (A.22) em termos de  $g_{\mu\nu}$ . Todas as quantidades geométricas, como por exemplo o tensor de Weyl, podem então ser obtidas a partir da métrica.

Há uma formulação alternativa da relatividade geral, introduzida por Ehlers [173], Hawking [174] e Ellis [171] que resultou numa poderosa descrição covariante dos campos gravitacional e de matéria. No formalismo de projeção da relatividade geral, ou decomposição espaço-temporal covariante, as equações de Einstein são separadas em equações de evolução e equações de vínculo envolvendo apenas derivadas espaciais. Essas equações são provenientes das identidades de Ricci e de Bianchi, com as equações de Einstein sendo incorporadas algebricamente pela substituição do tensor de Einstein pelo tensor energia-momentum. Nessa formulação o tensor de Weyl é tratado como quantidade geométrica fundamental. As outras quantidades fundamentais são os parâmetros cinemáticos (aceleração, expansão, cisalhamento e vorticidade) e os parâmetros dinâmicos (densidade, pressão, tensão anisotrópica e fluxo de energia). Em vez de equações para a métrica, temos equações para os parâmetros cinemáticos e dinâmicos, e para as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl.

A decomposição espaço-temporal covariante possui várias vantagens em relação à formulação tradicional da relatividade geral. Nesse formalismo todas as quantidades têm uma interpretação física ou geométrica direta. Ele conduz naturalmente a uma teoria de perturbação linear covariante e invariante de calibre [175, 176, 177], levando à caracterização covariante dos modos escalares, vetoriais e tensoriais, e evitando caracterizações

não-locais e dependentes de coordenadas presentes nas abordagens anteriores [178, 179]. Além disso, ele permite lidar com o conjunto completo de equações exatas não-lineares da relatividade geral, o que levou à descoberta de novos fenômenos e ao desenvolvimento de aproximações para a evolução não-linear das estruturas em grande escala.

Várias aplicações cosmológicas desse formalismo foram trabalhadas recentemente. A teoria de perturbação linear [175, 176, 177] foi estudada exaustivamente, tendo sido estendida para vários fluidos [180], fluidos imperfeitos [181], incluindo a termodinâmica [182] e aplicada a campos escalares no contexto da inflação [183]. Ela também foi utilizada no estudo do conjunto mínimo de observáveis em cosmologia [184, 185, 186]. A decomposição espaço-temporal covariante foi aplicada à análise das ondas gravitacionais [187], da radiação gravitacional não-linear [188], da dualidade entre as partes magnética e elétrica do tensor de Weyl [189] e das equações de Maxwell covariantes [190]. Esse formalismo também foi utilizado para estabelecer limites na anisotropia e heterogeneidade do Universo [191, 192, 193]. Ele pode igualmente ser aplicado a teorias alternativas da gravitação [194, 195].

Graças a esse formalismo, foram previstos novos efeitos que podem ter conseqüências observacionais muito interessantes. O tratamento covariante e invariante de calibre da radiação cósmica de fundo (RCF) mostrou um novo termo que contribui para as flutuações de temperatura [196, 197, 198]. Esse termo não aparecia nas deduções anteriores e a sua contribuição poderia ser importante em medidas futuras das perturbações na RCF. A diferença com as abordagens que partem da métrica ocorre porque a dedução baseada no formalismo de projeção utiliza as equações completas da relatividade geral, e apenas no final faz as aproximações, ao contrário do cálculo a partir da métrica. Essa mesma idéia levou à demonstração da possibilidade de geração de ondas gravitacionais a partir de ondas de rádio [199]. Esse processo teria implicações importantíssimas em explosões de supernovas, onde as ondas de rádio detectadas poderiam fornecer evidências observacionais das ondas gravitacionais [200].

## A.2.1 Decomposição 1+3 Covariante da Relatividade Geral

A base do formalismo lagrangiano na relatividade geral é a decomposição espaço-temporal (1 + 3) covariante. Dado um observador, definido pelo seu campo de velocidades  $u^\mu(x^\nu)$ , todas as quantidades físicas são decompostas em escalares e tensores projetados. A componente de um tensor no espaço de repouso instantâneo de  $u^\alpha$  é obtida através do tensor de projeção<sup>4</sup>

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu.$$

Note que  $h_{\mu\nu}$  possui as propriedades de um projetor no tri-espaço ortogonal a  $u^\alpha$ :  $h_{\mu\nu}u^\nu = 0$ ,  $h^{\mu\gamma}h_{\gamma\nu} = h^\mu_\nu$  e  $h^\mu_\mu = 3$ . Qualquer tensor pode ser decomposto utilizando as suas projeções sobre  $u^\mu$  e  $h_{\mu\nu}$ . As quantidades projetadas no espaço de repouso de  $u^\alpha$  têm significado análogo aos vetores e tensores do espaço tridimensional usual.

Em um referencial localmente inercial ( $g_{\alpha\beta} \stackrel{*}{=} \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ), num sistema de coordenadas co-móvel<sup>5</sup> ( $u^\alpha \stackrel{*}{=} (1, 0, 0, 0)$ ), temos  $h_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 1, 1, 1)$ . Assim, projetando um vetor sobre  $u^\alpha$  pegamos a sua componente temporal, e multiplicando por  $h_{\mu\nu}$  temos a sua parte espacial, nesse referencial. As definições das projeções vem da relatividade restrita. A energia de uma partícula com quadrimomentum  $p^\alpha$  medida por um observador  $u^\alpha$ , é por exemplo, dada pela projeção de  $p^\alpha$  sobre  $u^\alpha$ :  $E = u_\alpha p^\alpha$ . Projeções semelhantes são utilizadas para definir os campos elétrico e magnético para um observador  $u^\alpha$  a partir de  $F_{\mu\nu}$ . A única novidade aqui é a liberdade de escolher um referencial genérico.

Outra quantidade importante na decomposição (1 + 3) é o tensor de Levi-Civita pro-

---

<sup>4</sup>Todas as convenções, como a assinatura da métrica, etc. são dadas na página *x*. Em particular, nessas convenções temos  $u^\mu u_\mu = -1$ .

<sup>5</sup>Aqui chamaremos de co-móvel um referencial que se move junto com a matéria, mesmo numa distribuição heterogênea, de modo  $u^i = 0$ . As coordenadas co-móveis fazem o papel das coordenadas lagrangianas. Não confundir com as coordenadas (eulerianas) co-móveis utilizadas na cosmologia newtoniana. Nesse caso co-móvel se refere à expansão média, e não ao fluido, que em geral tem uma velocidade peculiar.

jetado

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \eta_{\delta\alpha\beta\gamma} u^\delta, \quad (\text{A.23})$$

que define o elemento de trivolume das superfícies ortogonais a  $u^\alpha$ . Como veremos, ele têm um papel análogo ao símbolo de Levi-Civita no espaço euclidiano tridimensional.

Tensores de 2ª ordem projetados podem ser decompostos da seguinte forma:

$$\hat{S}_{\alpha\beta} := S_{\mu\nu} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu = \frac{1}{3} S h_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^\gamma + S_{\langle\alpha\beta\rangle}, \quad (\text{A.24})$$

onde  $S = S_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$  é o traço,  $S_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S^{[\beta\gamma]}$  é a parte vetorial (vetor dual à parte anti-simétrica) e  $S_{\langle\alpha\beta\rangle} := \left[ h_{(\alpha}^\mu h_{\beta)}^\nu S_{\mu\nu} - \frac{1}{3} S h_{\alpha\beta} \right]$  é a parte tensorial (simétrica) sem traço.

### Derivadas e operadores vetoriais

A derivada temporal total (com relação ao  $u^\alpha$ ) é definida por<sup>6</sup>

$$\dot{T}^{\alpha\dots}_{\beta\dots} = T^{\alpha\dots}_{\beta\dots;\gamma} u^\gamma, \quad (\text{A.25})$$

e é análoga à derivada convectiva em mecânica newtoniana de fluidos.

A divergência e o rotacional espaciais covariantes de vetores são definidos por

$$\text{div } V : = V^\alpha_{;\beta} h_\alpha^\beta = V^\alpha_{;\alpha} + \dot{V}^\alpha u_\alpha \quad (\text{A.26})$$

$$(\text{rot } V)_\alpha : = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V^\gamma_{;\delta} h^{\delta\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} V^{\beta;\gamma}. \quad (\text{A.27})$$

Analogamente podemos definir a divergência e o rotacional (espaciais covariantes) de

---

<sup>6</sup>O ponto e vírgula ; denota a derivada covariante.

tensores de 2ª ordem

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} S)^\alpha &: = S^{\mu\nu}{}_{;\gamma} h_\nu^\gamma h_\mu^\alpha \\(\operatorname{rot} S)_{\alpha\beta} &: = \varepsilon_{\gamma\delta(\alpha} S_{\beta)}{}^\delta{}_{;\varepsilon} h^{\varepsilon\gamma} = -S_\mu{}^{\nu;\varepsilon} \varepsilon_{\nu\varepsilon(\alpha} h_{\beta)}^\mu.\end{aligned}$$

### Gradiente do sistema de referência e parâmetros cinemáticos

A decomposição ortogonal do gradiente de  $u^\alpha$ , em relação ao próprio observador  $u^\alpha(x)$  é dada por

$$u_{\alpha;\beta} = -a_\alpha u_\beta + v_{\alpha\beta} \quad (\text{A.28})$$

onde

$$a_\alpha = u^\alpha{}_{;\beta} u^\beta = \dot{u}_\alpha, \quad (\text{A.29})$$

é a aceleração e  $v_{\alpha\beta}$  é a parte espacial do gradiente de velocidade,

$$v_{\alpha\beta} := h_\alpha^\mu h_\beta^\nu u_{\nu;\mu}.$$

Ela pode ser decomposta nos parâmetros cinemáticos de forma idêntica à (A.3). O traço de  $v_{\alpha\beta}$  é a *expansão*  $\theta$ , a parte simétrica sem traço fornece o *tensor de cisalhamento* (ou *deformação*)  $\sigma_{\mu\nu}$ , e a parte anti-simétrica forma o tensor de vorticidade  $\omega_{\alpha\beta}$ . A partir de  $\omega_{\alpha\beta}$  definimos o *vetor vorticidade* pela relação

$$\omega^\alpha := \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \omega_{\mu\nu}.$$

Assim, os parâmetros cinemáticos são dados por

$$\theta : = u^\alpha{}_{;\alpha} = \text{div } u, \quad (\text{A.30})$$

$$\sigma_{\alpha\beta} : = \theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\beta} = u_{\langle\alpha;\beta\rangle}, \quad (\text{A.31})$$

$$\omega^\alpha : = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\nu}\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\nu}u_{\nu;\mu} = \frac{1}{2}(\text{rot } u)^\alpha. \quad (\text{A.32})$$

Os escalares  $\omega$  e  $\sigma$  são definidos por

$$\omega := (\omega^\alpha\omega_\alpha)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}\right)^{1/2}, \quad \sigma := \left(\frac{1}{2}\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\right)^{1/2}, \quad (\text{A.33})$$

e se anulam se e somente, respectivamente, o vetor vorticidade ou o tensor de cisalhamento forem nulos.

### O tensor de Energia-momentum e os parâmetros dinâmicos

Qualquer tensor simétrico de 2ª ordem pode ser decomposto em relação a um observador instantâneo  $u^\alpha$  na forma

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + p h^{\alpha\beta} + q^\alpha u^\beta + q^\beta u^\alpha + \pi^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.34})$$

onde, por definição

$$q^\alpha u_\alpha = \pi^{\alpha\beta} u_\beta = 0, \quad (\text{A.35})$$

e

$$\rho : = T^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta, \quad (\text{A.36})$$

$$q^\alpha : = h^{\alpha\beta} u^\gamma T_{\beta\gamma}, \quad (\text{A.37})$$

$$p : = \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.38})$$

$$\pi^{\alpha\beta} : = h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} T_{\mu\nu} - p h^{\alpha\beta} = T^{\langle\alpha\beta\rangle}. \quad (\text{A.39})$$

No caso do tensor energia-momentum,  $\rho$  representa a densidade de energia total medida no referencial  $u^\alpha$ ,  $q_\alpha$  é o fluxo de energia relativo a  $u^\alpha$ ,  $p$  a pressão dinâmica<sup>7</sup>, e  $\pi_{\alpha\beta}$  a pressão anisotrópica. Estes são os *parâmetros dinâmicos*.

Um *fluido perfeito* é definido pelas condições

$$\pi_{\alpha\beta} = 0 = q_\alpha.$$

Para um fluido genérico há duas formas de se escolher  $u^\alpha$ . No referencial de partículas, ou referencial de Eckart [202, 31],  $u^\alpha$  é definido em termos do fluxo de partículas  $N^\alpha$

$$u^\alpha := (-N^\beta N_\beta)^{-1/2} N^\alpha.$$

Assim,  $u^\alpha$  é a quadri-velocidade da matéria. O número de partículas por unidade de volume  $n$ , será dado por  $n := -u_\alpha N^\alpha$ . Dessa forma  $N^\alpha = nu^\alpha$ , e a conservação do número de partículas fica

$$N^\alpha{}_{;\alpha} = (nu^\alpha)_{;\alpha} = 0. \quad (\text{A.40})$$

Já no referencial de energia, ou de Landau [203],  $u^\mu$  é escolhido de modo que  $\rho u^\mu$  é o fluxo de energia. Com essa escolha  $\rho u^\mu$  já inclui qualquer condução de calor, assim o tensor energia momentum fica

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + p h^{\alpha\beta} + \Sigma^{\mu\nu}.$$

Por outro lado, não vale mais a equação de conservação (A.40). No referencial de Landau temos

$$N^\alpha{}_{;\alpha} = (nu^\alpha)_{;\alpha} + j^\alpha = 0.$$

---

<sup>7</sup>Se há uma viscosidade volumar, teremos  $p = P + Q$ , onde  $P$  é a pressão termodinâmica.

onde  $j^\alpha$  é chamado de deriva de partículas (*particle drift*).

Essas duas escolhas são equivalentes. Nós utilizaremos o referencial de Eckart na discussão a seguir e na seção A.3, e o referencial de Landau na seção A.5. Para um fluido perfeito os dois referenciais coincidem, pois não há fluxo de calor.

### O tensor de Weyl e suas partes elétrica e magnética

O tensor de Weyl  $C_{\alpha\mu\beta\nu}$ , pode ser decomposto nos tensores

$$E_{\alpha\beta} := C_{\alpha\mu\beta\nu}u^\mu u^\nu, \quad H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}{}^{\rho\sigma}C_{\rho\sigma\beta\nu}u^\mu u^\nu. \quad (\text{A.41})$$

Eles pertencem ao espaço de repouso de  $u^\mu$  e são simétricos e sem traço ( $H_{\alpha\beta}h^\alpha_\mu h^\beta_\nu = H_{\mu\nu} = H_{(\mu\nu)}$  e  $E_{\alpha\beta}h^\alpha_\mu h^\beta_\nu = E_{\mu\nu} = E_{(\mu\nu)}$ ) e contêm toda a informação do tensor de Weyl.

Os tensores  $E_{\mu\nu}$  e  $H_{\mu\nu}$  são chamados, respectivamente, de parte elétrica e magnética do tensor de Weyl. Esses nomes são devidos à analogia entre as definições desses tensores, e a definição covariante dos campos elétricos e magnéticos a partir do tensor  $F_{\mu\nu}$  [172]. Como veremos mais adiante, há uma grande entre o papel das componentes do tensor de Weyl e seus correspondentes eletromagnéticos.

O tensor de Ricci é a parte do tensor de curvatura que é determinada localmente pelo conteúdo de matéria, através da equação de Einstein. No formalismo de projeção  $R_{\mu\nu}$  é escrito em termos de  $T_{\mu\nu}$ . Já o tensor de Weyl não é determinado localmente, pois devido às suas simetrias, ele não contribui para  $R_{\mu\nu}$  e portanto não aparece nas equações de Einstein. Dessa forma,  $C_{\alpha\beta\gamma\lambda}$  representa o campo gravitacional livre, ou seja, a parte do tensor de curvatura cujo valor num ponto não é determinado pela matéria nesse ponto. No vácuo, apenas o tensor de Weyl por ser diferente de zero.

### Identidade de Ricci

A partir da identidade de Ricci

$$u_{\alpha;\beta;\gamma} - u_{\alpha;\gamma;\beta} = -R_{\alpha\lambda\beta\gamma}u^\lambda \quad (\text{A.42})$$



podemos deduzir equações para os parâmetros cinemáticos. Multiplicando essa identidade por  $u^\gamma$  e projetando no espaço de repouso obtemos

$$h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (u_{\alpha;\beta})^\cdot - h_\mu^\alpha h_\nu^\beta a_{\alpha;\beta} + h_\mu^\alpha h_\nu^\beta u_{\alpha;\gamma} u^\gamma{}_{;\beta} + R_{\mu\lambda\nu\gamma} u^\lambda u^\gamma = 0, \quad (\text{A.43})$$

que é análoga à equação (A.9) no caso newtoniano. A semelhança dessas equações é essencialmente a manifestação da similaridade entre as equações do desvio geodésico em relatividade geral e na teoria newtoniana<sup>8</sup>. Decompondo essa expressão em seu traço, parte anti-simétrica e simétrica sem traço; e utilizando a equação de Einstein (A.22) e a definição de  $E_{\mu\nu}$  (A.41) obtemos as seguintes equações de evolução:

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 - a^\alpha{}_{;\alpha} + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p) = 0, \quad (\text{A.44})$$

conhecida como equação de Raychaudhuri,

$$h_\alpha^\rho \dot{\omega}^\alpha + \frac{2}{3}\theta \omega^\rho - \sigma_\nu^\rho \omega^\nu + \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\rho} a_{\alpha;\beta} = 0, \quad (\text{A.45})$$

e

$$\begin{aligned} & h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (\sigma_{\alpha\beta})^\cdot - h_\mu^\alpha h_\nu^\beta a_{(\alpha;\beta)} - a_\mu a_\nu + \omega_\mu \omega_\nu + \sigma_{\mu\gamma} \sigma^\gamma{}_\nu + \frac{2}{3}\theta \sigma_{\mu\nu} + \\ & + h_{\mu\nu} \left( -\frac{1}{3}\omega^2 - \frac{2}{3}\sigma^2 + \frac{1}{3}a^\alpha{}_{;\alpha} \right) - \frac{\pi_{\mu\nu}}{2} + E_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Essas equações são formalmente semelhantes às equações newtonianas (A.11), (A.12) e (A.13). Para um fluido perfeito, num sistema de coordenadas localmente chato, em coordenadas co-móveis, as equações newtonianas são idênticas às relativísticas, exceto pela presença do termo  $(3/2)p$  na (A.44). Esse termo representa o papel da pressão como fonte do campo gravitacional. Note que a densidade de “massa gravitacional ativa” relativística é  $\rho + 3p = mn + \varepsilon + 3p$ , de modo que a energia interna também contribui para o campo gravitacional. São justamente esses termos adicionais que causam o problema

---

<sup>8</sup>Veja a referência [146], capítulo 12.

do colapso gravitacional em relatividade geral.

Comparando a (A.13) com a (A.46), vemos que parte elétrica do tensor de Weyl tem um papel análogo ao campo de maré.

Três novos conjuntos de equações podem ser obtidos da identidade de Ricci (A.42). Fazendo projeções dessa equação no espaço de repouso de  $u^\alpha$  e após algumas manipulações, obtemos as seguintes relações

$$h_\beta^\epsilon \left( -\omega^{\beta\alpha}{}_{;\alpha} - \sigma^{\beta\alpha}{}_{;\alpha} + \frac{2}{3}\theta^{;\beta} \right) + a^\alpha (\sigma^\epsilon{}_\alpha - \omega^\epsilon{}_\alpha) = q^\epsilon, \quad (\text{A.47})$$

$$\omega^\alpha{}_{;\alpha} - 2\omega^\alpha a_\alpha = 0, \quad (\text{A.48})$$

$$2a_{(\mu}\omega_{\nu)} + \text{rot}(\sigma_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}) = H_{\mu\nu}. \quad (\text{A.49})$$

Essas são as equações de vínculo para os parâmetros cinemáticos, análogas às (A.14) a (A.16) no caso newtoniano. As equações newtonianas são formalmente semelhantes às relativísticas. As diferenças aparecem nos termos contendo a aceleração  $a^\mu$ , e na ausência do termo  $H_{ij}$  nas equações newtonianas. Vemos que *não há um análogo newtoniano da parte magnética do tensor de Weyl* nessas equações.

As equações de propagação para os parâmetros cinemáticos (eqs. A.44, A.45 e A.46) junto com as equações de vínculo (eqs. A.47, A.48 e A.49) são equivalentes às identidades de Ricci (A.42).

As identidades de Ricci (A.42) são análogas às equações (A.7) e (A.8), que expressam a comutação das derivadas na teoria newtoniana.

### Identidade de Bianchi

Vamos ver agora as equações que vem das *identidades de Bianchi*  $R_{\alpha\beta[\gamma\delta;\epsilon]} = 0$ . Contraindo essa equação e utilizando a definição do tensor de Weyl, obtemos

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta}{}_{;\delta} = R^{\gamma[\alpha;\beta]} - \frac{1}{6}g^{\gamma[\alpha}R^{\beta]}. \quad (\text{A.50})$$

Essas equações implicam nas *identidades de Bianchi contraídas*

$$R^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{2}R^{;\alpha} \iff G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0,$$

que, pela equação de Einstein, são equivalentes à conservação do tensor energia-momento

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0.$$

Projetando essa equação em  $u_\nu$  e em  $h_{\nu\alpha}$ , com  $T^{\mu\nu}$  dado pela (A.34) obtemos

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta - \pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + q^\alpha{}_{;\alpha} + q^\alpha a_\alpha = 0, \quad (\text{A.51})$$

$$(\rho + p)a_\alpha + (\dot{q}_\beta + \pi^\gamma_{\beta;\gamma} + p_{,\beta})h_\alpha^\beta + \left(\omega_\alpha^\beta + \sigma_\alpha^\beta + \frac{4}{3}\theta h_\alpha^\beta\right)q_\beta = 0. \quad (\text{A.52})$$

A equação (A.51) é a expressão relativística da conservação da energia, e a (A.52) é o análogo da equação de Navier-Stokes.

Para um fluido perfeito ( $q_\alpha = 0 = \pi_{\alpha\beta}$ ) a (A.52) leva à equação de Euler relativística

$$(\rho + p)a_\alpha + p_{,\beta}h_\alpha^\beta = 0. \quad (\text{A.53})$$

Note que, num sistema de coordenadas localmente chato, em coordenadas co-móveis a equação (A.53) é quase idêntica à (A.17), para um fluido perfeito. Entretanto no caso relativístico aparece  $(\rho + p)$  como massa inercial<sup>9</sup>. A conservação da energia num fluido perfeito

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0, \quad (\text{A.54})$$

parece igual à expressão newtoniana (A.21). No entanto é preciso lembrar que a energia

---

<sup>9</sup>O papel da inércia é exercido pelo termo que multiplica a aceleração na equação de movimento.

total por unidade de volume  $\rho$  é a soma da energia de repouso com a energia interna

$$\rho = mn + \varepsilon,$$

onde  $m$  é a massa das partículas. Se o número de partículas é conservado, teremos

$$(nu^\mu)_{;\mu} = \dot{n} + n\theta = 0, \quad (\text{A.55})$$

que é idêntica à equação (A.20). Nesse caso a (A.54) fica idêntica à (A.21).

A relação de Gibbs, na relatividade geral, inclui também a energia de repouso

$$d\rho = \frac{\rho + P}{n} dn + nTds. \quad (\text{A.56})$$

Note que, na expressão (A.52),  $p$  é a pressão dinâmica. Num fluido imperfeito pode haver uma diferença entre  $p$  e a pressão termodinâmica  $P$  definida pela relação de Gibbs. Essa diferença é chamada de viscosidade volumar<sup>10</sup>. Além das condições  $\pi_{\alpha\beta} = 0 = q_\alpha$ , um fluido perfeito tem, por definição  $P = p$ .

Combinando a equação (A.54) com a conservação do número de partículas (eq. A.55) obtemos

$$\dot{\rho} = (\rho + p) \frac{\dot{n}}{n}.$$

Comparando esse resultado com a relação de Gibbs (A.56), obtemos que

$$\dot{s} = s_{;\mu} u^\mu = 0, \quad (\text{A.57})$$

se  $P = p$ , de modo que, num fluido perfeito, a entropia por partícula é conservada. Note que, se houvesse uma viscosidade volumar, teríamos  $P \neq p$ , e haveria geração de entropia. Num fluido genérico, a produção de entropia é dada pela equação (A.19).

---

<sup>10</sup>Para uma discussão sobre a viscosidade volumar, veja a ref. [204].

Utilizando as equações de Einstein (A.22) nas identidades de Bianchi (A.50), fazendo projeções em  $u^\alpha$  e no espaço de repouso, e efetuando algumas manipulações, obtemos quatro conjuntos de equações para  $H^{\alpha\beta}$  e  $E^{\alpha\beta}$ , similares às equações de Maxwell. Para um fluido perfeito, essas equações ficam:

$$(\operatorname{div} E)^\sigma + \varepsilon^{\sigma\mu\nu} \sigma_{\mu\delta} H_\nu^\delta + 3H^{\sigma\beta} \omega_\beta = \frac{1}{3} D^\sigma \rho, \quad (\text{A.58})$$

$$(\operatorname{div} H)^\sigma + \varepsilon^{\sigma\alpha\beta} \sigma_{\alpha\delta} E_\beta^\delta - 3E^{\sigma\beta} \omega_\beta = (\rho + p) \omega^\sigma, \quad (\text{A.59})$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\langle\rho\sigma\rangle} - (\operatorname{rot} H)_{\rho\sigma} - 2H_{(\rho}^\mu \varepsilon_{\sigma)\nu\mu} a^\nu + \theta E_{\rho\sigma} - 3E_{\langle\rho}^\mu \sigma_{\sigma>\mu} + E_{(\rho}^\mu \omega_{\sigma)\mu} = \\ -\frac{1}{2} (\rho + p) \sigma_{\sigma\rho} - \frac{1}{2} D_{\langle\rho} a_{\sigma\rangle}, \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

$$\dot{H}_{\langle\rho\sigma\rangle} + (\operatorname{rot} E)_{\rho\sigma} + 2E_{(\rho}^\mu \varepsilon_{\sigma)\nu\mu} a^\nu + \theta H_{\rho\sigma} - 3H_{\langle\rho}^\mu \sigma_{\sigma>\mu} + H_{(\rho}^\mu \omega_{\sigma)\mu} = 0. \quad (\text{A.61})$$

As duas últimas equações, são equações de evolução para  $E_{\mu\nu}$  e  $H_{\mu\nu}$ , enquanto as (A.58) e (A.59) são equações de vínculo. Essas quatro equações são conhecidas como quase-maxwellianas, devido à sua similaridade com as equações de Maxwell.

É interessante notar que, assim como no eletromagnetismo, no vácuo existe uma dualidade entre as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl na relatividade geral [189].

Note que a parte magnética do tensor de Weyl não influencia diretamente a evolução da matéria, já que ele não aparece explicitamente em nenhuma equação para os parâmetros cinemáticos e dinâmicos. No entanto, como a evolução das partes elétrica e magnética é acoplada pelas equações quase-maxwellianas, o campo  $H_{\mu\nu}$  acaba influenciando a evolução da matéria através de  $E_{\mu\nu}$ .

Existem análogos newtonianos das equações quase-maxwellianas, mas elas não carregam nenhum conteúdo novo, já que não existem as identidades de Bianchi neste caso. O análogo das equações (A.59) e (A.60) vem da comutação das derivadas  $v_{i,j,k} = v_{i,k,j}$  (eq. A.8):

$$\sigma_{[i,k]}^{[j,l]} + \frac{2}{3} h_{[i}^{[j} \theta^{l]} = 0.$$

Nela não aparece o campo gravito-magnético, já que ele não tem análogo newtoniano. As equações para  $E_{ij}$  vem da (A.7):

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} E)^i &= \frac{1}{3} \rho^i \\(\operatorname{rot} E)^i &= 0.\end{aligned}$$

Para determinar o campo de maré  $E_{ij}$  precisamos mesmo integrar a equação de Poisson.

## A.2.2 O modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

O modelo cosmológico padrão pressupõe que, em grandes escalas, o universo é homogêneo e isotrópico. Isso se aplica tanto à geometria quanto ao conteúdo de matéria. Nesse caso, pode-se mostrar que a matéria deve ser representada por um fluido perfeito. A isotropia implica que apenas os escalares podem ser diferentes de zero, já que vetores e tensores definiriam direções privilegiadas, desse modo devemos ter,  $\omega^\alpha = a^\alpha = 0$  e  $\sigma_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}$ . Assim, só sobram o escalar de expansão  $\theta$ , a densidade de energia  $\rho$  e a pressão  $p$ . Além disso, esses escalares devem ter o mesmo valor em todos os pontos, de modo que a sua derivada espacial deve se anular:  $p_{,\alpha} h^\alpha_\beta = 0 = \rho_{,\alpha} h^\alpha_\beta = \theta_{,\alpha} h^\alpha_\beta$ . Podemos introduzir uma medida da distância entre observadores vizinhos  $a$ , pela relação

$$\frac{\dot{a}}{a} := \frac{1}{3} \theta. \quad (\text{A.62})$$

Se temos um volume dado por  $V \propto a^3$ , o escalar  $\theta$  dá justamente a taxa de variação desse volume:  $\theta = \dot{V}/V$ . Aqui podemos usar a mesma variável temporal para todos os observadores. Escolheremos  $t$  de modo que  $\dot{f} = f_{;\mu} u^\mu := \partial f / \partial t$ . A variável  $t$  é conhecida como tempo cosmológico, e dá o tempo próprio medido por um observador co-móvel com a expansão média.

As condições de isotropia e homogeneidade da matéria e da geometria definem o universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). A equação de Raychaudhuri

(A.44) fica

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (\text{A.63})$$

Essa equação é quase igual à equação (1.8) da cosmologia newtoniana, quando escrita em termos do tempo cosmológico. A única diferença está na ausência da pressão como fonte de campo gravitacional no caso newtoniano.

Além da equação de Raychaudhuri, a única outra que não fica trivial no universo de Friedmann é a conservação da energia (eq. A.54)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (\text{A.64})$$

Se fornecermos uma equação de estado  $p = p(\rho)$ , as equações (A.63) e (A.64) determinam completamente a evolução do universo. Combinando essas duas equações, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\dot{a}^2) = \frac{8\pi G}{3} \frac{d}{dt}(\rho a^2),$$

que pode ser integrada para obter a equação de Friedmann,

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \rho - K, \quad (\text{A.65})$$

onde  $K$  aparece como constante de integração. Pode-se mostrar que  $K$  é a curvatura das trisuperfícies com  $t = \text{const.}$  Note que a equação (A.65) é idêntica à equação newtoniana (1.5). Essa equação pode ser resolvida para obter a evolução do fator de escala em função do tempo se tivermos a relação  $\rho = \rho(a)$ , que pode ser obtida a partir da (A.64). Para um fluido com equação de estado  $p = w\rho$ , por exemplo, teremos  $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ . Se a equação (A.64) não pode ser resolvida analiticamente, basta integrar o sistema acoplado (A.65 e A.64) com uma equação de estado qualquer.

O parâmetro de Hubble é definido por  $H := \theta/3 = \dot{a}/a$ . Definindo o parâmetro

cosmológico de densidade  $\Omega \equiv 8\pi G\rho/(3H^2)$ , a equação (A.65) pode ser escrita como

$$K = (\Omega - 1)(aH)^2.$$

Vemos que a curvatura é nula somente se  $\Omega = 1$ . No caso de termos diversas componentes com densidades  $\rho_i$  o parâmetro  $\Omega$  é a soma das contribuições de cada componente:  $\Omega = \sum_i 8\pi G\rho_i/(3H^2)$ .

Através da equação (A.63) podemos ver o efeito de uma constante cosmológica sobre a expansão do universo. Definimos o parâmetro de desaceleração  $q$  por

$$q = -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2}, \quad (\text{A.66})$$

onde  $H := \dot{a}/a$ . Escrevendo  $\rho = \rho_M + \rho_\Lambda = \rho_0 + \Lambda/(8\pi G)$ ,  $p = p_M - \rho_\Lambda$ , e como hoje  $p_{M0} \cong 0$ , pela equação (A.63), teremos

$$2q_0 \cong \kappa \frac{\rho_0}{3H_0^2} - \frac{2\Lambda}{3H_0^2} = \Omega_M - \Omega_\Lambda. \quad (\text{A.67})$$

Os dados de supernovas indicam que o parâmetro de desaceleração é negativo, de modo que deveria haver um termo cosmológico positivo, além da matéria escura, que domina a densidade de energia do universo.

### A.2.3 Uma Aproximação Local Relativística

A matéria escura fria (CDM) é a componente de matéria dominante no universo, e é a responsável pela formação das estruturas em grandes escalas. Acredita-se que ela é composta por partículas não interagentes e sem colisões. Nesse caso, o tensor energia-momentum é dado por

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \quad (\text{A.68})$$



Assim, a CDM pode ser representada por um fluido perfeito com pressão nula. Em princípio, a descrição de fluido só é válida até o cruzamento das trajetórias. Depois disso as linhas de fluxo se cortam e a hipótese de contínuo deixa de valer. Se definimos uma velocidade média das partículas numa certa escala, ainda é possível utilizar um tratamento de fluido, mas aparece uma pressão e uma viscosidade efetiva, de forma que a (A.68) não pode mais ser utilizada. Aqui nos restringiremos ao tratamento da matéria escura antes do cruzamento das trajetórias. A equação de Euler (A.53), com  $p = 0$  leva então a

$$a_\mu = 0.$$

Com essa condição, as equações restantes para os parâmetros cinemáticos (eqs. A.44 a A.46) serão dadas por<sup>11</sup>

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{1}{2}\kappa\rho = 0, \quad (\text{A.69})$$

$$\dot{\omega}^\rho + \frac{2}{3}\theta\omega^\rho - \sigma_\nu^\rho\omega^\nu = 0, \quad (\text{A.70})$$

$$\dot{\sigma}_{\mu\nu} - \omega_\mu\omega_\nu + \sigma_{\mu\gamma}\sigma^\gamma_\nu + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \left( -\frac{1}{3}\omega^2 - \frac{2}{3}\sigma^2 \right) + E_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.71})$$

Vemos que nestas equações aparecem apenas derivadas temporais convectivas que, no referencial de repouso do fluido, se reduzem a derivadas ordinárias no tempo. Como elas não envolvem derivadas espaciais, a influência dos elementos de volume vizinhos só entra implicitamente, através da parte elétrica do tensor de Weyl  $E_{\mu\nu}$ . Esta é determinada pelas equações quase-maxwellianas (A.58 a A.61). O único termo não local (com derivadas espaciais) que aparece na evolução do campo para  $E_{\mu\nu}$  (eq. A.60) é o rotacional de  $H_{\mu\nu}$ . Se desprezarmos a parte magnética  $H_{\mu\nu}$  do tensor de Weyl nessa equação, teremos

$$\dot{E}_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma} (\sigma^{\mu\nu} E_{\mu\nu}) + \theta E_{\rho\sigma} - 3E_{(\rho}^\mu \sigma_{\sigma)\mu} - E_{(\rho}^\mu \omega_{\sigma)\mu} - \frac{\kappa\rho}{2}\sigma_{\sigma\rho} = 0. \quad (\text{A.72})$$

---

<sup>11</sup>Note que a condição  $a_\mu = 0$ , implica que  $\dot{h}_{\mu\nu} = 0$ .

As equações (A.69) a (A.72) formam um conjunto de equações locais que a determina completamente a dinâmica. A solução do problema fica tremendamente simplificada, já que só é preciso resolver equações ordinárias para cada elemento de volume, para obter a evolução temporal dos parâmetros cinemáticos.

Esse fato foi salientado primeiramente por Barnes e Rowlingson [205], que fizeram um estudo das soluções exatas com  $\omega^{\alpha\beta} = H^{\alpha\beta} = 0$ . Matarrese, Pantano e Saez [206] utilizaram esse resultado para o estudo da formação de estruturas em grande escala. Eles propuseram o conjunto de equações (A.69) a (A.72) como uma aproximação da dinâmica exata, para flutuações primordiais geradas pela inflação. Nesse caso são produzidas perturbações na densidade e um fundo estocástico de ondas gravitacionais. Eles acreditavam que negligenciar a influência de  $H_{\mu\nu}$  na evolução de  $E_{\mu\nu}$  era o mesmo que desprezar a interação das perturbações na densidade com as ondas gravitacionais, o que só ocorre para campos não-lineares. Essa foi a primeira aproximação introduzida na literatura, desenvolvida para lidar com a evolução não-linear da matéria no caso relativístico, sem impor nenhuma simetria. Matarrese, Pantano e Saez [206] mostraram que as equações (A.69) a (A.72) levam ao colapso genérico dos elementos de volume na forma alongada. Essa aproximação é exata para as simetrias plana e esférica, já que  $H_{\mu\nu}$  se anula nesses casos.

Houve uma controvérsia sobre a consistência de se fazer  $H_{\mu\nu} = 0$ . Essa condição não restringiria demais as condições iniciais possíveis? Haveria uma grande classe de soluções exatas em que a parte magnética do tensor de Weyl se anula? Essas soluções seriam estáveis com relação a pequenas flutuações em  $H_{\mu\nu}$ ? Até onde o conjunto (A.69) a (A.72) poderia ser uma boa aproximação para a dinâmica não-linear?

Matarrese, Pantano e Saez [207, 208] sustentaram que a parte magnética  $H_{\mu\nu}$  poderia ser desprezada em escalas maiores que o horizonte. Já nas escalas dentro do horizonte esse termo não pode ser negligenciado e a evolução não é local. Esse resultado foi utilizado para discutir o *weak cosmic no-hair theorem*, pelo qual o universo seria altamente heterogêneo em escalas bem maiores que o raio de Hubble, e certas regiões passariam por um período inflacionário e isotropizariam, como no nosso universo observável [209, 210].

Já Mutoh, Hirai e Maeda [211] mostraram que as soluções com  $H_{\mu\nu} = 0$  são instáveis com relação a flutuações na parte magnética. Dessa forma, o conjunto (A.69) a (A.72) não é uma boa aproximação para a dinâmica não-linear no caso genérico, pois mesmo que  $H_{\mu\nu} \simeq 0$  no início, esse termo cresce e passa a ser importante na evolução. Também foi mostrado que os modelos com  $H_{\mu\nu} = 0$  são, em geral, inconsistentes [212] e conjectura-se que as únicas soluções não-homogêneas consistentes sejam as soluções de Sezekeris [213]. Como vimos, na decomposição (1 + 3) da relatividade geral temos equações de vínculo e equações de evolução. As equações de vínculo são automaticamente satisfeitas se os vínculos são obedecidos pelas condições iniciais, e se a evolução do sistema é obtida com as equações de evolução completas. No entanto, a escolha  $H_{\mu\nu} = 0$ , e a utilização da equação (A.72) para evolução de  $E_{\mu\nu}$  é inconsistente com os vínculos [212].

Mesmo que a aproximação proposta por Matarrese, Pantano e Saez [206] seja ainda muito particular e não permita o estudo de condições iniciais genéricas, ela já é um importante passo na procura de aproximações para evolução não-linear sem pressupor nenhuma simetria. Ela tem o mérito de ter sido a primeira aproximação local relativística e de ser fonte de inspiração para o desenvolvimento de novas aproximações locais.

Uma outra motivação para escolher  $H_{\mu\nu} = 0$ , ou negligenciar o seu efeito sobre a formação de estruturas, veio do fato de que a parte magnética do tensor de Weyl não tem um análogo newtoniano. É interessante notar que, no referencial de repouso do fluido, as equações (A.69) a (A.71) ficam idênticas às suas análogas newtonianas (A.11) a (A.13). A única diferença é que no caso newtoniano  $E_{ij}$  é determinado através de  $\phi$  pela equação de Poisson, enquanto na relatividade geral  $E_{\mu\nu}$  é determinado pela equação (A.60). Isso motivou uma nova aproximação no caso newtoniano, que substitui a equação de Poisson pela equação (A.72) e é discutida na seção 2.3.4. Ela também prevê que o colapso ocorre genericamente na forma alongada, o que está em desacordo com a aproximação de Zel'dovich e o comportamento genérico esperado para o colapso (seção 3.1.1). A aproximação newtoniana baseada nas equações (A.69) a (A.72) motivou ainda uma outra aproximação local que se mostrou muito acurada nos casos analisados nesta tese (veja a seção 2.3.4 o capítulo 2.3).

Encontrar aproximações locais melhoradas é uma das áreas ativas de pesquisa na teoria da formação de estruturas em grande escala. Formular o problema em termos de equações lagrangianas de fluido e de campo, não só sugere novas abordagens, mas clarifica a relação entre relatividade geral e dinâmica newtoniana. Na seção A.5.3 apresentamos uma breve discussão sobre o papel de  $H_{\mu\nu}$  no limite newtoniano da relatividade geral.

### A.3 Aspectos Relativísticos na Hidrodinâmica Newtoniana

A quase totalidade das simulações numéricas para investigar a formação de estruturas em grandes escalas é baseada na cosmologia newtoniana. Há duas razões fundamentais para isso. A primeira é a dificuldade prática de se realizar um tratamento relativístico no regime não-linear sem impor nenhuma simetria, já que teríamos um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas e altamente não-lineares. A segunda vem do fato de que as velocidades relativas entre galáxias vizinhas são muito menores do que a velocidade da luz e os campos gravitacionais de interesse cosmológico são fracos. Dessa forma, para perturbações menores que o raio de Hubble, o tratamento newtoniano se justifica. Na verdade, como vimos na seção 1.2, não existe uma cosmologia puramente newtoniana, mas utilizando as coordenadas apropriadas e fornecendo condições de fronteira no infinito, podemos *definir* uma cosmologia newtoniana. Uma alternativa é deduzir as equações cosmológicas num limite newtoniano da relatividade geral (veja a seção A.5).

Além de campos fracos e baixas velocidades, a cosmologia newtoniana também presuppõe que a pressão não é relativística, ou seja, que<sup>12</sup>  $p \ll \rho_0/c^2$ . Essa suposição é certamente válida para a matéria escura, que tem  $p_{CDM} = 0$ , e também é satisfeita pela matéria bariônica a temperaturas não excessivamente altas. Já os neutrinos não satisfazem esse critério, e além disso, não podem ser representados por um fluido perfeito. Essa condição também é violada pelo termo cosmológico responsável pela expansão acel-

---

<sup>12</sup>Aqui,  $\rho_0 = mn$  é a densidade de massa de repouso.

erada, que deve ter  $\rho + 3p < 0$ . No caso de uma constante cosmológica não há problema pois esta não tem flutuações. Na seção A.4 vamos propor um modelo fenomenológico em que a componente dominante do universo, que é também a responsável pela formação de estruturas, tem uma equação de estado relativística. Nesse caso não podemos utilizar a cosmologia newtoniana em sua formulação usual.

Procurar extensões da teoria newtoniana para incluir alguns aspectos relativísticos, pode ter aplicações práticas muito importantes para as simulações de formação de estruturas. Essa busca também ajuda a entender alguns efeitos da relatividade e pode permitir uma descrição mais simples do universo observado. Neste ponto a abordagem lagrangiana de fluidos é particularmente útil, pois motivará algumas extensões da hidrodinâmica newtoniana, através da comparação com as equações relativísticas.

Nesta seção, levaremos em conta apenas os efeitos inerciais e gravitacionais da pressão. Vamos supor que os campos gravitacionais são fracos e as velocidades não são relativísticas. Teria sentido considerar pressões relativísticas e ao mesmo tempo baixas velocidades e campos fracos? Para flutuações de um universo homogêneo, sem dúvida, já que as perturbações no campo e nas velocidades são pequenas. Para um corpo em equilíbrio, esse limite é perfeitamente válido, desde que a equação de estado seja relativística mesmo a baixas densidades. As estruturas em grandes escalas, são muito maiores do que o seu raio de Schwarzschild, além disso, as velocidades peculiares são baixas comparadas com a velocidade da luz. Dessa forma, se o universo é dominado por uma componente com pressão relativística (A.4), o seu comportamento deve ser bem descrito pelas condições impostas acima.

Como vimos na seção (A.2), há uma grande analogia formal entre as equações de fluido da relatividade geral e as da teoria newtoniana. No limite de baixas velocidades e campos fracos, temos<sup>13</sup>:  $u^\mu = (\gamma, \gamma v^i) \simeq (c, v^i)$ ,  $g_{00} = -(1 + 2\phi/c^2) c^2$  e  $g_{ij} = (1 - 2\phi/c^2) \delta_{ij}$ . Desprezando termos quadráticos em  $v/c$ , o projetor  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$  fica

$$h_{00} \simeq 0, \quad h_{ij} \simeq \delta_{ij}.$$

---

<sup>13</sup>Aqui colocamos explicitamente a velocidade da luz para que o limite newtoniano fique claro.

Nesse limite, a derivada covariante vira a derivada parcial. Além disso, a derivada temporal total (A.25) fica simplesmente derivada convectiva usual (A.2). Desse modo, as equações newtonianas para a evolução dos parâmetros cinemáticos e da densidade ficam idênticas às relativísticas. Entretanto, no caso relativístico, a pressão exerce um efeito inercial e também atua como massa gravitacional ativa. Na dedução newtoniana, vimos que último termo da equação de Raychaudhuri (A.11) vem do laplaciano do campo  $\phi$  e representa a densidade de massa gravitacional. Já no caso relativístico (eq. A.44) esse termo tem uma contribuição da pressão. Baseados nessa comparação, poderíamos escrever uma equação newtoniana para incluir o efeito relativístico da pressão como fonte do campo gravitacional. Dessa forma, a equação de Poisson ficaria

$$\phi^{i,i} = 4\pi G (\rho + 3p). \quad (\text{A.73})$$

Podemos por exemplo incluir o efeito de um termo cosmológico, fazendo  $\rho_\Lambda = -p_\Lambda = \Lambda/(8\pi G)$ . Para um fluido com pressão não relativística e com constante cosmológica, teríamos  $\phi^{i,i} = 4\pi G\rho + \Lambda$ , que é a equação utilizada na cosmologia newtoniana com termo cosmológico [214]. Na equação de Euler (A.53) vemos o efeito inercial da pressão. Colocando o mesmo termo na equação newtoniana (A.17) para um fluido perfeito, obtemos

$$\dot{v}_i + \phi_{,i} = a_i = -(\rho + p)^{-1} p_{,i}. \quad (\text{A.74})$$

Note que, além de considerarmos os efeitos inerciais e gravitacionais da pressão, também estamos considerando esses efeitos para a energia interna, já que  $\rho$  na relatividade geral inclui tanto a energia de repouso  $\rho_0 c^2 = mnc^2$  quanto a energia interna  $\varepsilon$  ( $\rho = \rho_0 c^2 + \varepsilon$ ). Utilizando esse fato, e as equações (A.20) e (A.21) obtemos uma equação para  $\rho$ :

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (\rho v^i) + p\partial_i v^i = 0. \quad (\text{A.75})$$

Ela é idêntica à equação de conservação da energia (A.54) e inclui o trabalho da pressão

na variação da densidade de energia.

Uma tentativa de incluir os efeitos da pressão relativística na teoria newtoniana foi feita por Harrison [214]. Ele propôs exatamente as mesmas equações que a (A.73) e (A.74), mas utilizou uma equação diferente para a densidade de energia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i [(\rho + p) v^i] = 0. \quad (\text{A.76})$$

Num universo homogêneo com  $p = p(t)$ , e  $\rho = \rho(t)$ , essa equação fica igual à (A.75). Nesse caso,  $v_i = r_i(da/dt)/a$ , de modo que essas equações fornecem

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{da}{dt}\frac{1}{a}(\rho + p) = 0,$$

que é exatamente a mesma que a obtida pelas equações de Einstein para um universo homogêneo com pressão relativística. A forma (A.76) é a que aparece normalmente na literatura. Apesar das equações (A.75) e (A.76) serem iguais no caso homogêneo, as equações perturbadas em cada caso são diferentes. Lima, Zanchin e Brandenberger [215] mostraram que o conjunto de equações (A.73) a (A.75) leva a uma equação para a perturbação na densidade que, em escalas maiores que o comprimento de Jeans, é idêntica à equação relativística para perturbações com grandes comprimentos de onda. Dessa forma, a equação que deveria ser utilizada é a (A.75) e não a (A.76).

É curioso que o erro tenha se propagado na literatura justamente na equação (A.75), que é a mais simples de ser obtida, pois não envolve o papel inercial ou gravitacional da pressão e não necessita das equações relativísticas (A.44) e (A.53). Bastaria notar que a energia interna contribui para a densidade de energia total  $\rho$  e usar a própria equação newtoniana da conservação da energia (eq. A.21). Esse erro provavelmente aconteceu porque essa equação era associada à equação de continuidade [214, 215] e não à conservação de energia, como deveria ser.

Nayeri e Padmanabham [216] aplicaram essa extensão da teoria newtoniana a uma mistura de dois fluidos: matéria escura e radiação. Eles estudaram o comportamento desse sistema para perturbações lineares na era dominada pela radiação e mostraram

que os resultados são excelentes quando comparados ao caso relativístico. Surpreendentemente, a concordância se mantém até para flutuações maiores que o raio de Hubble. Esse resultado motiva a utilização das equações (A.73) a (A.75) para um fluido relativístico com equação de estado genérica, pelo menos para pequenas flutuações. Essa extensão newtoniana também poderia ser útil para estudar perturbações não-lineares na radiação cósmica de fundo.

Poderíamos incluir os efeitos inerciais e gravitacionais da pressão nas simulações hidrodinâmicas em cosmologia. Em princípio, seria uma modificação simples dos códigos numéricos existentes. Bastaria acrescentar um termo  $3p$  na fonte da equação de Poisson e  $(\rho + p)^{-1}$  multiplicando o gradiente de  $p$ , em vez de  $\rho^{-1}$  apenas, na equação de Euler. É claro que uma pressão relativística pode acabar levando a grandes velocidades, o que gera uma limitação para essas simulações, pois elas pressupõem que  $v \ll c$ . No entanto, pelo menos para pequenas flutuações num universo homogêneo e para estruturas em equilíbrio, as velocidades não são relativísticas.

Discutimos acima uma extensão da teoria newtoniana para incluir os efeitos inerciais e gravitacionais da pressão. Essa extensão foi motivada pela analogia entre as equações relativísticas no formalismo lagrangiano e as equações newtonianas. Podemos seguir o mesmo procedimento para um fluido genérico, incluindo a pressão anisotrópica  $\pi_{ij}$  e o fluxo de calor por unidade de volume  $q_i$ . No caso newtoniano a equação de Navier-Stokes é (eq. A.17)

$$\rho a_i + (p_{,i} + \pi_i^j{}_{,j}) = 0. \quad (\text{A.77})$$

Já no caso relativístico ela fica<sup>14</sup> (eq. A.52)

$$(\rho + p) a_\alpha + (\dot{q}_\beta + \pi_{\beta,\gamma}^\gamma + p_{,\beta}) h_\alpha^\beta + \left( \omega_\alpha^\beta + \sigma_\alpha^\beta + \frac{4}{3} \theta h_\alpha^\beta \right) q_\beta = 0. \quad (\text{A.78})$$

---

<sup>14</sup>Se colocássemos explicitamente a velocidade da luz  $c$  nessas equações, o fluxo de calor  $q_\alpha$  apareceria sempre dividido por  $c^2$ .



Além do efeito inercial da pressão, aparecem termos contendo o fluxo de calor na versão relativística que estão ausentes no caso newtoniano. Isto ocorre porque na relatividade o fluxo de energia também carrega momentum.

A equação newtoniana da conservação da energia incluindo o fluxo de calor e a pressão anisotrópica (eqs. A.18 e A.19) é quase igual à sua versão relativística (eq. A.51). É interessante notar que  $\pi_{ij}$  e  $q_i$  não dariam nenhuma contribuição para o campo gravitacional  $\phi$  pois esses termos não aparecem na equação de Raychaudhuri relativística.

Se consideramos apenas a pressão anisotrópica, desprezando o fluxo de calor, a única diferença entre a equação (A.77) e a equação (A.78), escrita no referencial co-móvel, aparece no efeito inercial da pressão, já as equações da conservação da energia ficam idênticas. Em alguns modelos de flutuações primordiais [217, 181] a pressão anisotrópica tem um papel importante para as perturbações na radiação cósmica de fundo. A inclusão de  $\pi_{ij}$  também deve ser considerada, para um tratamento da componente de neutrinos. Estudaremos as soluções para pequenas perturbações nesse caso, e compararemos com o resultado relativístico.

Uma outra extensão interessante poderia vir da utilização das equações quase-maxwellianas no lugar da equação de Poisson para determinar  $E_{ij}$ . No caso newtoniano,  $E_{ij}$  é calculado a partir do potencial gravitacional, que é determinado por uma equação de vínculo (a equação de Poisson). Além disso,  $E_{ij}$  pode mudar instantaneamente em todos os pontos. Já no caso relativístico, temos dois tensores que representam o campo gravitacional,  $H_{\mu\nu}$  e  $E_{\mu\nu}$ , que podem ser calculados usando equações de evolução. Um exemplo de uma teoria para os campos  $H_{\mu\nu}$  e  $E_{\mu\nu}$  no limite newtoniano é dado por Bertschinger e Hamilton [219]. Essa teoria leva a influências que se propagam com velocidade finita [218]. Nesse sentido, ela é uma aproximação melhor para a teoria clássica da gravitação (ou seja, a relatividade geral) do que a teoria newtoniana propriamente dita. Ainda há controvérsias sobre o limite newtoniano de  $H_{ij}$  e das equações quase-maxwellianas [218]. Na seção A.5.3 faremos uma breve discussão sobre o limite newtoniano de  $H_{ij}$ . A busca de uma equação de evolução para  $E_{ij}$  não tem interesse puramente teórico, ela poderia

ser implementada em simulações computacionais e permite a obtenção de aproximações melhoradas para seguir a evolução não-linear da matéria (veja a seção 2.3.4).

É possível incluir vários aspectos relativísticos na teoria newtoniana, ou melhor, é possível utilizar vários limites diferentes da relatividade geral. A escolha dependerá da aplicação prática em mente. O importante é que ela represente a realidade física com boa aproximação no seu domínio de aplicação e que simplifique o tratamento em comparação com a teoria completa da relatividade geral. Vimos que formular a relatividade na decomposição  $(1 + 3)$  ajuda na busca desses limites.

## **A.4 Um Modelo Fenomenológico para a Matéria Escura e a Repulsão Cósmica**

Segundo cenário cosmológico padrão que emergiu no final do século passado, há duas componentes desconhecidas no universo: a matéria escura fria, responsável pela formação de estruturas em grande escala e uma componente com pressão relativística negativa, responsável pela expansão acelerada do universo. O objetivo desta seção é discutir uma possível descrição dessas duas componentes em termos de uma única equação de estado fenomenológica.

### **A.4.1 Motivação**

Apesar do seu sucesso face ao grande volume de dados observacionais, o modelo cosmológico padrão tem pelos menos duas lacunas fundamentais: a matéria escura (CDM) e o termo cosmológico. O que constituiria essas duas componentes? Existem vários candidatos para as partículas massivas fracamente interagentes (WIMPS) que comporiam a matéria escura, axions e partículas super-simétricas são os mais populares. Já para o termo cosmológico, o modelo preferido é o de um campo escalar auto-interagente (por uma série de motivos que serão discutidos a seguir).

É importante ressaltar que esses candidatos surgiram como explicações *a posteriori* dos dados observacionais. Tanto a descoberta da matéria escura por Zwicky nos anos 1930, como a constatação da expansão acelerada do universo no final dos anos 1990, foram uma tremenda surpresa. No entanto, uma vez que a sua presença foi constatada, é impossível viver sem essas duas componentes, pelo menos no contexto da gravitação de Einstein. Como vimos no capítulo 1, a matéria escura é fundamental para explicar a distribuição de massa em grande escala e os movimentos próprios das galáxias. Já o termo cosmológico resolve o problema da idade do universo e explica a expansão acelerada.

Note que os dados que indicam a presença da matéria escura e do termo cosmológico envolvem observações em escalas bastante diferentes. A expansão acelerada só pode ser observada para objetos muito distantes, pois a influência do termo cosmológico só se faz presente de maneira global, já que essa componente não se aglomera. Por outro lado, a matéria escura é detectada justamente por sua manifestação local, através dos efeitos de sua aglomeração sobre a distribuição de matéria visível, ou sobre a trajetória da luz (no caso das medidas com lentes gravitacionais). Poderiam essas duas propriedades - expansão acelerada e aglomeração da matéria - serem manifestações diferentes de uma mesma componente? Essa é a motivação desta seção: apresentar alguns elementos para uma descrição unificada da matéria escura e da expansão cósmica. Note que essa componente única deveria se comportar de forma completamente diferente em diferentes escalas. Ela deveria ter um efeito gravitacional repulsivo em grandes escalas e se comportar com um fluido sem pressão nas regiões em que a sua aglomeração é maior.

Antes de discutir algumas características gerais desse modelo, vamos fazer uma breve revisão da motivação para o termo cosmológico e do cenário da quintessência

#### A.4.2 Expansão Acelerada e Quintessência

Como vimos na seção A.2.2, o parâmetro de desaceleração do universo é dado por (eqs. A.63 e A.66)

$$q = \frac{4\pi G}{3H^2}(\rho + 3p).$$

Essa parâmetro pode ser determinado pelo diagrama de Hubble, mas a sua influência só aparece para altos desvios para o vermelho. A primeira medida confiável de  $q$ , baseada na observação de supernovas distantes do tipo Ia, foi apresentada em 1998 por dois grupos distintos [14, 15]. Eles chegaram à conclusão de que  $q < 0$ , de modo que deveria haver um termo com  $\rho + 3p < 0$ , que foi associado à constante cosmológica. Os dados das supernovas permitem delimitar uma região no espaço de parâmetros  $\Omega_\Lambda, \Omega_M$  (eq. A.67). Aliadas a outras observações, como a radiação cósmica de fundo [220, 234], ou as velocidades peculiares das galáxias [17], obtêm-se fortes limites sobre cada componente individual (veja a seção 1.1.2).

Um problema da constante cosmológica é a falta de motivação física. Se ela fosse a energia do vácuo medida no efeito Casimir, ela deveria ser  $10^{122}$  vezes maior que o seu valor inferido das observações cosmológicas<sup>15</sup>. O que poderia acontecer é que a energia do vácuo da gravitação (para a qual não há nenhuma estimativa, já que ainda não existe uma teoria quântica da gravitação) cancelasse a energia do vácuo dos outros campos, deixando um pequeno resíduo, que seria a constante cosmológica. No entanto esse cancelamento deveria ser tão preciso como uma parte em  $10^{122}$ ! Uma alternativa à constante cosmológica é dada por um campo escalar.

Como é sabido desde a proposta dos primeiros modelos inflacionários, um campo escalar pode se comportar como um termo cosmológico dinâmico. O tensor energia-momentum de um campo escalar  $\phi$  suposto homogêneo, é igual ao de um fluido perfeito com<sup>16</sup>

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \text{ e} \\ p_\phi &= \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi).\end{aligned}$$

<sup>15</sup>Para uma discussão sobre os valores da constante cosmológica a partir da microfísica, veja a ref. [5], seção 11.6.

<sup>16</sup>Note que, para um campo escalar sem massa nem auto-interação,  $V(\phi) = 0$ , de modo que a sua equação de estado é dada por  $p = \rho$ , como foi mencionado na seção 4.8.

Para  $\dot{\phi}^2 \ll V$ , temos  $p_\phi \simeq -\rho_\phi$ , de modo que o campo  $\phi$  se comporta como uma constante cosmológica.

Sendo um campo escalar, ou uma verdadeira constante cosmológica, ainda há um grande problema a ser resolvido: porque esse termo cosmológico estaria dominando a densidade do universo logo agora? Para uma constante cosmológica, é preciso sintonizar o valor de  $\Lambda$  com grande precisão para que isso ocorra. Da mesma forma, para um campo escalar com um potencial arbitrário é preciso ajustar as condições iniciais de maneira muito fina.

No entanto, existem algumas classes de potenciais em que a densidade do campo  $\phi$  acompanha a densidade da matéria [221], o que explicaria porque  $\Omega_\phi$  e  $\Omega_M$  são comparáveis (essas soluções são chamadas de *tracker solutions*). Isso deu origem a uma enxurrada de modelos ditos de *quintessência*, em que o campo escalar é responsável pelo termo cosmológico (para um excelente artigo de revisão, veja a referência [222]). A grande vantagem desses modelos, é que o mesmo campo que causa a expansão acelerada hoje, poderia ter sido responsável pela inflação [223, 224]. Esses argumentos acabaram tornando muito popular o cenário da *quintessência*, apesar de não haver nenhuma motivação física para os potenciais geralmente considerados e para o próprio campo  $\phi$ . Uma exceção é dada pelo estudo da quintessência em teorias escalar-tensoriais da gravitação [225], onde  $\phi$  tem um papel natural na teoria, embora tampouco haja uma justificativa para a forma do potencial. Uma motivação para  $V(\phi)$  surge da física de partículas [226], mas nesse caso o campo não poderia ser o mesmo que causou a inflação. Outra motivação vinda da física de altas energias para a forma do potencial vem da quebra da super-simetria [227].

Evidentemente nenhuma medida observacional pode determinar diretamente o campo  $\phi$  ou o seu potencial  $V(\phi)$ . O que pode ser determinado é a razão  $w := p/\rho$ , conhecida como *equação de estado cósmica*. Supostamente, a partir do valor de  $w$  em diversos instantes cosmológicos, seria possível reconstruir  $V(\phi)$  [228, 229, 230, 231]. Utilizando os dados das supernovas do tipo Ia [232], combinando-os com estatísticas de lentes gravitacionais [233], ou da radiação cósmica de fundo [234], obtem-se o seguinte limite sobre

a razão  $p/\rho$  hoje:

$$w \lesssim -0.7. \quad (\text{A.79})$$

Esse limite está muito próximo do limite inferior  $w \approx -0.7$  dos modelos mais simples de quintessência [234].

Se campo  $\phi$  está associado à física de altas energias o seu valor deve ser da ordem da massa de Planck [235, 236]. Dessa forma, é preciso incluir os efeitos da super-gravidade. Calculando  $V(\phi)$  num modelo de super-gravidade, para certos parâmetros, ainda é possível encontrar soluções do tipo *tracker* [235, 237]. Nesse caso, obtêm-se valores mais baixos de  $w$ , o que está em melhor acordo com os dados observacionais.

### A.4.3 Equação de Estado Fenomenológica

Modelos com termo cosmológico variável, como a quintessência, são uma alternativa atraente à constante cosmológica  $\Lambda$  para explicar a expansão acelerada. Eles proporcionariam uma solução aos dois problemas<sup>17</sup> associados a  $\Lambda$ : o seu valor tão baixo, porém não nulo e o fato de sua energia ser comparável a densidade da matéria ( $\rho_\phi \sim \rho_M$ ). Outra vantagem do campo  $\phi$  seria a sua possível relação com a inflação e a física de partículas. No entanto, nesses modelos a componente que causa a expansão nada tem a ver com a matéria escura nem com a formação das estruturas em grande escala. Aqui vamos partir de um ponto de vista totalmente diferente: Seria possível que um único fluido pudesse representar a matéria escura e a “quintessência”?

A motivação é puramente fenomenológica: buscar algumas características gerais de uma equação de estado que apresente esses dois comportamentos. Por um lado precisaríamos ter  $\rho + 3p < 0$ , para haver uma repulsão cósmica e por outro lado  $p \simeq 0$ , para que o fluido se comporte como CDM. Obviamente isso seria impossível num universo homogêneo. No entanto, num universo heterogêneo, poderia haver regiões que se com-

---

<sup>17</sup>Na verdade esses problemas acabam escondidos na forma do potencial.

portassem de forma diferente. Em particular, sabemos que há grandes regiões vazias de matéria luminosa, os *voids*. Nas regiões onde há uma maior densidade de matéria, essa componente deveria ter  $p \simeq 0$  e nos *voids*  $p \sim -\rho$ . Se supomos que há uma equação de estado  $p = p(\rho)$ , somos levados a que  $|p|$  seja uma função decrescente de  $\rho$ :  $d|p|/d\rho < 0$ . Como  $p$  é negativo, teremos

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} := c_s^2 \geq 0. \quad (\text{A.80})$$

Essa condição leva naturalmente a que a velocidade do som nesse fluido seja real. Portanto, essa componente é mecanicamente *estável*. Já fluidos que possuem uma equação de estado  $p = w\rho$ , com  $w < 0$  são instáveis [238, 239]. Para manter a causalidade, é preciso que a velocidade do som seja menor do que  $c$ . Dessa forma, deveremos ter

$$0 \leq \frac{\partial p}{\partial \rho} < 1. \quad (\text{A.81})$$

Antes de continuar estudando as propriedades que a equação de estado deve possuir, vale lembrar que a descrição de fluido é bastante genérica e pode ser aplicada a sistemas bem diferentes de um fluido clássico. Como as equações da hidrodinâmica relativística nada mais são do que lei de conservação do tensor energia-momentum,  $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ , a descrição hidrodinâmica também pode ser utilizada em diversos problemas. Um exemplo é dado em modelos de colisões hadrônicas de altas energias [132, 133]. Em algumas situações um tratamento hidrodinâmico pode ser utilizado em vez da descrição em termos de campos fundamentais [134]. Um outro exemplo, que será discutido mais à frente, é dado pela dinâmica de  $d$ -branas. Note que, a partir de um tensor energia-momentum genérico, podemos sempre definir uma pressão dinâmica  $p$  (eq. A.38) e uma densidade de energia  $\rho$  (eq. A.36). Em alguns casos, como para o campo escalar discutido na seção anterior, podemos escolher  $u^\alpha$  tal que o tensor energia-momentum  $T_{\mu\nu}$  tem a forma de um fluido

perfeito:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu - p h_{\mu\nu}. \quad (\text{A.82})$$

Nesse caso a dinâmica será dada pelas equações (A.54) e (A.53):

$$\dot{\rho} = -(\rho + p)\theta, \quad (\text{A.83})$$

$$p_{,\mu} h^{\mu\nu} = (\rho + p) \dot{u}^\nu, \quad (\text{A.84})$$

A suposição extra que estamos fazendo é que existe uma equação de estado  $p = p(\rho)$  (o que não é válido, por exemplo, para um campo escalar).

Da equação (A.84) vemos que a pressão, mesmo sendo negativa, pode continuar sendo uma força restauradora, desde que  $c_s^2 > 0$  e

$$(\rho + p) > 0. \quad (\text{A.85})$$

Assim,  $p_{,\mu} h^{\mu\nu} > 0$  quando houver um gradiente positivo de densidade ( $\rho_{,\mu} h^{\mu\nu} > 0$ ) de modo que essa pressão é capaz de manter estruturas estáveis.

Da equação de Raychaudhuri (A.44), vemos que a expansão pode ser acelerada em alguma região se

$$(\rho + 3p) < 0. \quad (\text{A.86})$$

Exigiremos então que a nossa equação de estado obedeça as relações (A.81) e (A.85) para qualquer valor de  $\rho$  e que possua a propriedade (A.86) para valores suficientemente baixos da densidade. Essas condições implicam em que a pressão deve ser negativa e a densidade de energia positiva, com  $\rho > -p$  (e  $\rho < -3p$  para alguns valores de  $\rho$ ).

À medida que uma região se expande, sua densidade diminui, e como  $dp/d\rho > 0$ , a pressão fica cada vez mais negativa. Pela conservação da energia (A.83) temos que, quando  $p$  se aproxima de  $-\rho$  a sua evolução se torna cada vez mais lenta. A equação de



estado tende assintoticamente a  $p = -\rho$ . Essa propriedade é muito interessante, principalmente num universo heterogêneo, onde as regiões com baixa densidade se aproximam da equação de estado  $p = -\rho$ , enquanto para regiões mais densas temos  $p \sim 0$ . Assim, na média, podemos ter uma equação de estado com  $p = w\rho$ , com  $w$  próximo de  $-1$ . Note que, sempre que a (A.81) é satisfeita com  $p < 0$ , a pressão cruza a reta  $p = -\rho$  e a equação de estado fica congelada nesse ponto.

Em certo sentido, essa propriedade é semelhante às *tracking solutions* já que há uma convergência da equação de estado final independente da forma genérica da equação de estado. Como foi dito, nos modelos simples de quintessência não é possível chegar a  $w \lesssim -0.7$ . Neste modelo, a equação de estado pode ser aproximar de  $w = -1$  dependendo apenas do número de vazios. Aqui fica aparente a importância das estruturas neste modelo. A expansão cósmica só se manifestaria hoje por causa das regiões pouco densas. Quando o universo como um todo era mais compacto, a pressão era quase nula. Portanto é natural que o aspecto repulsivo dessa componente só se manifeste hoje, em que a densidade média já é baixa e onde há grandes regiões quase desprovidas de matéria.

Com os *voids* teriam uma massa gravitacional efetiva negativa em seu interior, é normal que eles sejam amplificados. Nesse modelo o tamanho dos *voids* deveria ser maior do que nos modelos que consideram apenas a CDM. Essa propriedade é muito interessante, já que há um excesso no espectro de potência da matéria em escalas da ordem de  $100h^{-1}Mpc$ , o que significaria que os *voids* são maiores que o esperado [240, 241].

Apesar de alguns efeitos da equação de estado genérica proposta só se manifestarem nas estruturas em grande escala, é interessante ver o seu comportamento num universo homogêneo. Esse seria o modelo cosmológico de fundo num universo dominado por essa componente, que chamaremos de matéria  $x$  de agora em diante.

## Modelo homogêneo

Vamos considerar um universo homogêneo composto unicamente pela matéria  $x$ . A equação da conservação da energia (A.83) fica

$$\frac{da}{a} = -\frac{d\rho_x}{3(\rho_x + p_x)},$$

de modo que

$$a(\rho_x) = C \exp\left(-\int \frac{d\rho_x}{3(\rho_x + p_x)}\right).$$

Para simplificar as equações, podemos escrever  $(\rho_x + p_x)^{-1}$  como  $Af'(\rho_x)/f(\rho_x)$ , de modo que  $f(\rho_x) = Ba^{-3/A}$  onde  $B$  é uma constante de integração que deve ser determinada pelas condições iniciais. Dessa forma teremos

$$\rho_x = f^{-1}(Ba^{-3/A}). \quad (\text{A.87})$$

Se a função  $f$  pode ser invertida analiticamente, obtemos  $\rho_x$  como uma função de  $a$ , que pode ser substituída na equação de Friedmann para obter  $a(t)$ . Alternativamente, podemos calcular  $a(\rho_x)$  e obter  $\rho_x(t)$ . A condição (A.81) fica

$$0 \leq -\frac{ff''}{f'^2} < 1.$$

Vamos considerar, a título de ilustração, uma equação de estado muito simples que obedece às condições (A.80) e (A.85). Ela é dada por uma lei de potência:

$$p_x = -\frac{\alpha^{\sigma+1}}{\rho_x^\sigma}, \quad (\text{A.88})$$

com  $\sigma > 0$  e  $\alpha > 0$ . Essa equação de estado equivale a escolher  $f = (\rho_x/\alpha)^{\sigma+1} - 1$ , e

$A = (1 + \sigma)^{-1}$ . Pela (A.87) teremos

$$\rho_x = \alpha [Ba^{-3(\sigma+1)} + 1]^{1/(\sigma+1)}. \quad (\text{A.89})$$

Note que, para  $a \ll 1$ , temos  $\rho_x \propto a^{-3}$  e o fluido se comporta como matéria escura fria (CDM). Já para  $a \gg 1$ , temos  $\rho = \alpha = \text{const.}$  como no caso de uma constante cosmológica. Os valores de  $\alpha$  e  $\sigma$  devem ser escolhidos de modo que a (A.81) seja satisfeita:

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\alpha^{\sigma+1}\sigma}{\rho_x^{\sigma+1}} < 1. \quad (\text{A.90})$$

O menor valor possível da densidade de energia ocorre para  $p = -\rho$  e é  $\rho = \alpha$ . Assim, devemos ter

$$0 < \sigma < 1.$$

O caso limite  $\sigma = 0$  dá a equação de estado  $p = -\alpha$ , de modo que, pela equação (A.89),  $\rho = \alpha + Ba^{-3}$ . Isso é equivalente a uma superposição de matéria escura fria, com  $\rho \propto a^{-3}$  e  $p = 0$  e constante cosmológica, com  $p = -\rho = -\alpha$  ( $\Lambda = 8\pi G\alpha$ ).

Uma outra equação de estado com propriedades semelhantes foi estudada por Chiba et al. [242], que propuseram a relação linear:

$$p_x = w_0\rho_{x0} + c_s^2(\rho_x - \rho_{x0}). \quad (\text{A.91})$$

Dessa forma  $\rho_x = Ba^{3/(c_s^2-1)} - w_0\rho_{x0} + c_s^2\rho_{x0}$  e o modelo corresponde a uma superposição de uma matéria com equação de estado  $p = c_s^2\rho$  e constante cosmológica  $8\pi G(w_0\rho_{x0} - c_s^2\rho_{x0})$ . Como essa matéria não corresponde necessariamente à matéria escura fria, além da componente  $x$  pode-se superpor a CDM. A intenção dos autores era propor um modelo apenas para a componente repulsiva do universo, num modelo homogêneo. Não entrava aí a diferença de comportamento em diferentes escalas.

Podemos considerar a expressão (A.91) como uma expansão em torno de um certo valor  $\rho_0$  de uma equação de estado genérica  $p = p(\rho)$ :

$$p = p_0 + \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho_0} (\rho - \rho_0) = p_0 + c_{s0}^2 (\rho - \rho_0).$$

No nosso modelo de brinquedo (A.88), teríamos

$$c_{s0}^2 = \sigma \left( \frac{\alpha}{\rho_0} \right)^{\sigma+1} \quad (\text{A.92})$$

$$w_0 = - \left( \frac{\alpha}{\rho_0} \right)^{\sigma+1}. \quad (\text{A.93})$$

Chiba et al. [243] obtiveram limites sobre os valores de  $w_0$  e  $c_{s0}$ . Baseando-se em estatísticas de lentes gravitacionais eles obtiveram:  $\Omega_x \leq 0.85 + (1 - 4c_{s0}^2/3)(1 + w_0)$ . A velocidade do som exerce um grande efeito na radiação cósmica de fundo (RCF). Utilizando os dados da RCF obtem-se  $c_{s0}^2 \simeq 0.1$ ,  $\Omega_x \lesssim 0.1$  [243]. Se o universo é dominado pela componente  $x$  então os dados da RCF levam a  $c_{s0}^2 < 10^{-5}$ . No nosso modelo, a velocidade do som não é constante e diminui com a densidade do universo (eq. A.90), portanto o impacto dessa equação de estado na radiação cósmica de fundo seria muito pequeno. Essa componente se comportaria essencialmente como CDM.

A partir da equação de estado (A.88), podemos encontrar uma expressão analítica simples relacionando a densidade  $\rho_x$  e o fator de escala  $a$  (eq. A.89). Graças a essa relação seria possível estender de forma direta muitos resultados obtidos com equações de estado mais simples. Um exemplo é relação magnitude-desvio para o vermelho, que é um teste fundamental para a equação de estado cósmica. Essa relação pode ser sondada pelas observações de supernovas do tipo Ia. Vários outros testes para a equação de estado cósmica poderiam ser realizados utilizando o modelo (A.88). Assim, poderíamos obter limites observacionais sobre os parâmetros  $\alpha$  e  $\sigma$ .

Na verdade, ao estudar o modelo homogêneo de fundo não estamos investigando a equação de estado propriamente dita, mas uma média em grandes escalas. Se a equação de estado é linear, ela se mantém no processo de fazer a média, ou seja, se  $p = A\rho + B$ ,

essa relação fica  $\bar{p} = A\bar{\rho} + B$ . Ao estudar a relação entre  $\bar{p}$  e  $\bar{\rho}$ , podemos obter as constantes  $A$  e  $B$  da equação de estado original. Já se a equação de estado não é linear, ela não se mantém ao fazer uma média, ou seja:  $\bar{p}(\rho) \neq p(\bar{\rho})$ .

Para pequenas flutuações, como na radiação cósmica de fundo, esse problema não aparece, pois as variações  $\delta\rho/\rho$  são lineares. No entanto, nas estruturas em grande escala, esperamos que haja grandes variações na densidade, de modo a reproduzir o comportamento de um termo cosmológico e da CDM em regiões diferentes.

A separação entre um fundo homogêneo e uma perturbação é importante para a análise das flutuações e sempre pode ser feita. Em termos da evolução temporal, o comportamento dado pela equação de estado média deve ser qualitativamente semelhante ao calculado com a equação de estado original, mas com alguma diferença nos parâmetros. As medidas observacionais não determinariam diretamente os parâmetros da equação de estado real, mas sim da equação de estado média.

Num universo homogêneo, qualquer equação de estado  $p(\rho)$  pode ser associada a um campo escalar com um dado potencial [230]. Dessa forma, apenas medidas da expansão cósmica não são suficientes para distinguir cenários de campos escalares e fluidos com equações de estado exóticas. É preciso estudar as flutuações na CMB e as estruturas em grande escala.

Ao contrário das flutuações na matéria, pode-se mostrar que as perturbações no campo escalar tendem a ser suavizadas [246, 247]. Portanto, o campo escalar não se aglomera e tende a ficar homogêneo. Assim, ele não exerce nenhuma influência sobre a formação de estruturas e sobre os movimentos próprios, a não ser pelo efeito da expansão global. Dessa forma as medidas de  $\Omega_M$  são totalmente independentes das medidas de  $\Omega_\phi$ . Já no nosso modelo, toda a matéria está no fluido  $x$ , de modo que ele contribui tanto para as estruturas quanto para a repulsão cósmica.

As flutuações na CMB podem ser calculadas facilmente usando um modelo linear como a equação (A.91). Isso foi feito por Chiba et al. [243]. O impacto de uma componente com equação de estado genérica na RCF também foi estudado em [244] e [245]. Como foi dito, as flutuações na RCF não devem limitar muito a equação de estado (A.88). O

grande impacto seria mais aparente nas estruturas em grande escala.

## Estruturas em Grande Escala

Como vimos na seção anterior, as condições gerais impostas à equação de estado proposta fazem com que seja possível haver estruturas estáveis compostas pela matéria  $x$ . Nas regiões mais densas, como nos aglomerados de galáxias, essa matéria se comporta como CDM ou um gás ordinário. A pequena pressão residual age na direção contrária ao gradiente de densidade, como num gás normal, de forma a evitar o colapso. Em regiões muito densas a pressão é desprezível e atinge-se o equilíbrio de virial. Já nos *voids* a densidade é muito baixa, de modo que a razão  $p/\rho$  fica dada vez mais negativa, à medida que a densidade diminui. Dessa forma temos  $\rho + 3p < 0$  no interior do *void*. A força gravitacional repulsiva tende a expulsar a matéria, mas a força de pressão, agindo na direção contrária a  $\nabla\rho$  mantém a matéria no *void*. Há um balanço entre a gravitação e a pressão que é diferente das estruturas usuais. Para entender melhor a situação e ter uma idéia um pouco mais quantitativa, poderíamos considerar um modelo simples de *void* com simetria esférica e resolver as equações de Einstein nesse caso.

Para fazer uma simulação computacional com essa matéria é fundamental incluir os efeitos relativísticos da pressão, mesmo se temos baixas velocidades e campos gravitacionais fracos. Para isso, poderíamos utilizar as extensões newtonianas discutidas na seção A.3 e implementá-las numa simulação com a matéria  $x$ . Talvez por isso essas extensões não tenham tido um grande interesse na literatura até agora, já que não havia uma motivação específica para estudar a dinâmica de um fluido com  $|p| \sim \rho$ . A única motivação seriam os fluidos com  $p = -w\rho$  que são instáveis.

### A.4.4 Um Gás de $d$ -Branas Como Fonte da Matéria e Energia Escuras?

Até aqui, a motivação para a equação de estado foi puramente fenomenológica. A escolha (A.88) foi feita apenas por uma questão de simplicidade matemática. Recentemente

Kamenshchik et al. [248] apresentaram um estudo com a equação de estado

$$p = -\frac{2\lambda}{\rho}, \quad (\text{A.94})$$

que seria motivada pelo estudo da dinâmica de  $d$ -branas e é um caso particular da equação (A.88).

Nesse caso, a densidade em função do fator de escala é dada por (eq. A.89)

$$\rho_x = \sqrt{\alpha^2 + B\alpha^2 a^{-6}}.$$

Como vimos na seção anterior, para valores muito pequenos de  $a$ , o fluido se comporta como CDM e para valores muito altos, como constante cosmológica. Já para valores intermediários de  $a$ , temos uma superposição de constante cosmológica com um gás com equação de estado  $p = \rho$ . Podemos ver da expressão (eq. A.89), fazendo uma expansão em  $a$ , que o comportamento da matéria com equação de estado genérica (A.88) é dado por uma superposição de constante cosmológica com um fluido com equação de estado  $p = \sigma\rho$ , como foi discutido em [248]. Voltando ao caso  $\sigma = 1$ , Kamenshchik et al. obtiveram uma solução exata para um universo plano ( $K = 0$ ) e determinaram a forma do potencial de um campo escalar homogêneo que corresponderia a essa equação de estado.

Como foi dito, a motivação para a equação (A.94) viria de um gás de  $d$ -branas. De fato mostrou-se que a teoria de  $d$ -branas em  $(d + 1, 1)$  dimensões é equivalente à dinâmica de fluidos em  $d$  dimensões. Através da parametrização de cone de luz sobre a ação de Nambu-Goto e da solução de alguns vínculos obtêm-se as equações [249, 250]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_i \partial_i v_j = -\frac{\partial_i p}{\rho}, \quad (\text{A.95})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (v_i \rho) = 0, \quad (\text{A.96})$$

$$p = -\frac{2\lambda}{\rho}, \quad v_i = \partial_i \theta, \quad (\text{A.97})$$

onde  $i = 1, d$ . Essas equações representam a dinâmica *newtoniana* irrotacional e isen-

trópica de um gás de Chaplygin, definido pela equação de estado A.94, em  $d$  dimensões espaciais. Essa representação para a dinâmica das  $d$ -branas poderia ter algumas implicações práticas, como na busca de soluções analíticas. Por outro lado, a analogia com a dinâmica de fluidos permite descobrir simetrias escondidas do sistema (A.95 a A.97), por causa da sua origem na ação de Nambu-Goto em uma dimensão superior.

No entanto essa formulação não é apropriada para a cosmologia, pois as equações (A.95 e A.96) representam um fluido newtoniano. Como queremos que  $|p|$  seja da ordem de  $\rho$ , para que haja um efeito de repulsão cósmica, precisamos considerar a pressão relativística. Nesse caso, como foi discutido nas seções A.2.1 e A.3, é preciso considerar os efeitos inerciais da pressão e a equação de Euler não é mais dada pela equação (A.95).

A ação das  $d$ -branas associada ao gás de Chaplygin é invariante de Galileu. Também é possível fazer uma outra parametrização na ação de Nambu-Goto de modo que se obtém uma ação invariante de Poincaré, que é dada pelo modelo de Born-Infeld [249, 250] em  $(d, 1)$  dimensões. Nesse caso perde-se a interpretação de fluido. A ação do gás de Chaplygin pode ser obtida de duas formas a partir da ação de Born-Infeld: por uma transformação de dualidade exata, ou pelo limite não relativístico.

Podemos pensar nas equações (A.95) como um limite de baixas velocidades da uma dinâmica relativística, porém sem supor baixas pressões. Assim, essas equações devem ser comparadas com as equações da dinâmica newtoniana estendida para pressões relativísticas. Nesse caso, a equação de Euler passa a incluir um termo de pressão na inércia (eq. A.74) e a conservação da energia é dada pela equação (A.75). Já a equação de continuidade não muda quando incluímos a pressão relativística.

Poderíamos interpretar a quantidade  $\rho$  como sendo a densidade de massa de repouso  $mn$ , de modo que (A.96) é a equação de continuidade. O denominador do lado direito da equação de Euler (A.95) deve ser associado a  $\rho' + P$ , onde  $\rho'$  representa a densidade de energia<sup>18</sup>. Dessa forma, as equações (A.95 a A.97) descreveriam um fluido com equação

---

<sup>18</sup>Note que no limite newtoniano  $\rho$  é dado simplesmente por  $\rho = mnc^2$ , mas no caso relativístico a energia interna deve ser considerada, de modo que devemos escrever  $\rho = mnc^2 + \varepsilon$ , e as variáveis  $\rho$  e  $n$  não são mais equivalentes.



de estado e densidade de energia dadas por

$$p = -\frac{2\lambda}{mn}, \quad \rho' = mn + \frac{2\lambda}{mn}.$$

No entanto, essas expressões não obedecem à relação termodinâmica (4.10). Não deve ser possível definir novas quantidades de modo que o sistema (A.95 a A.97) possa ser escrito na forma das equações (A.74) e (A.75) que descrevem um gás relativístico no limite newtoniano.

Dessa forma, apesar da dinâmica de  $d$ -branas oferecer uma motivação para a equação de estado (A.94), esse resultado não pode ser aplicado para explicar a expansão acelerada, já que o gás de Chaplygin obedece a equações *newtonianas*, que não incluem o papel relativístico da pressão. O que deveria ser feito é buscar uma representação das  $d$ -branas numa ação de fluido relativístico, como a do capítulo 4, ou pelo menos efetuar um limite apropriado na ação de Born-Infeld.

A dinâmica de um gás de Chaplygin também foi estudada por Fabris et al. [251]. Como a evolução é dada pelas equações newtonianas (A.95 e A.96) eles investigaram a teoria de perturbação newtoniana nesse gás e obtiveram uma solução analítica para o contraste de densidade no caso  $K = 0$ . Eles mostraram que nesse caso não há a instabilidade de Jeans, ao contrário, para  $a \ll 1$  o contraste de densidade cresce como poeira ( $\delta_+ \propto a$ ) para todos os comprimentos de onda. Esse resultado é fácil de ser compreendido, pois apesar da pressão agir como força restauradora, ela é muito baixa para pequenos valores de  $a$ . Para  $a \gg 1$  as oscilações vão sendo amortecidas porque o fluido se comporta como constante cosmológica. Como os próprios autores enfatizaram, solução não perturbada desse modelo é dada por um universo de poeira e não pela solução com a equação de estado (A.94), já que o modelo é newtoniano.

Esses resultados fornecem apenas uma idéia qualitativa, pois o sistema (A.95 a A.97) não é consistente com uma pressão relativística. As perturbações lineares para um fluido com equação de estado (A.94) poderiam ser estudadas utilizando os resultados da seção A.3. Mas elas não representam a dinâmica de  $d$ -branas, que é dada pelas equações

newtonianas (A.95 e A.96).

### A.4.5 Conclusão

O objetivo deste trabalho foi introduzir um modelo que contemple a fenomenologia associada à matéria escura e à repulsão cósmica com uma única componente, modelada por um fluido perfeito. Apresentamos apenas a idéia geral desse modelo e discutimos qualitativamente algumas de suas propriedades. Também fizemos uma breve análise de outros resultados encontrados na literatura.

A idéia básica é que o universo seja composto majoritariamente por uma matéria  $x$ , com pressão negativa. Em regiões de maior densidade, ela se comporta como CDM ( $p = 0$ ). Já em regiões pouco densas, como os *voids*, a intensidade da pressão aumenta relativamente à densidade, de modo que  $\rho_x + 3p_x$  pode ficar negativo. Assim a equação de estado é escolhida de modo que o módulo da pressão seja uma função decrescente da densidade (como na eq. A.88, por exemplo). Com essa condição o fluido é estável, pois  $c_s^2 > 0$ . Outra propriedade é que a função  $p(\rho)$  deve cruzar a curva  $p = -\rho$ , assim as regiões pouco densas tendem assintoticamente a  $p = -\rho = const.$

O comportamento global é semelhante ao do cenário da quintessência: no início, a maior parte da matéria está sob a forma de CDM, depois a energia é dominada por uma componente com  $\rho + 3p < 0$ . Uma diferença fundamental é que neste modelo  $\Omega_x$  teria permanecido essencialmente o mesmo - da radiação cósmica de fundo até agora - enquanto na quintessência a densidade do campo  $\phi$  estaria dominando apenas agora. Nesse modelo há uma transformação efetiva entre a CDM e a componente que causa a repulsão. Além disso, a matéria  $x$  é responsável tanto pela repulsão cósmica, como pela formação de estruturas. A mudança de comportamento dessa matéria hoje ocorre justamente por causa das heterogeneidades. Por isso, é difícil fazer uma separação do tipo solução homogênea + perturbações (e também por causa da não-linearidade da equação de estado). Na verdade, ao estudar um universo homogêneo, estamos analisando uma equação de estado média dessa matéria. Já na época da radiação cósmica de fundo é possível fazer uma análise perturbativa, pois temos pequenas flutuações.

Uma outra propriedade interessante desse modelo é que os *voids* seriam amplificados pela repulsão gravitacional, o que ajudaria a explicar o aparente excesso de vazios.

Como  $\Omega_x$  não muda, em vez de colocar limites sobre  $\Omega_M$  e  $\Omega_\Lambda$ , os dados observacionais colocam limites sobre a forma da equação de estado. Em particular, quando escolhemos uma família específica de equações de estado (como por exemplo a eq. A.88), somos capazes de estabelecer limites para seus parâmetros livres. Os dados da radiação cósmica de fundo e das supernovas do tipo Ia investigam regiões bem diferentes de  $z$ . Eles indicam que, se o universo é dominado pela matéria  $x$ , é preciso que  $c_s$  tenha valores bem diferentes correspondendo a essas duas medidas [243].

A idéia do modelo é essencialmente nova, embora diversos aspectos já tenham sido explorados indiretamente em vários artigos. A expansão linear da equação de estado proposta (eq. A.91), foi estudada por Chiba et al., que investigaram as perturbações na radiação cósmica de fundo e a relação magnitude - desvio para o vermelho [242, 243]. O impacto de uma componente com equação de estado genérica nas flutuações da radiação cósmica de fundo foi calculado por Caldwell [244] e por Hu [245]. Alguns aspectos do modelo de fundo foram estudados por Kamenshchik [248].

O que ninguém investigou até agora foi a possibilidade de uma mesma componente se comportar de forma muito distinta para diferentes valores da densidade local. Essa foi a principal motivação para a idéia apresentada nesta seção e é uma proposta essencialmente original. As propriedades mais interessantes dessa matéria aparecem no regime não-linear e por isso é difícil investigar esse cenário. Para estudar a formação de estruturas nesse modelo, é preciso desenvolver um algoritmo que permita lidar com a evolução não-linear de um fluido com pressão relativística. Foi justamente isso que motivou a discussão da seção A.3.

Muitos resultados obtidos para equações de estado do tipo  $p = w\rho$  poderiam ser facilmente estendidos a uma equação de estado do tipo (A.88), para fazer a comparação com os dados observacionais. Para distinguir claramente o cenário proposto de cenários do tipo quintessência, é imprescindível estudar as flutuações, pois aí o comportamento é totalmente diferente. A análise linear permitirá calcular os possíveis traços da equação

de estado na radiação cósmica de fundo. Também estudaremos um modelo com simetria esférica para investigar o comportamento não-linear, onde devem aparecer os efeitos mais interessantes da equação de estado proposta.

Evidentemente, a abordagem adotada nesta seção é uma descrição *efetiva* em termos de um fluido. Vimos que diversos sistemas podem ser representados por equações de fluido, como por exemplo a dinâmica de  $d$ -branas. Uma vez encontrada a equação de estado, ela poderia servir de motivação para investigar a microfísica, impondo restrições sobre a lagrangiana e o acoplamento dos campos fundamentais que descreveriam essa componente.

Mesmo sem nenhuma motivação para a microfísica, este modelo serve ao menos para testar a “degenerescência cosmológica”, ou seja, até que ponto as observações determinam unívocamente a teoria e os modelos, e até que onde é possível “falsificar” um dado cenário.

## A.5 Teoria de Perturbação e o Limite Newtoniano da Cosmologia Relativística

Como foi discutido na seção 1.2 não é possível estabelecer uma cosmologia puramente newtoniana. É preciso fazer alguns “truques” para contornar a necessidade de condições de fronteira no infinito. Qual seria então a validade de se fazer um tratamento newtoniano? A resposta será dada pelo limite newtoniano da cosmologia relativística. Veremos a seguir que, nesse limite, as equações relativísticas se reduzem às equações da cosmologia newtoniana introduzidas na seção 1.2.

O limite newtoniano corresponde a campos gravitacionais fracos e baixas velocidades. No espaço chato, esse limite é obtido fazendo-se pequenas perturbações na métrica de Minkowski. Já no caso cosmológico faremos perturbações na métrica de Robertson-Walker, que descreve um universo homogêneo e isotrópico. A teoria de perturbação será apresentada num calibre que permite fazer a comparação direta com a cosmologia newtoniana. Aqui mostraremos apenas algumas idéias básicas e alguns resultados, para

uma discussão mais completa e detalhada veja as referências [3] e [252].

O ponto de partida da teoria de perturbação cosmológica é a métrica de Robertson-Walker perturbada,

$$\begin{aligned} ds^2 &= [g_{\mu\nu}^{(0)} + g_{\mu\nu}^{(1)}] dx^\mu dx^\nu \\ &= a^2(\tau) [-d\tau^2 + \gamma_{ij}(\vec{x}) dx^i dx^j + h_{\mu\nu}(\vec{x}, \tau) dx^\mu dx^\nu] , \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

onde  $x^i$  ( $1 \leq i, j \leq 3$ ) são as coordenadas espaciais co-móveis,  $\tau$  é o tempo conforme,  $a(\tau)$  é o fator de escala e  $\gamma_{ij}(\vec{x})$  é a métrica espacial de um espaço homogêneo e isotrópico com curvatura constante. Utilizar o tempo conforme  $\tau$  é mais conveniente para a teoria de perturbação cosmológica, ele está relacionado com o tempo próprio  $t$  medido por um observador co-móvel<sup>19</sup> por  $dt = a(\tau)d\tau$ .

Note que estaremos lidando com pequenas perturbações na *geometria*, em relação a um universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Isso não implica que estaremos trabalhando com pequenas perturbações na *matéria*. De fato, no universo temos estruturas em grande escala não-lineares, cujos campos gravitacionais são fracos.

### A.5.1 Classificação das Perturbações Métricas e Escolha do Calibre

Na teoria de perturbação linear, as perturbações na métrica  $h_{\mu\nu}$  são tratadas como um campo tensorial sobre uma geometria de fundo de Robertson-Walker. Como é uma matriz simétrica  $4 \times 4$ ,  $h_{\mu\nu}$  tem 10 graus de liberdade. Na relatividade geral, podemos fazer transformações genéricas das coordenadas. Assim, 4 desses graus de liberdade podem ser eliminados pela escolha das coordenadas, deixando 6 graus de liberdade físicos. As transformações locais de coordenadas são transformações de calibre na relatividade geral. Um tratamento adequado da teoria de perturbação relativística requer uma separação clara entre os graus de liberdade físicos e os de calibre. Para efetuar essa separação, faremos

---

<sup>19</sup>Aqui denotaremos por co-móvel, um referencial que se move junto com a expansão global, ou seja, que tem coordenadas  $\vec{x}$ , fixas.

uma decomposição escalar-vetorial-tensorial das perturbações. Depois escolheremos um calibre a mostraremos as equações para as perturbações nesse calibre.

Utilizar um dado calibre na relatividade geral, é equivalente a fixar o calibre no eletromagnetismo. Uma escolha usual no eletromagnetismo, é trabalhar no calibre de Coulomb, para o qual a divergência do potencial vetorial é nula. O seu análogo na RG é o calibre de Poisson que será discutido a seguir. No eletromagnetismo, em vez de trabalharmos com os potenciais, podemos utilizar diretamente os campos elétrico e magnético, que são automaticamente invariantes de calibre. O análogo a trabalhar com esses campos, na relatividade geral é utilizar as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl, e a decomposição nos parâmetros dinâmicos e cinemáticos. Essa é a idéia do formalismo de projeção da relatividade geral, que foi discutido na seção A.2.

As perturbações métricas na teoria de perturbação linear foram classificadas por Lifshitz [253]. Ele introduziu a decomposição escalar-tensorial-vetorial, que é baseada numa separação  $3 + 1$  das componentes da métrica, que são escritas da seguinte forma:

$$h_{00} \equiv -2\Psi, \quad h_{0i} \equiv W_i, \quad h_{ij} = 2(-\Phi\gamma_{ij} + S_{ij}) \text{ com } \gamma^{ij}S_{ij} = 0, \quad (\text{A.99})$$

onde,  $\gamma^{ij}$  é a matriz inversa de  $\gamma_{ij}$ . O traço de  $h_{ij}$  foi absorvido em  $\Phi$ , de modo que  $S_{ij}$  tem apenas 5 componentes independentes. Na separação espaço-temporal  $(3 + 1)$ , usamos  $\gamma_{ij}$  (ou  $\gamma^{ij}$ ) para abaixar (ou levantar) os índices espaciais. Por conveniência, as derivadas espaciais serão escritas utilizando a derivada tridimensional covariante  ${}_{;i}$  definida com relação à tri-métrica  $\gamma_{ij}$ . Se  $K = 0$ , podemos escolher coordenadas cartesianas de modo que  $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$  e  ${}_{;i} = ,_i$ .

A decomposição escalar-tensorial-vetorial é baseada na decomposição de um campo vetorial em suas partes longitudinal e transversa. Para qualquer campo vetorial  $W_i(\vec{x})$ , podemos escrever (veja a seção 1.3.4)

$$W_i = W_i^{\parallel} + W_i^{\perp} \quad \text{com} \quad (\text{rot } W^{\parallel})_i = 0 = \text{div } W^{\perp}. \quad (\text{A.100})$$

O rotacional e a divergência são definidos de forma análoga às eqs. (A.26) e (A.27),

utilizando a derivada covariante espacial (por exemplo  $\text{div } W = \gamma^{ij} W_{j;i}$ ).

A decomposição longitudinal-transverso não é unívoca (por exemplo, sempre podemos adicionar uma constante a  $W_i^{\parallel}$ ), mas sempre existe. Essa terminologia origina-se do fato de que no espaço de Fourier  $W_i^{\parallel}$  é paralelo ao vetor de onda, enquanto  $W_i^{\perp}$  é perpendicular a esse vetor. Note que podemos escrever a parte longitudinal como  $W_i^{\parallel} = (\phi_W)_{,i}$ , para algum campo escalar  $\phi_W$ .

Uma decomposição semelhante pode ser efetuada para um tensor de dois índices, mas agora cada índice pode ser longitudinal ou transverso. Para um tensor simétrico, há três possibilidades: os dois índices são longitudinais, um é transverso, ou os dois são transversos. Essas componentes são escritas da seguinte forma:

$$S_{ij} = S_{ij}^{\parallel} + S_{ij}^{\perp} + S_{ij}^T, \quad (\text{A.101})$$

onde

$$(\text{div } S)_i = \gamma^{jk} S_{ij;k} = \gamma^{jk} S_{ij;k}^{\parallel} + \gamma^{jk} S_{ij;k}^{\perp}. \quad (\text{A.102})$$

O primeiro termo na equação (A.102) é um vetor longitudinal enquanto o segundo é um vetor transverso. A divergência de parte duplamente transversa,  $S_{ij}^T$ , é zero. Para um tensor simétrico sem traço, as partes longitudinal e duplamente longitudinal podem ser obtidas a partir do gradientes de um escalar e de um vetor transverso, respectivamente:

$$S_{ij}^{\parallel} = \phi_{S,i;j} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \phi_{S',k;k}, \quad S_{ij}^{\perp} = S_{ij}^{\perp} + S_{j;i}^{\perp}. \quad (\text{A.103})$$

Sob uma transformação infinitesimal de coordenadas  $S_{ij}^{\parallel}$  e  $S_{ij}^{\perp}$  podem mudar, enquanto  $S_{ij}^T$  é invariante [253, 254]. Da mesma forma, as partes transversa e longitudinal de  $W_i = h_{0i}$  são dependentes de calibre.

Agora podemos fazer a separação escalar-tensorial-vetorial dos graus de liberdade da métrica. O *modo tensorial* representa a parte de  $h_{ij}$  que não pode ser obtida a partir dos gradientes de um vetor ou escalar, e é dado por  $S_{ij}^T$ . O modo tensorial é invariante

de calibre e tem dois graus de liberdade, cinco de uma matriz  $3 \times 3$  simétrica sem traço, menos três da condição  $\gamma^{jk} S_{ij,k}^T = \text{div } S^T = 0$ . Fisicamente o modo tensorial representa a radiação gravitacional e os dois graus de liberdade correspondem às duas polarizações. A radiação gravitacional é transversa: uma onda propagando-se na direção  $z$  pode ter apenas as componentes  $h_{xx} - h_{yy}$  e  $h_{xy} = h_{yx}$  não nulas. O modo tensorial  $S_{ij}^T$  se comporta como um campo de spin 2 sob rotações espaciais.

O *modo vetorial* se comporta como um campo de spin 1 sob rotações. Ele corresponde às partes vetoriais transversas de métrica, que aparecem em  $W_i^\perp$  e  $S_{ij}^\perp$ . Cada uma possui dois graus de liberdade. É possível eliminar dois desses graus de liberdade impondo condições de calibre [253, 254]. A escolha mais popular é o calibre síncrono de Lifshitz, para o qual  $W_i^\perp = 0$ . Entretanto, nesse calibre as equações perturbativas na métrica só são válidas para pequenas perturbações na matéria ( $\delta\rho \ll \bar{\rho}$ ). Para estudar a aglomeração não-linear da matéria e o limite newtoniano, é mais conveniente escolher a condição  $S_{ij}^\perp = 0$  [3]. Nos dois casos, há dois graus de liberdade, que correspondem ao gravito-magnetismo. Ele produz efeitos semelhantes aos do eletromagnetismo sobre massas em movimento ou em rotação (precessão de Lense-Thirring).

O *modo escalar* possui spin zero sob rotações espaciais e corresponde fisicamente à gravitação newtoniana com modificações relativísticas. As partes escalares da métrica são dadas por  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $W_i^\parallel$  e  $S_{ij}^\parallel$ . Quaisquer duas funções desse conjunto podem ser eliminadas por uma transformação de calibre. Aqui escolheremos  $W_i^\parallel = S_{ij}^\parallel = 0$ , de modo que as condições de calibre ficam:

$$\text{div } W = 0, \quad \text{div } S = 0.$$

Bertschinger [3] chama essa escolha de *calibre de Poisson*, em analogia com o calibre de Coulomb do eletromagnetismo. As variáveis  $(\Phi, \Psi, W_i^\perp, S_{ij}^T)$  correspondem às variáveis invariantes de calibre introduzidas por Bardeen [178] como combinações lineares das perturbações da métrica em outros calibres.



## A.5.2 Equações de Movimento e Limite Newtoniano

Nas equações de Einstein A.22, o tensor energia-momentum é a fonte para as variáveis da métrica. Para um fluido genérico no referencial de energia (ou referencial de Landau, veja a seção A.2.1) o tensor energia-momentum é dado por

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p) u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta} + \Sigma^{\mu\nu}$$

Definimos a trivelocity por  $v^i := dx^i/d\tau = u^i/u^0$ . A componente  $u^0$  é determinada a partir de  $v^i$  e das perturbações métricas usando a condição de normalização  $u^\mu u_\mu = -1$ . A pressão e a densidade são separadas numa parte homogênea e numa perturbação:

$$\rho(x^i, \tau) = \bar{\rho}(\tau) + \delta\rho(x^i, \tau), \quad p(x^i, \tau) = \bar{p}(\tau) + \delta p(x^i, \tau).$$

Consideraremos velocidades não relativísticas, de modo que podemos desprezar termos quadráticos em  $v$ . As equações de Einstein são linearizadas com relação às perturbações métricas, de modo que também podemos desprezar termos envolvendo produtos de  $v$  com essas perturbações.

A parte não perturbada das equações de Einstein fornece a equação de Friedmann (A.65) e a conservação da energia (A.64) para o fundo de Robertson-Walker. As componentes do tensor de Einstein e do tensor energia-momentum também são decompostas nas suas partes escalares, vetoriais e tensoriais. As equações de Einstein levam às seguintes

equações para as perturbações métricas [3]:

$$G^0_0 : \quad (\nabla^2 + 3K) \Phi - 3\frac{\dot{a}}{a} \left( \dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a} \Psi \right) = 4\pi G a^2 \delta\rho , \quad (\text{A.104})$$

$$G^0_{i,\parallel} : \quad -(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a} \Psi)_{;i} = 4\pi G a^2 [(\rho + p)(v_i + W_i)]_{\parallel} , \quad (\text{A.105})$$

$$G^0_{i,\perp} : \quad (\nabla^2 + 2K) W_i = 16\pi G a^2 [(\rho + p)(v_i + W_i)]_{\perp} , \quad (\text{A.106})$$

$$G^i_i : \quad \ddot{\Phi} - K\Phi + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\Psi} + 2\dot{\Phi}) + \left[ 2\frac{\dot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right] \Psi - \frac{1}{3} \nabla^2(\Phi - \Psi) = 4\pi G a^2 \delta p ,$$

$$G^i_{j\neq i,\parallel} : \quad (\Phi - \Psi)_{;(ij)} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} \nabla^2(\Phi - \Psi) = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\parallel} , \quad (\text{A.107})$$

$$G^i_{j,\perp} : \quad \dot{W}_{(j;i)} + 2\frac{\dot{a}}{a} W_{(j;i)} = -8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\perp} , \quad (\text{A.108})$$

$$G^i_{j,T} : \quad \ddot{S}_{ij} + 2H\dot{S}_{ij} - \nabla^2 S_{ij} + 2K S_{ij} = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,T} , \quad (\text{A.109})$$

onde  $\nabla^2 A_{ij} := A_{ij;k}{}^{;k}$ , e o ponto denota  $\partial/\partial\tau$ . É interessante notar que, no calibre de Poisson, os modos vetoriais e escalares podem ser obtidos diretamente a partir da distribuição instantânea do tensor energia-momentum, sem necessitar nenhuma integração temporal. Isso fica óbvio nas equações acima para as quantidades  $(\Phi - \Psi)$  e  $W_i$ . Apenas o modo tensorial obedece explicitamente uma equação de evolução. Note que, ao obter essas equações não precisamos supor que  $|\delta\rho| \ll \bar{\rho}$ , apenas que poderíamos desprezar todos os termos não-lineares envolvendo perturbações na métrica e na velocidade. Assim, elas são válidas mesmo no regime não-linear.

A conservação do tensor energia-momentum já está embutida nas equações de Einstein (A.104) a (A.109). A parte temporal da equação  $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$  fornece

$$\dot{\rho} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a} - \dot{\phi}\right)(\rho + p) + [(\rho + p)v^i]_{;i} = 0, \quad (\text{A.110})$$

enquanto a parte espacial fica

$$\frac{\partial}{\partial\tau} [(\rho + p)(v_i + W_i)] + 4\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)(v_i + W_i) + p_{;i} + (\text{div } \Sigma)_{;i} + (\rho + p)\Psi_{;i} = 0 . \quad (\text{A.111})$$

Combinando as equações (A.104) e (A.105) obtemos também uma equação instan-

tânea para  $\Phi$ :

$$(\nabla^2 + 3K) \Phi = 4\pi G a^2 \left[ \delta\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}\phi_f \right], \quad -\phi_{f,i} \equiv [(\rho + p)(v_i + W_i)]_{||}. \quad (\text{A.112})$$

O último termo é desprezível para perturbações menores que o raio de Hubble e velocidades não relativísticas. Se a curvatura for muito pequena nas escalas de interesse, podemos desprezar  $K$  na equação para  $\Phi$ . Além disso, todas as derivadas covariantes espaciais viram derivadas ordinárias. Mesmo se o universo não fosse chato (ou seja, se  $K \neq 0$ ) a curvatura só seria apreciável em escalas muito maiores do que as que podemos observar atualmente para estudar as estruturas em grande escala. Nessa situação, a equação (A.112) se reduz à equação de Poisson da cosmologia newtoniana

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho, \quad (\text{A.113})$$

que é idêntica à equação (1.13) obtida na seção 1.2. Note que  $\Phi$  é o potencial gravitacional peculiar, pois representa a perturbação sobre um universo homogêneo. Se a pressão anisotrópica não é relativística, temos  $\Psi = \Phi$ . No limite newtoniano  $\Phi$ ,  $W_i$  e  $S_{ij}$  são muito pequenos, e podem ser desprezados face a  $v_i$  ou  $\dot{a}/a$ . Notando que  $\rho = \rho_0 c^2 + \varepsilon$ , e considerando que  $\rho_0 \gg \varepsilon/c^2$  e  $\rho_0 \gg p/c^2$ , a equação (A.110) leva à equação de continuidade

$$\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + [(1 + \delta) v^i]_{,i} = 0, \quad (\text{A.114})$$

onde  $1 + \delta := \rho_0/\tilde{\rho}_0$ , que é idêntica à equação de continuidade da cosmologia newtoniana<sup>20</sup> (eq. 1.17).

Combinando as equações (A.110) e (A.111) obtemos (sempre desprezando termos

---

<sup>20</sup>Note que, na notação utilizada na cosmologia newtoniana, representamos a densidade de massa por  $\rho$  e não por  $\rho_0$ .

quadráticos em  $v$ ):

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial \tau} + \frac{\dot{a}}{a} \rho_0 v_i + p_{,i} + \rho \Phi_{,i} = 0, \quad (\text{A.115})$$

que é igual à equação de Euler da cosmologia newtoniana (eq. 1.18), exceto pela ausência do termo  $v_j \partial_j v_i$ . Para obter a equação completa, não podemos simplesmente desprezar os termos quadráticos em  $v$  para obter as equações (A.110) e (A.111). No entanto, considerar termos de qualquer potência em  $v$  complicaria muito as equações (A.104) a (A.109). O que deve ser feito é um limite mais cuidadoso, colocando explicitamente as potências de  $c$ , de modo a manter os termos quadráticos que sejam relevantes para a evolução newtoniana, não-linear em  $v$ .

Dessa forma, a partir de perturbações genéricas sobre uma métrica de FLRW, obtemos as equações da cosmologia newtoniana. Isso fornece uma justificativa formal para a cosmologia newtoniana, partindo da relatividade geral e sem nenhum “truque” para tornar o campo gravitacional bem definido.

### A.5.3 Limite Newtoniano da Parte Elétrica do Tensor de Weyl

O fato das perturbações escalares e tensoriais serem determinados instantaneamente, torna o calibre de Poisson particularmente útil para cálculos numéricos. Mas isso significaria uma propagação infinita dos sinais? Não, e há um exemplo bem conhecido disso. No eletromagnetismo, no calibre de Coulomb, o potencial elétrico obedece à equação de Poisson, mas a evolução para o campo elétrico  $E_i$  é causal. A analogia com o eletromagnetismo é discutida em detalhes em [3] e fica aparente quando introduzimos os campos “gravito-elétrico”  $g_i$  e “gravito-magnético”  $H_i$ :

$$g_i := -\Psi_{,i} - \dot{W}_i, \quad H_i = (\text{rot } W)_i.$$

No limite de pequenas distâncias co-móveis comparadas com  $|K|^{-1/2}$  e com o raio de Hubble  $(\dot{a}/a)^{-1}$ , e se a pressão anisotrópica não é relativística, os campos  $g_i$  e  $H_i$  obedecem

a equações análogas às equações de Maxwell.

Bertschinger e Hamilton [219] calcularam as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl no calibre de Poisson, para baixas velocidades e pequenas perturbações métricas. O resultado é

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} D_{ij}(\Psi + \Phi) + \frac{1}{2} \dot{w}_{(i;j)} - \frac{1}{2} (\ddot{S}_{ij} + \nabla^2 S_{ij} - 2K S_{ij}) , \\ H_{ij} &= -\frac{1}{2} H_{(i;j)} + \epsilon_{kl(i} \dot{h}_{j);k}^l . \end{aligned} \quad (\text{A.116})$$

Isso significa que no limite newtoniano  $H_{ij} = 0$  e  $E_{ij} = \Phi_{,i;j} - 1/3 \nabla^2 \Phi$ ? Se por limite newtoniano entendemos  $\Psi = \Phi$  e  $W_i = 0 \equiv S_{ij}$ , a resposta é sim. Nesse caso, como vimos na seção A.2.3, a evolução seria local.

Seria surpreendente se isso ocorresse para condições iniciais genéricas no limite newtoniano. De fato, Bertschinger e Hamilton [219] e Kofman e Pogosyan [82] mostraram que a evolução do campo de maré no limite newtoniano não é local. A razão é que, enquanto podemos desprezar a perturbação vetorial  $W_i$  no limite newtoniano, *o seu gradiente não pode ser desprezado*. Fazer isso violaria o vínculo (A.106), a menos que  $\phi_f$  fosse nulo. No limite newtoniano,  $E_{ij}$  será dado pelo campo de maré, e

$$H_{ij} = -\frac{1}{2} H_{(i;j)} - 2v_k \epsilon^{kl}{}_{(i} E_{j)l} + O(v/c)^2 , \quad (\text{A.117})$$

que é tomada como a definição de  $H_{ij}$  nesse limite [219].

No limite newtoniano desprezamos a radiação gravitacional, mas é preciso incluir termos de primeira ordem na velocidade. Apesar da parte magnética do tensor de Weyl ser calculada incluindo a velocidade (eq. A.41), estamos calculando as suas componentes num calibre em que a trivelocidade não se anula. O segundo termo da (A.117) vem de calcular a equação (A.41) em primeira ordem em  $v/c$  [219] e é análogo à transformação de Lorentz do campo elétrico no campo magnético. Os dois termos nessa expressão são da ordem de  $G\rho v$  e não podem ser desprezados no limite newtoniano.

Na teoria de perturbação linear, para pequenas flutuações na matéria, os modos

escalar, tensorial e vetorial evoluem de forma independente. Dessa forma, os modos vetoriais e tensoriais não produzem perturbações na densidade. Nesse limite, temos  $H_{ij} = 0$ . Já se queremos tratar flutuações não-lineares na densidade, estas induzem modos vetoriais e tensoriais e não podemos desprezar  $H_{ij}$  na evolução de  $E_{ij}$ .

A conclusão é que, se utilizamos o campo gravitacional peculiar  $\phi$  na cosmologia newtoniana, não precisamos nos preocupar com as perturbações vetoriais: a equação de Poisson é suficiente para determinar  $\phi$ . Já se queremos trabalhar diretamente com o campo de maré  $E_{ij}$  e utilizar as equações quase-maxwellianas, é preciso considerar o limite newtoniano de  $H_{ij}$ . A evolução não é local, mas evidentemente podemos buscar *aproximações locais*, que são o assunto dos capítulos 2 e 3. Essas aproximações podem ser baseadas na equação de Poisson (seções 2.3.1, 2.3.2 e 2.73) ou na equação de evolução para  $E_{ij}$  (seção 2.3.4).



# Apêndice B

## Estatística das Flutuações

### Primordiais

Neste apêndice, examinaremos alguns aspectos sobre a estatística das flutuações primordiais. Veremos como surge o espectro de potência  $\sigma_k$  a partir do funcional de probabilidade das perturbações. Mostraremos como é possível gerar uma distribuição  $\delta(\mathbf{x}, t_0)$  a partir de um dado espectro. Esse procedimento é fundamental para fornecer condições iniciais para as simulações computacionais de  $N$ -corpos. Depois discutiremos as distribuições de probabilidades das condições iniciais em um dado ponto. Como as aproximações locais dependem somente das condições iniciais em cada ponto, essas distribuições são fundamentais nas aplicações dessas aproximações, como por exemplo no cálculo da função de massa. Colocamos também uma discussão sobre perturbações não-gaussianas, em particular sobre uma generalização da gaussiana motivada pela estatística não extensiva. Questionamos até que ponto a função de massa consegue limitar a estatística das flutuações primordiais. Finalmente, analisamos o espectro de flutuações na massa a partir do espectro de potência filtrado, o que ajuda a compreender o cálculo da função de massa.



## B.1 Funcionais de Probabilidade

Em princípio, a partir de uma dada perturbação inicial  $\delta(\mathbf{x}, t_0)$  em algum tempo  $t_0$ , podemos calcular a distribuição final de massas. No regime linear a evolução é bem conhecida (veja a seção 1.3). Já no regime não-linear, devemos utilizar simulações numéricas, ou alguma aproximação, como as discutidas no capítulo 2. Para comparar o resultado de um cálculo teórico com o universo observado não é suficiente saber a evolução de uma dada distribuição  $\delta(\mathbf{x}, t_0)$ . Não teria sentido esperar que a teoria reproduza as propriedades de uma galáxia *em particular* localizada numa dada coordenada  $\mathbf{x}$ . Mesmo se os cálculos teóricos não-lineares pudesse ser realizados com enorme precisão, esse tipo de predição iria requerer que o contraste de densidade inicial  $\delta(\mathbf{x}, t_0)$  fosse ajustado de forma muito fina. Evidentemente não podemos saber quais foram as condições iniciais que formaram um determinado objeto. O que podemos investigar são as condições numa época mais remota em *outras* regiões do espaço.

Para comparar essas flutuações primordiais com a estrutura em grande escala observada, é preciso utilizar métodos estatísticos. O mesmo é feito na mecânica estatística, pois não temos informação sobre as condições iniciais. Outra razão para utilizar uma descrição estatística vem da própria origem das perturbações primordiais, que seriam geradas de forma estocástica, por flutuações quânticas no universo primitivo. Essa análise estatística só pode ser feita porque, apesar do universo não ser homogêneo ( $\delta\rho \neq 0$ ), ele parece ser estatisticamente homogêneo. Ou seja, é possível dividir o universo em grandes regiões  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \dots \mathcal{R}_N$  com o mesmo volume, de modo que a distribuição de massa em cada uma dessas regiões seja a mesma, na média, e que tenha as mesmas propriedades estatísticas.

Sejam  $\delta_1(\mathbf{x}), \delta_2(\mathbf{x}) \dots \delta_N(\mathbf{x})$ , as distribuições de matéria em cada uma dessas regiões. Vamos supor que cada região é idêntica, um cubo de tamanho  $L$ , digamos. Podemos utilizar o mesmo sistema de coordenadas nessas regiões, de modo que o ponto  $\mathbf{x}$  corresponde a pontos com as mesmas coordenadas em cada região. As distribuições serão diferentes em cada volume, mas podemos interpretá-las como diferentes realizações de uma mesma variável estocástica  $\delta(\mathbf{x})$ . As propriedades estatísticas podem ser determi-

nadas uma vez que a probabilidade de uma dada distribuição  $\delta(\mathbf{x})$  seja conhecida. Essa probabilidade, denotada por  $P[\delta(\mathbf{x})]$  é um funcional de  $\delta(\mathbf{x})$  e contém a informação completa das propriedades estatísticas da distribuição de matéria.

Para simplificar, podemos pensar no espaço como sendo discretizado em pequenas células, com  $\delta_A$  correspondendo à densidade da célula localizada na coordenada  $\mathbf{x}_A$ . Assim, podemos aproximar uma função randômica  $\delta(\mathbf{x})$  por um grupo grande, porém finito, de variáveis estocásticas  $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\}$ . O funcional de probabilidade  $P[\delta(\mathbf{x})]$  torna-se a distribuição de probabilidade conjunta  $P[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N]$  da ocorrência simultânea dos valores  $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\}$ . A mesma abordagem pode ser feita no espaço de Fourier. Em vez de considerar o funcional  $P[\delta(\mathbf{k})]$ , podemos pensar na função de  $N$  variáveis  $P[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N]$ , onde agora  $\delta_A = \delta(\mathbf{k}_A)$ . Essa discretização do espaço de Fourier aparece naturalmente se a região é limitada por uma região cúbica de tamanho  $L$ , com  $\delta(\mathbf{x})$  se anulando na fronteira (ou utilizando condições de contorno periódicas). A transformada de Fourier torna-se então uma série de Fourier

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{n}} \delta_{\mathbf{n}} \exp(i\mathbf{k}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}), \quad (\text{B.1})$$

onde os valores permitidos de  $\mathbf{k}_{\mathbf{n}}$  são  $[(2\pi n_x/L), (2\pi n_y/L), (2\pi n_z/L)]$ , com  $(n_x, n_y, n_z)$  inteiros. Agora temos um número infinito de variáveis discretas em vez de uma função contínua. Novamente, o funcional de probabilidades pode ser escrito como uma função dessas variáveis  $P[\delta_1, \delta_2, \dots]$ .

Seria muito conveniente se essa probabilidade pudesse ser expressa como o produto de  $N$  distribuições individuais

$$P[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N; t] = \prod_{A=1}^N f_A(\delta_A, t). \quad (\text{B.2})$$

A validade dessa decomposição implicaria em que cada uma das variáveis  $\delta_A$  evolui de forma independente das outras. Se  $\delta_A$  representa a discretização no espaço  $\mathbf{x}$ , é claro que uma decomposição desse tipo é impossível. Mesmo que essa forma fosse postulada

em algum tempo  $t_i$ , a interação gravitacional mútua entre as partículas destruiria essa independência rapidamente. Da expressão (1.32) vemos que, em geral, o valor de  $\delta$  numa dada posição, no tempo  $t$  depende da distribuição em todos os pontos em  $t_0$ ,  $\delta(\mathbf{x}, t_0)$ .

Já no espaço de Fourier, no regime linear, os modos evoluem de forma independente (veja a seção 1.3.2, eq. 1.26). Assim, a decomposição (B.2) em probabilidades independentes pode ser preservada se trabalhamos no espaço dos  $\mathbf{k}$  em vez das posições  $\mathbf{x}$ . Dessa forma, é muito mais fácil lidar com os funcionais de probabilidade no espaço de Fourier. Supondo que a probabilidade pode ser representada pelo produto

$$P[\delta(\mathbf{k}); t] = P[\delta_{\mathbf{k}_1}, \delta_{\mathbf{k}_2}, \dots, \delta_{\mathbf{k}_N}; t] = \prod_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}}, t) \quad (\text{B.3})$$

onde  $\delta_{\mathbf{k}_A}$  é o contraste de densidade correspondente ao modo de Fourier com vetor de onda  $\mathbf{k}_A$ . O problema de determinar o funcional  $P[\delta(\mathbf{k}); t]$  se reduz então determinar a função  $g_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}}, t_i)$  para um tempo pequeno  $t_i$ . Uma vez que essa função é conhecida, podemos calcular  $g_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}}, t)$  num tempo posterior  $t$  seguindo a evolução linear, desde que o modo  $k$  não seja não-linear em  $t$ .

A escolha mais simples de  $g_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}}, t_i)$  é uma gaussiana. Alguns modelos do universo primitivo, como por exemplo o cenário inflacionário usual, produzem esse tipo de distribuição. Um argumento de plausibilidade é o seguinte: Da expressão ?? vemos que  $\delta_{\mathbf{k}}$  é obtido adicionando-se  $\delta(\mathbf{x})$  em vários pontos diferentes. Podemos supor que, no universo muito primitivo, os valores de  $\delta(\mathbf{x})$  não estão correlacionados. Se  $\delta_{\mathbf{k}}$  é a soma de um número muito grande de variáveis não correlacionadas, o teorema do limite central implica em que a distribuição de probabilidade para  $\delta_{\mathbf{k}}$  é gaussiana. No restante desta seção vamos supor que  $g_{\mathbf{k}}$  é uma gaussiana. Uma breve discussão sobre perturbações não gaussianas será desenvolvida na seção B.2.3.

Como  $\delta(\mathbf{x})$  é real, temos que  $\delta_{\mathbf{k}}^* = \delta_{-\mathbf{k}}$ . Se separamos  $\delta_{\mathbf{k}}$  em suas partes real e imaginária,  $\delta_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} + ib_{\mathbf{k}}$  (com  $a_{\mathbf{k}} = a_{-\mathbf{k}}$  e  $b_{\mathbf{k}} = -b_{-\mathbf{k}}$ ), a distribuição de probabilidade

gaussiana para  $\delta_{\mathbf{k}}$  é dada por

$$g_{\mathbf{k}}(a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}; t) da_{\mathbf{k}} db_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi\mu_{\mathbf{k}}^2(t)} \exp\left(-\frac{a_{\mathbf{k}}^2 + b_{\mathbf{k}}^2}{2\mu_{\mathbf{k}}^2(t)}\right) da_{\mathbf{k}} db_{\mathbf{k}},$$

onde  $\mu_{\mathbf{k}}^2(t)$  é a variância em  $a_{\mathbf{k}}$  e  $b_{\mathbf{k}}$ . A distribuição é caracterizada por uma única função,  $\mu_{\mathbf{k}}(t)$ . Se o fundo é homogêneo e isotrópico então  $\mu_{\mathbf{k}}(t)$  só pode depender da magnitude de  $\mathbf{k}$ :  $\mu_{\mathbf{k}}(t) = \mu(|\mathbf{k}|, t) = \mu_k(t)$ .

Escrevendo  $\delta_{\mathbf{k}} = |\delta_{\mathbf{k}}| e^{i\phi_{\mathbf{k}}}$ , podemos expressar a distribuição de probabilidade como uma distribuição para  $|\delta_{\mathbf{k}}|$  e  $\phi_{\mathbf{k}}$ :

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{k}}(|\delta_{\mathbf{k}}|, \phi_{\mathbf{k}}; t) |\delta_{\mathbf{k}}| d|\delta_{\mathbf{k}}| d\phi_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{2\pi\mu_{\mathbf{k}}^2(t)} \exp\left(-\frac{|\delta_{\mathbf{k}}|^2}{2\mu_{\mathbf{k}}^2(t)}\right) |\delta_{\mathbf{k}}| d|\delta_{\mathbf{k}}| d\phi_{\mathbf{k}} \\ &= \frac{d|\delta_{\mathbf{k}}|^2}{\sigma_{\mathbf{k}}^2(t)} \left(\frac{d\phi_{\mathbf{k}}}{2\pi}\right) \exp\left(-\frac{|\delta_{\mathbf{k}}|^2}{\sigma_{\mathbf{k}}^2(t)}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

com  $\sigma_{\mathbf{k}}^2 = 2\mu_{\mathbf{k}}^2$ . Isso mostra que  $\phi_{\mathbf{k}}$  está distribuído uniformemente no intervalo  $(0, 2\pi)$ , enquanto  $|\delta_{\mathbf{k}}|^2$  segue uma distribuição exponencial com  $\sqrt{\langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle} = \sigma_{\mathbf{k}}$ . As fases são totalmente aleatórias no intervalo  $(0, 2\pi)$ . Utilizando esse fato podemos caracterizar a distribuição gaussiana considerando a média

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mathbf{k}}, \delta_{\mathbf{p}}^* \rangle &= \int \int (\delta_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} d|\delta_{\mathbf{k}}| d\phi_{\mathbf{k}}) (\delta_{\mathbf{p}}^* g_{\mathbf{p}} d|\delta_{\mathbf{p}}| d\phi_{\mathbf{p}}) \\ &= \int \frac{d\phi_{\mathbf{k}} d\phi_{\mathbf{p}}}{4\pi^2} e^{i(\phi_{\mathbf{k}} - \phi_{\mathbf{p}})} \int \frac{d|\delta_{\mathbf{k}}|^2 d|\delta_{\mathbf{p}}|^2}{\sigma_{\mathbf{k}}^2 \sigma_{\mathbf{p}}^2} |\delta_{\mathbf{k}}| |\delta_{\mathbf{p}}| \exp\left(-\frac{|\delta_{\mathbf{k}}|^2}{\sigma_{\mathbf{k}}^2(t)} - \frac{|\delta_{\mathbf{p}}|^2}{\sigma_{\mathbf{p}}^2(t)}\right) = \\ &= \eta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \eta_{\mathbf{k}\mathbf{p}} \sigma_{\mathbf{k}}^2, \end{aligned}$$

onde  $\eta_{\mathbf{k}\mathbf{p}}$  é o delta de Kronecker. A distribuição de probabilidade gaussiana pode agora ser completamente especificada pelos seus três primeiros momentos:

$$\langle \delta_{\mathbf{k}}^2 \rangle = 0, \quad \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \sigma_{\mathbf{k}}^2, \quad \langle \delta_{\mathbf{k}}, \delta_{\mathbf{p}}^* \rangle = 0 \quad (\text{para } k \neq p). \quad (\text{B.5})$$

A quantidade  $\sigma_{\mathbf{k}}^2$  é conhecida como *espectro de potência das flutuações* e às vezes é

denotada por  $P_k$ .

A probabilidade para uma dada configuração  $\{\delta_k\}$  é obtida multiplicando-se as probabilidades para cada modo independente. Para modos com  $\mathbf{k}$  positivo teremos:

$$P[\{\delta_k\}; t] = \prod_{k>0}^N g_k(\delta_k, t) = N \exp \sum_{k>0} \left( -\frac{|\delta_k|^2}{\sigma_k^2(t)} \right),$$

onde

$$N = \prod_{k>0}^N \frac{1}{2\pi\sigma_k^2(t)}.$$

Como  $|\delta_k| = |\delta_{-\mathbf{k}}|$  podemos escrever a exponencial em  $P[\{\delta_k\}; t]$  como uma soma para todo  $\mathbf{k}$ :

$$P[\{\delta_k\}; t] = N \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\delta_{\mathbf{k}}|^2}{\sigma_{\mathbf{k}}^2(t)} \right] \quad (\text{B.6})$$

Tendo determinado a forma da distribuição de probabilidade no espaço de Fourier, podemos voltar ao espaço dos  $\mathbf{x}$  utilizando a relação

$$|\delta_{\mathbf{k}}|^2 = \int \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} d^3x d^3y.$$

Substituindo essa expressão na equação B.6, temos

$$\begin{aligned} P[\delta(\mathbf{x}); t] &= N \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \int d^3x d^3y \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{y}) \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\sigma_{\mathbf{k}}^2(t)} \right] = \\ &= N \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \delta(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \delta(\mathbf{y}) \right], \end{aligned}$$

onde

$$F(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\sigma_{\mathbf{k}}^2(t)} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\sigma_{\mathbf{k}}^2(t)} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}.$$

Nessa última igualdade substituímos a soma em  $\mathbf{k}$  pela integral, tomando o limite do contínuo da série de Fourier. A forma de  $P[\delta(\mathbf{x}); t]$  mostra que os valores de  $\delta(\mathbf{x})$  em diferentes pontos não são independentes, ou seja  $P[\delta(\mathbf{x}); t]$  não pode ser escrita como um produto de funções de probabilidade em cada ponto do espaço. Nesse sentido, o espaço dos  $\mathbf{x}$  e o espaço dos  $\mathbf{k}$  diferem significativamente.

Na prática, para calcularmos uma distribuição  $\delta(\mathbf{x})$ , obtemos um conjunto  $\{\delta_{\mathbf{k}}\}$  e em seguida calculamos  $\delta(\mathbf{x})$  pela série de Fourier (B.1). A partir do espectro de potência  $\sigma_k$ , cada  $\delta_{\mathbf{k}}$  é gerado seguindo uma distribuição exponencial em  $|\delta_{\mathbf{k}}|^2$  e com fase aleatória (eq. B.4). Estabelecemos um limite máximo e mínimo para  $k$ : o valor mínimo será dado pelo volume simulado e o máximo será definido pela resolução da simulação.

### Evolução temporal do espectro de potência

O espectro de potência  $\sigma_k$  varia com o tempo. Pela relação (B.5) temos que  $\langle \delta_{\mathbf{k}}^2 \rangle = \sigma_k^2$ , de modo que a evolução temporal de  $\sigma_k$  pode ser determinada pela evolução de  $\delta_{\mathbf{k}}$ . Para modos crescentes num universo de Einstein-de Sitter, considerando perturbações na matéria escura, ou na matéria bariônica com  $k \ll k_J$ , temos  $\delta \propto a(t)$  (veja a seção 1.3.2). Desse modo o comportamento temporal do espectro de potência será dado por

$$\sigma_k \propto a(t). \quad (\text{B.7})$$

## B.2 Distribuição de Probabilidades num Ponto

Na seção anterior, discutimos o funcional de probabilidade para uma distribuição espacial  $\delta(\mathbf{x})$ . Se escolhemos um ponto arbitrário do espaço, podemos pensar na probabilidade do contraste de densidade possuir um dado valor  $\eta$  nesse ponto. Da mesma forma, podemos nos perguntar sobre a probabilidade de que o tensor de deformação assumia certos valores em um ponto.

É possível encontrar essas distribuições de probabilidade a partir da distribuição de  $\delta_k$ . Por exemplo, no caso do contraste de densidade, bastaria fazer uma integral funcional

sobre todas as funções que tem o valor  $\eta$  nesse ponto, pesadas pela probabilidade de cada função  $\delta(\mathbf{x})$ . Esse cálculo é um pouco trabalhoso e nós mostraremos apenas os resultados nesta seção. Na próxima subseção vamos obter a distribuição de  $\eta$  de uma forma mais simples, que se aplica quando a distribuição para  $\delta_k$  é gaussiana. Depois veremos como é a distribuição de  $\Psi_{i,j}$ . Finalmente faremos uma breve discussão sobre flutuações não-gaussianas, em particular sobre distribuições  $q$ -gaussianas.

### B.2.1 Distribuição de Probabilidade para o Contraste de Densidade

O valor do contraste de densidade  $\delta(\mathbf{x})$  num dado ponto  $\mathbf{x}$  é também uma variável estocástica. Podemos então nos questionar sobre a probabilidade dessa variável ter um dado valor  $\eta$ . Como

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

é uma soma de muitas variáveis estocásticas, cada uma sendo gaussiana e com média nula, a soma também será uma variável gaussiana com média igual a zero. Então a distribuição de probabilidade para  $\nu$  será

$$P(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\Delta^2}\right). \quad (\text{B.8})$$

A dispersão  $\Delta^2 = \langle \eta^2 \rangle = \langle \delta^2(\mathbf{x}) \rangle$  pode ser calculada utilizando a B.5:

$$\begin{aligned} \langle \delta^2(\mathbf{x}) \rangle &= \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \langle \delta_{\mathbf{k}}, \delta_{\mathbf{p}}^* \rangle e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}} \sigma_{\mathbf{k}}^2 = \\ &= \frac{1}{V(2\pi)^3} \int d^3k \sigma_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{V2\pi^2} \int_0^\infty \sigma_{\mathbf{k}}^2 k^2 dk. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

A distribuição de  $\eta = \delta(\mathbf{x})$  mostra que o contraste de densidade em qualquer ponto pode ter flutuações com amplitude  $\pm\Delta$ , enquanto flutuações muito maiores são pouco prováveis.

Num universo de Einstein-de Sitter, como  $\sigma_k \propto a(t)$  (eq. B.7) teremos, pela expressão (B.9):

$$\Delta(t) \propto a(t). \quad (\text{B.10})$$

## B.2.2 Distribuição dos Autovalores do Tensor de Deformação

Da mesma forma que nos questionamos sobre a probabilidade de obter um dado valor de  $\delta$  num ponto, podemos nos perguntar qual seria a probabilidade de obter certos valores das componentes do tensor de deformação num ponto qualquer. Como queremos obter essa distribuição em termos do espectro de  $\delta$ , devemos escrever a transformada de Fourier de<sup>1</sup>  $\Psi_{i,j}$  em termos de  $\delta_k$ . Essa expressão é dada pela equação (3.83):

$$\Psi_{i,j}(\vec{k}) = -\frac{k_i k_j}{k^2} \delta_k. \quad (\text{B.11})$$

Para determinar a probabilidade de encontrar valores dados de  $\Psi_{i,j}$  num ponto  $\mathbf{x}$ , é preciso fazer uma integral funcional sobre todas as funções  $\Psi_{i,j}(\mathbf{y})$  que têm esses valores em  $\mathbf{x}$ . Esse cálculo é trabalhoso, mas razoavelmente direto. O resultado é simplificado se notamos que, pela isotropia, qualquer direção dos autovetores de  $\Psi_{i,j}$  é igualmente provável. Assim, podemos mostrar apenas a distribuição de probabilidades dos seus autovalores  $\lambda_i$ :

$$P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{675\sqrt{5}}{8\pi\Delta^6} \exp\left(-\frac{3s_1^2}{\Delta^2} + \frac{15s_2}{2\Delta^2}\right) (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3), \quad (\text{B.12})$$

onde  $s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ,  $s_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$  e  $\Delta$  é dado pela (B.9). Essa distribuição foi obtida primeiramente por Doroshkevich [100].

Da forma de  $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  podemos ver que os  $\lambda_i$  são correlacionados, já que não podemos escrever a probabilidade de termos um conjunto  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  como o produto

---

<sup>1</sup>O tensor de deformação é dado em termos de  $\Psi_{i,j}$  pela relação  $J_{ij} := \partial x_i / \partial q^j = \delta_{ij} + \Psi_{ij}$  (eqs. 2.24 e 2.25).



das probabilidades de cada  $\lambda_i$ . Em particular, a probabilidade de termos dois autovalores  $\lambda_i$  iguais é menor do que para uma distribuição aleatória.

Como vimos na seção 2.3.4, no regime linear e para modos crescentes, fornecer o conjunto  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  é equivalente a dar  $\delta$  e os autovalores de  $E_{ij}$ , ou  $\theta$  e os autovalores de  $\sigma_{ij}$ . Se escrevermos a expressão (B.12) em termos de  $\delta, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  (definidos pela eq. 2.117), teremos duas distribuições independentes: uma para  $\delta$  e outra para a dupla  $(\sigma_2, \sigma_3)$ . A distribuição de probabilidades nessas variáveis é:

$$P(\delta, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{\Delta^3} P_\nu \left( \frac{\delta}{\Delta} \right) P_{\mu_1, \mu_2} \left( \frac{\sigma_2}{\Delta}, \frac{\sigma_3}{\Delta} \right), \quad (\text{B.13})$$

$$P_\nu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\nu^2/2}, \quad (\text{B.14})$$

$$P_{\mu_1, \mu_2} = \frac{675}{4\Delta^6} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} e^{-\frac{15s}{2}(\mu_2^2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3^2)} (\mu_2 + 2\mu_3) (\mu_3 + 2\mu_2) (\mu_2 - \mu_3), \quad (\text{B.15})$$

onde  $\nu = \delta/\Delta$  e  $\mu_i = \sigma_i/\Delta$ . Essa distribuição de probabilidades foi utilizada por Monaco [85], que estendeu o formalismo de Press-Schechter (PS) para calcular a função de massa com modelos de colapso não esférico (veja a seção 3.3.3). A mesma expressão foi utilizada por Audit et al. [81] para calcular a função de massa na DTA e por Lee e Shandarin [99], para obtê-la na aproximação de Zel'dovich.

Evidentemente, integrando a expressão (B.13) em  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  obtemos a distribuição de probabilidades de  $\delta$  (eq. B.8 ou B.14).

### Distribuição de probabilidades em termos de $\varepsilon_0$ e $\alpha_0$

Podemos transformar a distribuição  $P_{\mu_2, \mu_3}$  (eq. B.15) para as variáveis  $\varepsilon_0$  e  $\alpha_0$  utilizando a equação (2.117):

$$\begin{aligned} \mu_2 &= -\frac{2}{3}\chi \cos\left(\frac{\alpha - 2\pi}{3}\right), \\ \mu_3 &= -\frac{2}{3}\chi \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), \end{aligned}$$

onde  $\chi = \varepsilon_0/\Delta$ . Substituindo essa transformação no expoente de  $P_{\mu_2, \mu_3}$  e no produto, obtemos:

$$\begin{aligned}\mu_2^2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3^2 &= \frac{1}{3}\chi^2, \\ (2\mu_2 + \mu_3)(2\mu_3 + \mu_2)(\mu_2 - \mu_3) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\chi^3 \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left[ \cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right].\end{aligned}$$

O jacobiano da transformação de  $(\mu_2, \mu_3)$  para  $(\chi, \alpha)$  é<sup>2</sup>

$$\left| \frac{\partial(\mu_2, \mu_3)}{\partial(\chi, \alpha)} \right| = -\frac{2}{9\sqrt{3}}\chi.$$

Assim,  $P(\chi, \alpha)$  pode ser escrito como o produto de duas distribuições individuais para  $\chi$  e  $\alpha$ .

$$P_\chi = \frac{50}{3} \sqrt{\frac{5}{2\pi}} e^{-\frac{5}{2}\chi^2} \chi^4, \quad (\text{B.16})$$

$$P_\alpha = \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left[ \cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \frac{1}{3}\sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right] = \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right) \left[ \frac{3}{2} - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right]. \quad (\text{B.17})$$

Dessa forma, a distribuição conjunta de probabilidades para  $\delta$ ,  $\varepsilon$  e  $\alpha$  é dada por

$$P(\delta, \varepsilon, \alpha) = P_\nu(\delta) P_\chi(\varepsilon) P_\alpha(\alpha).$$

Algumas conseqüências dessa distribuição são discutidas na seção 3.3.3 (veja também as figuras 3-6 a 3-8).

As equações (B.16) e (B.17) determinam a distribuição dos autovalores do tensor de maré  $E_{ij}$ . Quando temos uma distribuição  $\delta(\mathbf{x})$  em todos os pontos, não tem sentido introduzir uma outra distribuição probabilista  $E_{ij}(\mathbf{x})$  para o campo de maré. As flutuações na densidade já determinam  $E_{ij}(\mathbf{x})$ : a partir de  $\delta(\mathbf{x})$  obtemos o potencial gravitacional  $\phi$  (resolvendo a equação de Poisson) e, pela derivada segunda, calculamos

---

<sup>2</sup>Note que o sinal negativo aparece pois integrávamos para valores negativos de  $\mu_3$ , enquanto agora  $\chi$  é maior do que zero.

$E_{ij}(\mathbf{x})$ . Entretanto, se pensamos na probabilidade de obter um dado valor de  $\delta$  em um ponto, também podemos pensar na probabilidade de obter um certo valor de  $E_{ij}$  nesse mesmo ponto. Note que sabendo  $\delta$  num ponto não podemos calcular o campo de maré nesse ponto. Tem sentido perguntar-se sobre a probabilidade de obter o conjunto  $\{\delta, E_{ij}\}$  em cada ponto. É justamente nesse ponto de vista que estamos interessados para obter certas propriedades estatísticas a partir das aproximações locais.

### B.2.3 Funções Renormalizáveis e Flutuações Não Gaussianas

Nas seções B.2.1 e B.2.2 mostramos a probabilidade de encontrar valores de  $\delta$ ,  $\varepsilon$  e  $\alpha$ , num ponto qualquer do espaço. Essas distribuições foram obtidas supondo flutuações primordiais *gaussianas*, dadas pela equação (B.4). Para chegar nessa expressão foram feitas três suposições:

- Separação entre os modos no espaço de Fourier, de forma que  $P[\delta(\mathbf{k})] = \prod_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}})$ ;
- A distribuição  $g_{\mathbf{k}}$  depende apenas do módulo de  $\mathbf{k}$ , de modo que as fases de  $\delta_{\mathbf{k}}$  são aleatórias;
- A distribuição de  $\delta_{\mathbf{k}}$  é gaussiana.

A primeira é fundamentada no fato de que os modos lineares evoluem de forma independente no espaço  $\mathbf{k}$ . A segunda vem da isotropia e homogeneidade. Já a terceira supõe que os valores de  $\delta(\mathbf{x})$  não estão correlacionados no universo primitivo. Essa hipótese está em acordo com o modelo inflacionário. Entretanto, em outros cenários para a geração de flutuações primordiais, como no caso dos defeitos topológicos, há uma correlação, de modo que as flutuações *não são gaussianas*.

Seria importante obter os resultados das seções B.2.1 e B.2.2 para distribuições não gaussianas. A partir da distribuição de  $\delta$  é possível calcular a função de massa no formalismo de PS. Com a distribuição completa para  $\delta$ ,  $\varepsilon$  e  $\alpha$ , podemos calcular essa função nas aproximações locais (veja a seção 3.3.3). Como a função de massa depende da estatística e do espectro das perturbações, argumenta-se que o confronto entre as medidas

observacionais e teóricas colocaria limites sobre a distribuição das flutuações primordiais. É portanto fundamental calcular explicitamente a função de massa para flutuações não-gaussianas para verificar essa hipótese.

Em geral, para calcular a função de massa em distribuições não gaussianas, parte-se diretamente de uma expressão dada para  $P(\delta)$  [89, 104, 90]. No entanto, seria mais fundamental partir de uma distribuição para  $g_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}})$ , pois é realmente ela quem determina as flutuações primordiais. Além disso, a partir dessa função, também seria possível calcular  $P(\delta, \varepsilon, \alpha)$ . Isso não pode ser feito a partir de um *Ansatz* para  $P(\delta)$  e já seria demais colocar três funções arbitrárias diferentes. Além disso, sempre se pode argumentar que *alguma* distribuição  $g_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}})$  levará a essa expressão de  $P(\delta)$ . Já as três distribuições para  $\delta$ ,  $\varepsilon$  e  $\alpha$  devem ser obtidas de forma consistente.

Como foi mencionado anteriormente, para obter essas distribuições é preciso fazer integrações funcionais. Entretanto, são pouquíssimos os funcionais que admitem uma integral analítica. Para ser mais preciso, até muito recentemente, supunha-se que apenas funcionais gaussianos e funcionais delta de Dirac possuíam uma integral analítica. Recentemente mostrou-se uma  $q$ -gaussiana também pode ser integrada analiticamente [255], devido à sua propriedade de renormalizabilidade.

A  $q$ -gaussiana é definida por

$$\exp_q(-x^2) := [1 - (1 - q)x^2]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (\text{B.18})$$

Essa função surgiu no contexto da estatística não extensiva e tem inúmeras aplicações (para uma revisão, veja a referência [256]). Uma motivação para utilizar uma distribuição desse tipo é que num plasma, como era o universo primordial, *há* correlações e a distribuição é melhor descrita por uma função do tipo (B.18). Mesmo se não houvesse uma motivação física para essa expressão, é interessante ver até que ponto a função de massa consegue distinguir entre diferentes estatísticas das flutuações primordiais.

Vamos ver agora o que é essa propriedade de renormalizabilidade. Se temos uma expressão do tipo  $\exp_q(-a_1|x_1|^{z_1} - a_2|x_2|^{z_2})$  e eliminamos um grau de liberdade através

de uma integração, obtemos uma mesma expressão funcional, com constantes renormalizadas [255]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \exp_q(-a_1 |x_1|^{z_1} - a_2 |x_2|^{z_2}) = A_2 \exp_{q'}(-a'_1 |x_1|^{z_1})$$

onde

$$\frac{1}{1-q'} = \frac{1}{1-q} + \frac{1}{z_2}, \quad a'_1(1-q') = a_1(1-q) \quad (\text{B.19})$$

e

$$A_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp_q(-a_2 |\xi|^{z_2}) = \frac{2\Gamma\left(1 + \frac{1}{z_2}\right)}{a_2^{1/z_2}} \times \begin{cases} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1-q}\right)}{(1-q)^{1/z_2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{1-q}\right)} & \text{para } q < 1 \\ 1 & \text{para } q = 1 \\ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{1}{z_2}\right)}{(q-1)^{1/z_2} \Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} & \text{para } q > 1 \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Essa renormalização é exata para  $N$  graus de liberdade, com o expoente da  $q$ -exponencial dado por  $\sum_{i=1}^N a_i |x_i|^{z_i}$ . Nesse caso, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_N \exp_q\left(-\sum_{i=1}^N a_i |x_i|^{z_i}\right) = A_N \exp_{q'}\left(-\sum_{i=1}^{N-1} a'_i |x_i|^{z_i}\right),$$

onde  $q'$  e  $A_N$  são dados pelas equações (B.19) e (B.20), com  $z_N$  e  $a_N$  substituindo  $z_2$  e  $a_2$ . Os  $a'_i$  são obtidos pela relação  $a'_i(1-q') = a_i(1-q)$ .

A funcional  $q$ -gaussiana é dada pela expressão  $\exp_q\left(-\sum_{i=1}^N a_i |x_i|^{z_i}\right)$  quando  $z_i = 2$  e a soma envolve infinitos graus de liberdade. Mendes e Tsallis [255] mostraram que, nesse caso, a relação de recorrência B.19, converge para  $q = 1$ .

Como sabemos calcular a integral

$$\int \mathcal{D}f \exp(-G[f]), \quad \text{onde} \quad G[f] = \int dx f(x),$$

também é possível calcular

$$\int \mathcal{D} f \exp_q(-G[f]),$$

e, pela discussão acima, o resultado deve ser o mesmo que com  $q = 1$ .

Substituindo a distribuição (B.6) por uma  $q$ -gaussiana

$$P[\delta_{\mathbf{k}}] = N \exp_q \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{|\delta_{\mathbf{k}}|^2}{\sigma_k^2} \right]$$

podemos obter  $P(\delta)$  e  $P(\delta, \varepsilon, \alpha)$ . Esse cálculo deve ser efetuado cuidadosamente mas, baseados nos resultados acima, conjecturamos que a distribuição será a mesma que no caso gaussiano, com a mesma função  $\sigma_k$ . Isso significaria que, ao contrário do que é disseminado na literatura, a função de massa *não* é um bom teste para a estatística das flutuações primordiais. As distribuições  $P(\delta)$  ou mesmo  $P(\delta, \varepsilon, \alpha)$  contêm menos informação do que o funcional  $P[\delta_{\mathbf{k}}]$ . A informação que é mantida nessas distribuições é o espectro  $\sigma_k$ , *mas não necessariamente a forma funcional das flutuações*. Dessa forma, a função de massa permite discernir entre diferentes espectros de uma mesma estatística, mas não entre estatísticas diferentes. Pelo menos ela não distingue entre diferentes  $P[\delta_{\mathbf{k}}]$  que convergem para uma distribuição gaussiana ao eliminar graus de liberdade.

### B.3 Função Filtro e Flutuações na Massa

Se  $\delta(\mathbf{x})$  é uma variável gaussiana, qualquer outra função linear de  $\delta$  será também uma variável gaussiana. Um exemplo é o excesso de massa contido num esfera de raio  $R$ , centralizada em um ponto  $\mathbf{x}$ :

$$\delta M_R(\mathbf{x}) := \bar{\rho} \int_{|\mathbf{y}| < R} \delta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) d^3 y = \bar{\rho} \int_{\text{todo } \mathbf{y}} \delta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \Theta(R - |\mathbf{y}|) d^3 y,$$

onde  $\Theta$  é a função degrau. É conveniente generalizar essa definição para um núcleo (*Kernel*) qualquer

$$\delta M_R(\mathbf{x}) := \bar{\rho} \int \delta(\mathbf{x} + \mathbf{y}) W_R(\mathbf{y}) d^3 y,$$

onde a função janela  $W_R(\mathbf{y})$  deve ter as seguintes propriedades  $W_R(\mathbf{y}) \cong 1$  para  $|\mathbf{y}| < R$  e  $W_R(\mathbf{y}) \cong 0$  para  $|\mathbf{y}| > R$ . Essa função, sendo regular em  $|\mathbf{y}| = R$ , é uma versão suavizada da função degrau, e tem propriedades matemáticas mais agradáveis. Um exemplo é a função gaussiana

$$W_R(\mathbf{y}) = \exp\left(-\frac{y^2}{2R^2}\right).$$

O efeito da função janela é fazer uma média das flutuações  $\delta(\mathbf{x})$  em escalas menores do que  $R$ . Isso pode ser visto na transformada de Fourier de  $\delta M_R$

$$\delta M_R(\mathbf{k}) = \bar{\rho} W(\mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}} = (2\pi)^{3/2} R^3 \delta_{\mathbf{k}} \exp\left(-\frac{k^2 R^2}{2}\right),$$

onde escolhemos uma gaussiana para  $W(\mathbf{k})$ . A amplitude  $\delta_{\mathbf{k}}$  para  $k \gg R^{-1}$  (ou seja, para comprimentos de onda  $\lambda \ll R$ ) é amortecida exponencialmente pela suavização.

A dispersão no excesso de massa relativo ( $\delta M_R/M_R$ ) pode ser calculada como na seção B.2.1 (eq. B.9). Para isso devemos definir a massa  $M_R$  dentro de uma esfera de raio  $R$  na ausência da perturbação. Quando  $W_R(x) = \Theta(R - x)$ , a massa contida no raio  $R$  é simplesmente  $(4\pi/3) R^3 \bar{\rho}$ . Para uma função janela gaussiana, essa noção não é definida tão claramente. Uma escolha para a massa média varrida pela janela gaussiana seria

$$M_R := \int d^3 y \bar{\rho} W(\mathbf{y}) = (2\pi)^{3/2} R^3 \bar{\rho} = V_w \bar{\rho},$$

onde  $V_w$  é o “volume efetivo” da gaussiana. Com essa definição, a transformada de

Fourier de  $(\delta M_R/M_R)$  fica

$$\left(\frac{\delta M}{M}\right)_R = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\delta_k W_k}{V_w}\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

Da mesma forma que na equação B.9 escrevemos a variância de  $(\delta M_R/M_R)$  em termos de suas componentes de Fourier

$$\begin{aligned} \Delta_R^2 & : = \left\langle \left(\frac{\delta M}{M}\right)_R^2 \right\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{W_p W_k}{V_w^2}\right) \langle \delta_p \delta_k^* \rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \\ & = \frac{1}{V_w^2} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} W_k^2 k^2 \sigma_k^2. \end{aligned} \tag{B.21}$$

É essa variância filtrada que é utilizada no cálculo da função de massa.





# Apêndice C

## Expansão do Universo em Escala Local

### C.1 Motivação

Uma das descobertas mais surpreendentes do século XX foi a expansão do universo. O próprio Einstein, criador da relatividade geral, teoria que fundamenta a cosmologia moderna, não esperava que o Universo fosse dinâmico. No entanto, desde os primeiros resultados de Hubble até a miríade de dados observacionais contemporâneos, tudo mostra que as galáxias estão realmente se afastando de nós e que o universo foi muito mais denso e quente no passado.

Surge aí uma questão fundamental: que escalas participam da expansão cósmica? Apenas os objetos distantes se afastam de nós, ou a matéria em escala local também está em expansão? O sistema Solar, a Terra ou mesmo as pessoas se expandem?

É interessante notar que, apesar dessa discussão ser fundamental para compreender o universo e remontar aos primórdios da cosmologia moderna, até agora não houve um consenso sobre a interpretação da expansão cósmica. Há essencialmente duas visões em jogo: a expansão seria um fenômeno global, atingindo todas as escalas, ou se resumiria um afastamento dos objetos distantes. Na primeira interpretação o universo seria como um balão de borracha sendo inflado. Os objetos se expandem como se fossem pintas nesse

balão. No segundo ponto de vista, a expansão seria apenas uma questão de condições iniciais. A matéria que foi se condensando, formando estruturas ligadas, não está em expansão. Já em grandes escalas os objetos se afastam.

Uma forma prática de discutir essas questões consiste na determinação das órbitas de planetas em torno de uma estrela, num universo em expansão. Ao resolver esse problema poder-se-á ver se existe algum efeito da expansão em escala local. Evidentemente, uma expansão global agindo em todas as escalas seria um fenômeno relativístico, oriundo da “expansão do espaço-tempo”. Dessa forma os estudos sobre esse problema se baseiam na relatividade geral, ou em teorias alternativas da gravitação. Para calcular as órbitas dos planetas, bastaria determinar a métrica gerada por um corpo pontual num universo em expansão. Há três abordagens tradicionais para esse problema: os modelos do tipo “queijo suíço”, a “embutidura” de métricas em cosmologia e o estudo dinâmico de partículas num universo em expansão. Vamos discutir essas abordagens mais detalhadamente a seguir.

### **O modelo do queijo suíço**

Einstein e Strauss [257] investigaram o problema da junção entre as métricas de Schwarzschild e Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Eles consideraram um universo homogêneo com uma cavidade esférica desprovida de matéria, em cujo centro há uma estrela. A junção das duas métricas é sempre possível, desde que a massa da estrela seja a mesma que a massa que estaria contida na cavidade se o universo fosse homogêneo. Como a massa pontual não perturba o resto do universo, é possível colocar um número arbitrário dessas cavidades (desde que não haja interseções). Esse é o modelo do queijo-suíço. Como dentro da cavidade a métrica continua sendo Schwarzschild, eles chegaram à conclusão de que não há nenhuma influência da expansão do universo nas órbitas dos planetas e em nenhuma escala local.

Ao desenvolver esse trabalho, Einstein e Strauss não tinham conhecimento do teorema de Birkhoff. Por esse teorema, qualquer métrica com simetria esférica no vácuo, é dada pela solução de Schwarzschild. Assim, se fazemos uma cavidade esférica de tamanho arbitrário num universo homogêneo e isotrópico e colocamos em seu centro uma estrela,

a métrica da cavidade continuará sendo Schwarzschild. Desse modo não há nenhuma influência da expansão dentro da cavidade, mesmo se a métrica exterior não é mais dada pela solução de Friedmann-Robertson-Walker.

Um trabalho semelhante ao de Einstein, mas utilizando outras condições de junção, foi desenvolvido por Gilbert [258], que chegou à mesma conclusão quanto à ausência de efeitos da expansão. A idéia de fazer junções com a métrica de um universo homogêneo foi estendida para outras soluções, como por exemplo para uma estrela em rotação [259].

O resultado de que a solução dentro de cavidades esféricas não é afetada pela matéria exterior é análogo ao teorema de Gauss para a gravitação de Newton. Assim, poderíamos esperar que, como no caso newtoniano, o mesmo resultado fosse válido nas simetrias plana e cilíndrica na relatividade geral. No entanto, mostrou-se que não é possível fazer um modelo como o de Einstein e Strauss para a simetria cilíndrica [260].

### **Embutindo uma métrica em cosmologia**

Outra forma de abordar o problema consiste em procurar uma métrica que faça uma transição suave entre uma solução cosmológica e uma solução tipo Schwarzschild. A primeira proposta nesse sentido foi feita por McVittie [261], que obteve uma métrica que tende à solução de Schwarzschild para pequenas distâncias e à solução de FRW a grandes distâncias.

Noerdlinger e Petrosian [262] calcularam as órbitas na métrica de McVittie. Eles concluíram que existe uma pequena expansão dos sistemas gravitacionalmente ligados, que é proporcional à razão entre a densidade média do Universo e a densidade média do sistema. A métrica de McVittie tem o comportamento assintótico desejado e se reduz às soluções corretas em casos particulares: fazendo  $M_{\text{estrela}} = 0$  ela leva à solução de FRW e escolhendo  $\rho_{\text{universo}} = 0$  obtem-se a solução Schwarzschild. No entanto, no caso genérico ela possui regiões em que o comportamento não é fisicamente aceitável [263].

Em vez de procurar uma métrica que tenha as características desejadas e ver que distribuição de matéria ela representa, deveríamos buscar uma solução das equações de Einstein a partir de uma dada distribuição de matéria. Uma solução exata pode ser

obtida no caso de um universo de poeira (composto por um fluido com  $p = 0$ ). A solução genérica com simetria esférica é dada pela métrica de Lemaître-Tolman-Bondi, discutida na seção 4.3.2. Nesse caso, basta considerar uma massa pontual num universo em expansão. Uma solução equivalente foi obtida por Gautreau [264, 265], utilizando um sistema de coordenadas diferente. Gautreau calculou as órbitas nessa métrica e obteve um efeito de expansão semelhante ao encontrado por Noerdlinger e Petrosian [262].

### **Dinâmica de partículas num universo em expansão**

Outro modo de determinar as influências da expansão é calcular diretamente a dinâmica de muitos corpos no universo. Anderson [266] utilizou o método de Einstein-Infeld-Hoffmann [267] para obter as equações de movimento de um sistema de partículas num universo em expansão. Ele considerou uma métrica de fundo de FRW e estudou o movimento das partículas como uma perturbação nessa métrica. O cálculo é uma espécie de limite pós-newtoniano<sup>1</sup>. Anderson supõe que todas as escalas se expandem com a mesma taxa. Entretanto as órbitas dos planetas não sentiriam a expansão, mas haveria perturbações extremamente pequenas representando uma espécie de atrito viscoso.

Dicke e Peebles [268] estudaram a dinâmica de partículas sobre uma métrica de FRW e concluíram que os efeitos da expansão seriam irrelevantes.

Cooperstock et al. [269] calcularam as correções cosmológicas ao problema newtoniano de dois corpos, utilizando um sistema de coordenadas apropriado para as medidas observacionais. Eles obtiveram que o efeito da expansão é totalmente desprezível em pequenas escalas, como nas galáxias por exemplo, e diminui nos sistemas menores. Mesmo o efeito cumulativo sobre a órbita de um planeta ao longo de toda a existência do sistema solar seria absolutamente irrisório.

Bonnor [270] abordou o problema da expansão em sistemas em equilíbrio. Ele obteve uma solução para um tipo bem particular poeira carregada, para a qual a repulsão eletrostática compensa exatamente a atração gravitacional. Nesse caso a matéria local

---

<sup>1</sup>Veja a referência [146], ex. 39.15 para o caso de um fundo de Minkowski.

estaria se expandindo com o mesmo fator de escala do Universo.

## C.2 Crítica ao conceito de expansão do espaço-tempo

Como vimos na seção anterior, diversas tentativas de determinar a influência da expansão do universo sobre o movimento de estruturas locais levaram a resultados bem diferentes. Quando elas predizem a existência de algum efeito, este seria indetectável na escala do Sistema Solar, ou mesmo das galáxias. O que vamos discutir brevemente aqui é o próprio conceito da expansão. A sua detectabilidade com experimentos locais será examinada na seção C.3.

A maior parte das investigações sobre os possíveis efeitos locais da expansão cósmica procura determinar a dinâmica de vários corpos num “universo de fundo”. Estudam-se perturbações geradas por esses corpos sobre a solução de FRW ou junções entre essa solução e a métrica de um corpo finito. Aí entra claramente um problema de escala. Nesses modelos há um “fluido cósmico” representando o universo em expansão e corpos puntiformes, representando a matéria local. Ora não existe esse tal “fluido cósmico” que permeia todas as escalas. É justamente o conjunto dos corpos pontuais que, em grandes escalas, pode ser tratado como um fluido. A representação do contínuo só tem sentido nas dimensões cosmológicas. Na escalas das estrelas, temos uma distribuição de pontos e não um “fluido cósmico”.

Essa separação artificial entre corpos finitos e um contínuo cosmológico explica facilmente os distintos resultados discutidos na seção C.1. Quando temos uma massa puntiforme embutida num universo em expansão, há uma pequena expansão das órbitas. Isso ocorre porque há matéria do fluido cósmico escoando para fora da órbita, de modo que a massa em seu interior diminui com o tempo. Quando fazemos uma junção de soluções, não há esse fluido no interior da cavidade, de modo que a massa dentro de uma órbita não varia e portanto não ocorre nenhum efeito da expansão. Dessa forma, a influência da expansão do universo nas órbitas é um fenômeno puramente newtoniano oriundo da separação artificial entre um contínuo e partículas puntiformes.

Como passar de uma descrição de partículas para uma descrição de contínuo ainda é um problema aberto na relatividade geral (veja as referências [271] a [273]). É interessante notar que, num universo homogêneo, a única parte não nula do tensor de Riemann é dada pelo tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta}$ . Já no espaço vazio entre massas pontuais, a única componente diferente de zero é dada pelo tensor de Weyl  $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ . O “tensor de Riemann médio” de uma distribuição homogênea de pontos deveria ter  $W_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$  e  $R_{\alpha\beta} \neq 0$ , mas as médias no espaço curvo não estão bem definidas. Está claro que não podemos ter uma perturbação da solução de Friedmann no espaço vazio interestelar, pois lá  $R_{\alpha\beta} = 0$ .

A forma correta para determinar o movimento dos corpos é considerar um sistema de  $N$ -partículas na Relatividade Geral. Fazendo-se uma expansão pós-newtoniana percebe-se que não há nenhuma influência global das partículas distantes sobre os movimentos locais.

A idéia de um efeito local da expansão é na verdade um erro conceitual. Esse erro tem duas origens: a interpretação das coordenadas na métrica de FRW e a extrapolação dessa solução fora do seu domínio de validade. Para obter as soluções cosmológicas usuais, representa-se o conteúdo do universo por um fluido e escolhe-se um sistema de coordenadas co-móvel<sup>2</sup>. No caso homogêneo e isotrópico, obtém-se a métrica de Friedmann-Robertson-Walker:

$$ds^2 = d\tau^2 - [a(\tau)]^2 |d\vec{x}|^2, \quad (\text{C.1})$$

onde  $|d\vec{x}|^2$  é o elemento de linha num espaço homogêneo tridimensional

$$|d\vec{x}|^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2,$$

e  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  são as coordenadas esféricas no espaço  $\vec{x}$ . A distância infinitesimal entre dois eventos com o mesmo  $\tau$  é dada por  $ds = a(\tau) |d\vec{x}|$ . Dessa forma, dois corpos que mantêm a mesma coordenada  $r$  se afastam com o tempo, se  $a(\tau)$  aumenta. Além disso, essa

---

<sup>2</sup>Veja a seção 4.3.1.

expansão atinge todas as escalas. Daí surge a imagem de uma borracha em expansão. Pontos com coordenadas fixas na borracha se expandem com o fator de escala  $a$ .

A utilização do sistema co-móvel simplifica a expressão do elemento de linha e a obtenção das equações de movimento para  $a(\tau)$ . No entanto não se pode esquecer que é apenas uma escolha conveniente do sistema de coordenadas. Não há porque interpretar  $|d\vec{r}|$  como a distância entre dois pontos. *Por definição* as coordenadas acompanham a expansão, isso não é uma consequência da relatividade geral, mas apenas uma escolha sistema de referência.

Como a solução (C.1) representa um universo homogêneo, é óbvio que qualquer escala participa da expansão. No entanto, no caso heterogêneo, essa solução não é mais válida. Mesmo se é possível definir um fator de escala  $a(\tau)$ , este não representa uma expansão local, apenas uma média em grandes escalas. A rigor, não deveríamos nem utilizar um descrição de fluido, mas sim de  $N$ -partículas pontuais (o que tornaria o problema absolutamente intratável na relatividade geral).

Mesmo se não há um efeito da expansão em escalas locais, uma perturbação da solução (C.1) é uma boa aproximação em grandes escalas. Ainda é conveniente utilizar coordenadas comóveis<sup>3</sup>, de modo que a posição é dada por

$$\vec{r} = a\vec{x}.$$

Assim, a velocidade será dada por

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{da}{d\tau}\vec{x} + a\frac{d\vec{x}}{d\tau} = v_{\text{rec}} + v_{\text{pec}}.$$

O primeiro termo é a velocidade de recessão e representa o movimento médio de expansão em grandes escalas, conhecido como escoamento de Hubble. O segundo termo é conhecido como velocidade peculiar e representa o movimento próprio em relação ao escoamento de Hubble. É comum fazer uma separação entre *expansão* e *afastamento*, como se fossem

---

<sup>3</sup>Veja as seções 1.2 e A.5.



duas coisas distintas. A velocidade de recessão seria um efeito relativístico de expansão e não poderia ser interpretada como uma velocidade. Já o segundo termo seria um verdadeiro afastamento.

Como o primeiro termo diverge quando  $\vec{x} \rightarrow \infty$ , teríamos velocidades superluminais, de modo que ele não poderia ser interpretado como uma velocidade [274]. Assim, o desvio para o vermelho teria duas origens: um desvio para o vermelho causado pela expansão, representado por  $v_{\text{rec}}$  e um efeito Doppler representado por  $v_{\text{pec}}$ . Essa idéia é amplamente disseminada na literatura e é a raiz da separação entre expansão e afastamento. No entanto, essa divergência não tem nada a ver com propagação superluminal, ela é novamente um efeito de coordenadas. No sistema co-móvel, a componente  $u^1$  da quadrivelocidade é nula se  $\vec{x} = \text{const.}$  e fica sempre menor do que a velocidade da luz se  $d\vec{x}/d\tau < c$ . Não há nenhuma razão para não interpretar o desvio para o vermelho de uma galáxia distante como um efeito Doppler usual, devido à sua velocidade de afastamento.

Essa confusão que considera a expansão e o afastamento real como coisas distintas só ocorre por causa da separação entre um “modelo de fundo” e perturbações sobre esse modelo. Se o universo em grande escala não fosse homogêneo e isotrópico não seria possível separar a velocidade de recessão e a velocidade peculiar.

Aliás é importante notar que *não existe uma definição da expansão do espaço-tempo*. A definição de expansão é dada pela divergência da quadrivelocidade:  $\theta = u^\alpha{}_{;\alpha}$ . Portanto a expansão é uma medida que depende de uma congruência de curvas que representa um conjunto de observadores. Se associamos esses observadores às partículas materiais de um corpo podemos falar da expansão desse corpo. Portanto o conceito de expansão nada tem a ver com o espaço-tempo em si, mas com o *movimento* de um sistema material. Se o espaço-tempo possui certas simetrias, é possível determinar um conjunto de observadores privilegiados e obter a expansão desses observadores. É o que acontece no caso da métrica de FRW, cujos observadores privilegiados são os observadores co-móveis. Para eles, a expansão é dada por  $\theta = 3(da/d\tau)/a$ .

Está claro que não tem sentido fazer nenhuma distinção conceitual entre afastamento e expansão. O universo estar em expansão significa apenas que as galáxias distantes estão

se afastando de nós. O interessante é que, à medida que a distância aumenta, a dispersão das velocidades com relação a  $v_{\text{rec}}$  diminui. Quanto maior a escala, mais homogênea é a expansão. Essa é uma consequência das condições iniciais: nos momentos primordiais do universo a expansão era homogênea, com flutuações muito pequenas.

Como vimos, uma série de erros conceituais provém da utilização das coordenadas comóveis na solução cosmológica. Embora a teoria de relatividade geral seja invariante com relação à escolha das coordenadas, uma escolha apropriada pode auxiliar na interpretação dos resultados. Um exemplo da importância do sistema de coordenadas é dado pelas coordenadas de Kurskal-Szekers que ajudaram a compreender a solução de Schwarzschild e acabaram com algumas discussões sobre a validade dessa solução, cinquenta anos depois dela ser obtida.

Um sistema muito apropriado para a interpretação do modelo de FRW é dado pelas *coordenadas geodésicas* [275, 276]. Esse sistema é de certo modo um híbrido entre o sistema comóvel o de Schwarzschild. O sistema de coordenadas geodésico é construído a partir das coordenadas de curvatura. Utiliza-se uma coordenada radial  $R$  que tem o papel de distância, ao contrário da coordenada comóvel  $r$  (veja a discussão da seção 4.4). No entanto, a coordenada temporal é dada pelo tempo cósmico  $\tau$ , como na métrica de FRW. Nesse sistema, o elemento de linha com simetria esférica é dado por<sup>4</sup>

$$ds^2(R, \tau) = -K^{-2} \left[ \alpha (K^2 - A)^{1/2} d\tau - dR \right]^2 + d\tau^2 - R^2 d\Omega^2, \quad (\text{C.2})$$

onde  $A$  e  $K$  são funções de  $R$  e  $\tau$ .

Para um fluido geodésico, as equações de movimento ficam bastante simplificadas nesse sistema de coordenadas. A condição  $\dot{u}^\alpha = 0$  implica que  $p_{,\mu} = 0$ , que é satisfeita num universo homogêneo ou num fluido de poeira. É nessas situações que o formalismo de coordenadas geodésicas assume a sua forma mais simples. O estudo da evolução de um fluido homogêneo é equivalente à análise do modelo cosmológico padrão de FLRW.

---

<sup>4</sup>A dedução desse elemento de linha, assim como um estudo detalhado do formalismo de coordenadas geodésicas pode ser encontrado na referência [277].

A solução para um fluido de poeira é equivalente à solução de Lemaitre-Tolman-Bondi, discutida na seção 4.3.2.

Utilizando coordenadas geodésicas pode-se mostrar que a equação de movimento de  $R_g(\tau)$  num fluido de poeira é idêntica à equação newtoniana [278]. Uma outra propriedade interessante do sistema (C.2) é que ele permite descrever o colapso gravitacional com um único sistema de coordenadas [279]. Com a solução genérica para poeira, é possível determinar a métrica gerada por uma massa finita num universo homogêneo [264, 265].

Voltando à solução cosmológica, nas coordenadas  $R$  e  $\tau$  a trajetória de uma partícula que acompanha a expansão média é dada por  $x^1 = R = R_g(\tau)$ , de forma que a sua posição varia no tempo. A expansão é dada por  $\theta = 3\dot{R}_g/R$  de modo que o parâmetro de Hubble  $H = \dot{R}_g/R$  mede realmente a taxa de separação das partículas. Assim, fica explícito que o fato das posições não mudarem ao longo da expansão é apenas um efeito de coordenadas na métrica de FRW.

### C.3 Um experimento para medir a expansão local

Como foi discutido nas seções precedentes, no contexto da relatividade geral não há influências da expansão do universo em pequenas escalas. No entanto, esse tipo de efeito poderia estar presente em teorias alternativas da gravidade. Em alguns modelos a gravitação tem propriedades globais, de modo que a dinâmica local pode ser influenciada pela distribuição total de matéria [280]. Se a expansão fosse propulsada por algum fenômeno microfísico dos campos fundamentais, ela poderia ter uma manifestação local. Isso seria possível nas teorias em que o espaço tridimensional é uma superfície num espaço com mais dimensões [281, 282].

Já foram observados alguns fenômenos que se atribuiu a efeitos locais da expansão. Um exemplo histórico curioso é a expansão da Terra. Antes de que os modelos de placas tectônicas fossem definitivamente aceitos, uma possível explicação para a orografia era a expansão do nosso planeta [283]. Por coincidência, a taxa de expansão prevista para

a Terra era comparável à taxa de expansão cosmológica [284]. Recentemente detectou-se uma aceleração anômala em sondas espaciais [285], que foi imputada à expansão do universo [286].

A medida da expansão em pequenas escalas poderia ser um teste para as teorias da gravitação. Seria possível detectar uma expansão com experimentos locais? Em princípio sim. O elemento chave é a medida do desvio espectral num feixe de luz “envelhecido”. Esse método foi sugerido inicialmente por Rafelski [287]. O feixe de luz ficaria sendo refletido entre dois espelhos durante um período suficiente de tempo para que o desvio para o vermelho fosse observável.

Investigaremos com mais detalhes o desvio espectral de um feixe de luz quicando entre dois espelhos. Discutiremos como esse experimento consegue separar um desvio espectral de expansão de um desvio gravitacional. Para isso, analisaremos esse desvio no caso estático. Vamos supor que a natureza é descrita por uma teoria métrica do espaço-tempo.

Uma métrica é dita *estática* se possui um vetor de Killing do tipo temporal  $\xi^\alpha$ . O campo dos vetores  $\xi^\alpha$  define observadores privilegiados, para os quais é sempre possível escrever a métrica numa forma independente do tempo  $\tau$ , diremos que esses observadores “vêem” a métrica independente de  $\tau$ . Para eles, a razão entre as frequências de fótons medidos entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , entre os instantes  $\tau_1$  e  $\tau_2$  é dada por [288]:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left( \frac{(\xi_\alpha \xi^\alpha)|_{P_1, \tau_1}}{(\xi_\alpha \xi^\alpha)|_{P_2, \tau_2}} \right)^{1/2}. \quad (\text{C.3})$$

Chamaremos de *espelho ideal* um objeto que reflita a luz sem alterar a sua frequência. Consideremos agora uma experiência que consiste em *aprisionar* um fóton entre dois espelhos ideais, deixando-o *quicar* durante um tempo  $\delta\tau = \tau_N - \tau_1$ , onde  $N$  é o número de idas-e-voltas entre os espelhos. Neste caso teremos

$$\omega_N = \omega_1 \left( \frac{(\xi_\alpha \xi^\alpha)|_{P_1, \tau_1}}{(\xi_\alpha \xi^\alpha)|_{P_1, \tau_N}} \right)^{1/2}. \quad (\text{C.4})$$

Para um vetor de Killing de tipo temporal é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas para o qual  $\xi^\alpha$  é independente da coordenada temporal. Portanto neste caso teremos

$$\omega_N = \omega_1.$$

Isto mostra que os observadores que *vêm* a métrica estática não medirão nenhum *desvio de ida-e-volta*. Portanto, não teremos nenhum desvio espectral nesse experimento em um campo estático.

No caso genérico, para dois observadores infinitesimalmente próximos  $P_1$  e  $P_2$ , entre os quais é possível definir um campo de velocidades contínuo, o desvio espectral de um fóton proveniente de  $P_1$  medido por  $P_2$  é dado por [171]:

$$dz = -\frac{d\omega}{\omega} = \frac{\omega(P_2) - \omega(P_1)}{\omega(P_2)} = -\theta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta d\tau - a_\alpha n^\alpha d\tau = (dl)' - a_\alpha n^\alpha d\tau, \quad (\text{C.5})$$

com

$$\theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta h_{\alpha\beta},$$

onde  $\theta_{\alpha\beta}$  é o tensor de deformação,  $\theta$  é a expansão isotrópica e  $\sigma_{\alpha\beta}$  é o tensor de cisalhamento. O primeiro termo do lado direito é o desvio espectral causado pelo efeito Doppler e o segundo é o desvio gravitacional.

Ao voltar a  $P_2$  a direção  $n^\alpha$  do fóton troca de sinal, o que altera o sinal do primeiro

termo de (C.5) mas não do segundo. Após  $N$  idas-e-voltas, ficamos então com

$$z_n = (dl)' = \theta_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \delta\tau. \quad (\text{C.6})$$

A fórmula acima nos permite medir uma deformação local, através da determinação do desvio espectral, eliminando a contribuição gravitacional. Para medir esse desvio é preciso comparar a frequência de um fóton *envelhecido* durante as  $N$  idas-e-voltas no aparelho, com a de um fóton emitido no instante da medida. Para poder fazer a comparação é preciso que os dois fótons sejam emitidos seguindo um mesmo padrão.

Vários fenômenos poderiam produzir um desvio espectral, como as ondas gravitacionais, os movimentos de corpos próximos no Sistema Solar, ou mesmo variações da temperatura no experimento. No entanto, apenas a expansão daria um desvio para o vermelho sistemático. A detecção de um tal desvio permitiria medir a expansão local, independentemente da sua causa. Alternativamente, a discrepância entre as frequências do fóton envelhecido e o emitido no instante da medida poderia indicar uma variação das constantes fundamentais.

## C.4 Conclusão

Neste apêndice, apresentamos uma discussão sobre a influência da expansão do universo em pequenas escalas. Esse assunto surge esporadicamente na literatura e os resultados encontrados são muitas vezes contraditórios. Embora ele seja discutido desde os primórdios da cosmologia, não parece ter havido nenhum estudo sistemático sobre esse tema.

Nós argumentamos que o problema é muito mais conceitual do que uma questão de método de cálculo. Na relatividade geral não há uma expansão em todas as escalas e a motivação para propor esse efeito é fundamentalmente baseada num erro conceitual. A expansão nada mais é que um efeito cinemático proveniente das condições iniciais no universo primordial. Ela não é propulsada por alguma força misteriosa<sup>5</sup>, apenas segue

---

<sup>5</sup>Em toda a discussão, desconsideramos o termo cosmológico. Esse sim, permearia todas as escalas e

por inércia. Não é possível separar o movimento das galáxias em um movimento real e um movimento de expansão. No entanto, a dispersão com relação à expansão média diminui com a distância. O desvio para o vermelho é realmente um efeito Doppler.

As tentativas de determinar a métrica gerada por um corpo esfericamente simétrico em repouso num Universo homogêneo fazem uma separação artificial entre massas pontuais e um fluido cósmico. Tal separação não é possível, deve-se considerar a dinâmica de massas pontuais e em todo caso fazer uma média para os corpos mais distantes. Nesse caso não há nenhuma influência da expansão do universo.

Mesmo assim, em alguma teoria alternativa da gravitação poderia haver uma expansão cosmológica em escala local. Mostramos uma proposta para medir tal efeito no laboratório. O experimento proposto poderia colocar limites nas teorias alternativas da gravitação e à variação das constantes fundamentais [289].

O estudo dessas questões acabou motivando a minha busca por aproximações relativísticas para a evolução não-linear, o que me levou às aproximações locais. A discussão sobre os efeitos locais da expansão também é crucial para compreender a cosmologia newtoniana, que é amplamente utilizada nas investigações da estrutura em grande escala do universo.

---

teria um verdadeiro papel de motor da expansão. No entanto, esse termo começa a dominar a densidade do universo apenas agora. O debate sobre o significado da expansão continua válido mesmo com o termo cosmológico.

# Bibliografia

- [1] Makler M., Kodama T., Calvão M. O., *On Local Approximations to the Nonlinear Evolution of Large-scale Structures*, a ser publicado no *Astrophysical Journal*, Agosto de 2001, CBPF-NF-002/01, astro-ph/0101113
- [2] Elze H. T., Hama Y., Kodama T., Makler, M. & Rafelski J., *Variational Principle for Relativistic Fluid Dynamics*, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, **25**, 9, 1935-1957 (1999), CBPF-NF-008/99, hep-ph/9910208
- [3] Bertschinger E., *Cosmological Dynamics*, in R. Schaeffer, J. Silk, M. Spiro and V. Zinn-Justin eds., *Cosmology and Large Scale Structure*, XV Les Houches Summer School (1993), Elsevier Science, Amsterdam (1996) 273, astro-ph/9503125
- [4] Sahni, V., Coles, P., *Approximation methods for non-linear gravitational clustering*, *Phys. Rep.*, **262**, 1-135 (1995)
- [5] Padmanabhan T., *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press (1993)
- [6] Zel'dovich Ya. B., Novikov I. D., *The Structure and Evolution of the Universe (Relativistic Astrophysics, volume 2)*, The University of Chicago Press (1983)
- [7] Kolb, E. W., Turner, M. S., *The Early Universe*, Addison-Wesley (1994)
- [8] Dodelson, D., *Modern Cosmology, Anisotropies and Inhomogeneities in the Universe (preprint do livro, 2001)*



- [9] Elze H. T., Letessier J., Kodama T., Makler M., Rafelski J., Thews, R. L, *Hadrons in the Early Universe*, em preparação
- [10] Turner, M., *The Dark Side of the Universe: from Zwicky to Accelerated Universe*, Phys. Rep., **333**, 619 (2000)
- [11] Burles, S., Nollett, K. M., Turner, M. S., *Big-Bang Nucleosynthesis Predictions for Precision Cosmology*, astro-ph/0010171
- [12] Fukuda Y. et al., *Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos*, Phys. Rev. Lett., **81**, 1562 (1998)
- [13] Ahmad, Q. R., *Measurement of Charged Current Interactions Produced by  $^8\text{B}$  Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory*, preprint disponível em: <http://www.sno.phy.queensu.ca/sno>, 18 de junho de 2001
- [14] Perlmutter, S., et al., *Discovery of a Supernovae Explosion at Half the Age of the Universe*, Nature, **391**, 51 (1998), astro-ph/9812133
- [15] Riess, A. G., et al., *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, AJ, **116**, 100 (1998)
- [16] Waga, I., *Dark Energy and the Accelerated Expansion of the Universe*, Braz. J. of Phys., **30**, 2, 370 (2000)
- [17] Zehavi, I. & Dekel, A., *Evidence for a positive cosmological constant from flows of galaxies and distant supernovae*, Nature, **401**, 252 (1999)
- [18] BOOMERANG: <http://oberon.roma1.infn.it/boomerang/>
- [19] MAXIMA: <http://efpa.berkeley.edu/group/cmb/index.html>
- [20] De Bernardis, P., et al., *A Flat Universe from High-Resolution Maps of the Cosmic Microwave Background Radiation*, Nature, **404**, 955 (2000), astro-ph/0004404

- [21] Hanany, S., et al, *MAXIMA-1: A Measurement of the Cosmic Microwave Background Anisotropy on Angular Scales of  $10^{\prime}$ - $5^{\circ}$* , *ApJ*, **545**, L5 (2000), astro-ph/0005123
- [22] MAP: <http://map.gsfc.nasa.gov>
- [23] Planck Surveyor: <http://astro.estec.esa.nl/Planck>
- [24] Maddox, S. J., Efstathiou, G., Sutherland, W. J. & Loveday, J., *Galaxy correlations on large scales*, *MNRAS*, **242**, 43P (1990)
- [25] Las Campanas Redshift Survey: <http://manaslu.astro.utoronto.ca/~lin/lcrs.html>
- [26] Shectman, S. A., et. al., *The Las Campanas Redshift Survey*, *ApJ*, **470**, 172 (1996)
- [27] Lapperent, V., Geller, M. J., Huchra J. P., *A Slice of the Universe*, *ApJ*, **302**, L1 (1986)
- [28] 2dF: <http://meteor.anu.edu.au/~colless/2dF>
- [29] Sloan Digital Sky Survey: <http://www.sdss.org>
- [30] K. S. Wu, O. Lahav & M. J. Rees, *The large-scale smoothness of the Universe*. *Nature*, **397** (1999)
- [31] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology*, J.Wiley, New York (1972)
- [32] Novello, M., de Freitas, L. R., de Lorenci, V. A., *Do Gravitational Waves Travel at Light Velocity?*, *Annals of physics*, **254**, 83109 (1997)
- [33] Durrer, R. & Novosyadlyj, B., *Cosmological Parameters from Complementary Observations of the Universe*, *MNRAS*, **324**, 560 (2000), astro-ph/0009057
- [34] Tipler, F. J., *Rigorous Newtonian Cosmology*, *Am. J. Phys.* **64**, 10, 1311 (1996)
- [35] Tipler, F. J., *Newtonian Cosmology Revisited*, *MNRAS*, **282**, 206 (1996)

- [36] Brainerd, T. G., Scherrer, R. J., & Villumsen J. V., *Linear evolution of the gravitational potential: A new approximation for the nonlinear evolution of large-scale structure*, ApJ, **418**, 570 (1993)
- [37] Bagla, J. S., & T. Padmanabhan, *Non-linear evolution of density perturbations using the approximate constancy of the gravitational potential*, MNRAS, **266**, 227 (1994)
- [38] Bertschinger, E., Dekel, A., *Recovering the Full Velocity and Density Fields from Large-Scale Redshift-Distance Samples*, ApJ **336**, L5 (1989)
- [39] Peebles P. J. E., *The large scale structure of the Universe*, Cambridge University Press (1980)
- [40] Dekel, A., Bertschinger, E., Yahil, A., Strauss, M., Davis, M., Huchra, J., *IRAS Galaxies Versus Potent Mass: Density Fields, Biasing, and  $\Omega$* , ApJ **412**, 1 (1993)
- [41] Matarrese S., Lucchin F., Moscardini L., Saez D., *A frozen-flow approximation to the evolution of large-scale structures in the Universe*, MNRAS, **259**, 437 (1992)
- [42] Bertschinger, E., *Cosmological Perturbation Theory and Structure Formation*, in M. C. Bento, O. Bertolami, L. Teodoro eds., COSMOLOGY 2000 Conference Proceedings, astro-ph/0101009
- [43] Sachs R. K., Wolfe A. M., *Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background*, ApJ **147**, 73 (1967)
- [44] Monaghan J. J., *Smoothed Particle Hydrodynamics*, Annu. Rev. Astron. Astrophys., **30**, 543 (1992)
- [45] Bertschinger, E., *Simulations of Structure Formation in the Universe*, Annu. Rev. Astron. Astrophys., **36**, 599-654 (1998)
- [46] Grand Challenge Cosmology Consortium: [http://www.ncsa.uiuc.edu/GC3\\_Home\\_Page.html](http://www.ncsa.uiuc.edu/GC3_Home_Page.html)

- [47] Virgo Consortium: <http://star-www.dur.ac.uk/~franzerp/virgo/virgo.html>
- [48] Hubble Volume: <http://www.physics.lsa.umich.edu/hubble-volume>
- [49] Shanks, T., Metcalfe, N., Fong, D., *Evidence for Galaxy Formation at High Redshift*, astr-ph/0011400
- [50] Drury, L. O'C., Stewart, J. M., *Cosmic Turbulence*, MNRAS, **177**, 377 (1976)
- [51] Zel'dovich, *Gravitational Instability: An approximate Theory for Large Density Perturbations*, Astron. & Astrophys., **5**, 84 (1970)
- [52] Gurbatov, S. N., Saichev, A. I. & Shandarin, S. F., *The large-scale structure of the Universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion*, MNRAS, **236**, 385 (1989)
- [53] Kofman, L., Pogosyan, D. & Shandarin, S. F., *Structure of the Universe in the two-dimensional model of adhesion*, MNRAS, **242**, 200 (1990)
- [54] Kofman, L., Pogosyan, D., Shandarin S. F. & Melott A. L., *Coherent structures in the universe and the adhesion model*, ApJ, **393**, 437 (1992)
- [55] Mancinelli, P. J., Yahil, A., *Local nonlinear approximations to the growth of cosmic structures*, ApJ, **452**, 75 (1995), astro-ph/9411022
- [56] M. Lachièze-Rey, *Solving the Bernoulli-Zel'dovich equation*, ApJ, **407**, 1 (1993)
- [57] Melott, A. L., Shandarin, S. F., *Gravitational Instability with High Resolution*, ApJ, **342**, 26 (1989)
- [58] Shandarin, S. F., Zeldovich, Ya. B., *The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium*, Rev. Mod. Phys., **61**, 2, 185 (1989)
- [59] Buchert T., *Lagrangian theory of gravitational instability of Friedmann-Lemaître cosmologies and the 'Zel'dovich approximation'*, MNRAS, **254**, 729 (1992)

- [60] J. D. Barrow & P. Saich, *Gravitational collapse of rotating pancakes*, *Class. Quantum Grav.* **10**, 79 (1993)
- [61] Brandenberger, R. H., Perivolaropoulos, L., Stebbins, A., *Cosmic Strings, Hot Dark Matter and the Large-Scale Structure of the Universe*, *Int. J. Modern Phys. A*, **5**, 9, 1633 (1990)
- [62] E. Bertschinger, *Cosmological Accretion Wakes*, *ApJ*, **316**, 489 (1987)
- [63] Perivolaropoulos, L., Brandenberger, R. H., Stebbins, A., *Dissipationless clustering of neutrinos in cosmic-string-induced wakes*, *Phys. Rev. D*, **41**, 6, 1764 (1990)
- [64] Moutarde, F., Alimi, J.-M., Bouchet, F. R., Pellat, R., Ramani, A., *Precollapse Scale Invariance in Gravitational Instability*, *ApJ*, **382**, 377 (1991)
- [65] M. Lachièze-Rey, *Beyond the Zel'dovich Approximation*, *ApJ*, **408**, 403 (1993)
- [66] Juszkiewicz, R., Bouchet, F. R., Colombi, S., *Sekness Induced by Gravity*, *ApJ*, **412**, L9 (1993)
- [67] Buchert T., *Lagrangian theory of gravitational instability of Friedmann-Lemaître cosmologies - a generic third-order model for non-linear clustering*, *MNRAS*, **267**, 811 (1994)
- [68] Reisenegger, A., Miralda-Escudé, J., *The Gunn-Peterson Effect from Underdense Regions in a Photoionized Intergalactic Medium*, *ApJ*, **449**, 476 (1995), astro-ph/9502063
- [69] E. Audit, J.-M. Alimi, *Gravitational Lagrangian dynamics of cold matter using the deformation tensor*, *Astron. Astrophys.*, **315**, 11 (1996), astro-ph/9609156
- [70] Betancort-Rijo, J., López-Corredoira, M., *Complete Zel'dovich Approximation*, *ApJ*, **534**, 2, L117 (2000), astro-ph/0003482
- [71] E. Bertschinger, B. Jain, *Gravitational Instability of cold matter*, *ApJ*, **431**, 486 (1994), astro-ph/9307033

- [72] L. Hui, E. Bertschinger, *Local approximations to the gravitational collapse of cold matter*, ApJ, **471**, 1 (1996), astro-ph/9508114
- [73] Kellog, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Verlag von Julius Springer (1929)
- [74] Trefil, J. S., *Introduction to the Physics of Fluids and Solids*, Pergamon Press (1975), apêndice B
- [75] Carlson, B. C., SIAM J. Math. Anal., **8**, 231 (1977)
- [76] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P., *Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press
- [77] Eisenstein, D., J., Loeb, A., *An Analytical Model for the Triaxial Collapse of Cosmological Perturbations*, ApJ, **439**, 520 (1995)
- [78] Icke, V., *Formation of Galaxies inside Clusters*, Astron. & Astrophys., **27**, 1 (1973)
- [79] White, S. D. M., Silk, J., *The Growth of Aspherical Structure in the Universe: Is the Local Supercluster an Unusual System?*, ApJ, **231**, 1 (1979)
- [80] Lin, C. C., Mestel, L. & Shu, F. H., *The Gravitational Collapse of a Uniform Spheroid*, ApJ, **142**, 1431 (1965)
- [81] Audit, E., Teyssier, R., Alimi, J.-M., *Non-linear dynamics and mass function of cosmic structures, I. Analytical results*, Astron. Astrophys., **325**, 439 (1997), astro-ph/9704023
- [82] L. Kofman & D. Pogosyan, *Dynamics of gravitational instability is nonlocal*, ApJ, **442**, 30 (1995)
- [83] Katz, N., Quinn, T., & Gelb, J. M., *Galaxy formation and the peaks formalism*, MNRAS, **265**, 689 (1993)

- [84] van de Weygaert, R., Babul, A., *Shear Fields and the Evolution of Galactic Scale Density Peaks*, ApJ, **425**, L59 (1994)
- [85] Monaco, P., *The Mass Function of Cosmic Structures with Nonspherical Collapse*, ApJ, **447**, 23 (1995)
- [86] Bahcall, N. A, Cen, R., *The Mass Function of Clusters of Galaxies*, ApJ, **407**, L49 (1993)
- [87] Girardi, M., Borgani, S., Giuricin, R., Mardirossian, F., Mezzetti, M., *The Observational Mass Function of Nearby Galaxy Clusters*, ApJ, **506**, 45 (1998)
- [88] Rahman, N., Shandarin, S., *Constraining Cosmological Models by the Cluster Mass Function*, ApJ, **550**, L121 (2001), astro-ph/0010228
- [89] Lucchin, F., Matarrese, S., *The Effect of Non-Gaussian Statistics on the Mass Multiplicity of Cosmic Structures*, ApJ, **330**, 535-544 (1988)
- [90] Ribeiro, A. L. B., Wuensche, C. A., Letelier, P. S., *Small Deviations from Gaussianity and the Galaxy Cluster Abundance Evolution*, ApJ, **539**, 4 (2000), astro-ph/0003193
- [91] Lacey, C., Cole, S., *Merger Rates in Hierarchical Models of Galaxy Formation*, MNRAS, **262**, 627-649 (1993)
- [92] Navarro, J., *Notas de aula da Escola Avançada de Astrofísica do IAG*, Mangaratiba, Rio de Janeiro, 2 a 6 de setembro de 2000
- [93] Gaztañaga, E, Lobo, J. A., *Non-Linear Gravitational Growth of Large-Scale Structures Inside and Outside Standard Cosmology*, astro-ph/0003129
- [94] Press, W. H., Schechter, P., *Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation*, ApJ, **187**, 425 (1974)
- [95] Peacock, J. A., Heavens, A. F., *Alternatives to the Press-Schechter cosmological mass function*, MNRAS, **243**, 133 (1990)

- [96] Bond, J. R., Cole, S., Efstathiou, G., Kaiser, N., *Excursion Set Mass Functions for Hierarchical Gaussian Fluctuations*, ApJ, **379**, 440 (1991)
- [97] Monaco, P., *A Lagrangian Dynamical Theory for the Mass Function of Cosmic Structures - I. Dynamics*, MNRAS, **287**, 753-770 (1997)
- [98] Sheth, R. K., Mo, H. J., Tormen, G., *Ellipsoidal Collapse and an Improved Model for the Number and Spatial Distribution of Dark Matter Haloes*, MNRAS, **323**, 1 (2000), astro-ph/9907024
- [99] Lee, J., Shandarin, S., *The Cosmological Mass Distribution Function in the Zel'dovich Approximation*, ApJ, **500**, 14-27 (1998)
- [100] Doroshkevich, A. G., *Spatial Structure of Perturbations and Origin of Galactic Rotation in Fluctuation Theory*, Astrofizika, **6**, 581 (1970) [Tradução inglesa: Astrophysics, **6**, 320 (1973)]
- [101] Jedamzik, K., *The Cloud-in-cloud Problem in the Press-Schechter formalism of hierarchical structure formation*, ApJ, **448**, 1 (1995)
- [102] Yano, T., Nagashima, M., Gouda, N., *Limitations of the Press-Schechter Formalism*, ApJ, **466**, 1 (1996)
- [103] Jenkins, et al., *The Mass Function of Dark Matter Halos*, MNRAS, **321**, 372 (2001) astro-ph/0005260
- [104] Protogeros, Z. A. M., Scherrer, R. J., *Local Lagrangian approximations for the evolution of the density distribution function in large-scale structure*, MNRAS, **284**, 425 (1997), astro-ph/9603155
- [105] Shapiro, P. R., Iliev, I. T., Raga, A., *A model for the postcollapse equilibrium of cosmological structure: truncated isothermal spheres from top-hat density perturbations*, MNRAS, **307**, 203 (1999), astro-ph/9810164



- [106] Bouchet, F. R., Colombi, S., Hivon, E., Juszkiewicz, *Perturbative Lagrangian approach to gravitational instability*, A&A **296**, 575 (1995)
- [107] Munshi, D., Sahni, V., Starobinsky, A. A., *Non-linear Approximations to Gravitational Instability: A Comparison in the Quasi-Linear Regime*, ApJ, **436**, 517 (1994), astro-ph/9402065
- [108] Varun Sahni, Sergei Shandarin, *Accuracy of Lagrangian approximations in voids*, MNRAS, **282**, 641 (1996)
- [109] Couchman H. M. P., *Mesh-refined  $P^3M$ : A fast adaptive N-body algorithm*, ApJ, **368**, L23 (1991)
- [110] Couchman H. M. P., Thomas P. A. & Pearce F. R., *Hydra: An adaptive-mesh implementation of  $P^3M$ -SPH*, preprint astro-ph/9409058
- [111] Melott, A. L., *The Topology of Large-Scale Structure in the Universe*, Phys. Rep., **193**, 1 (1990)
- [112] Coles P., Davies A. G., Pearson, R. C., *Quantifying the Topology of Large-Scale Structure*, MNRAS **281**, 1375 (1996)
- [113] Mecke, K. B., Buchert, T., Wagner, H., *Robust Morphological Measures for Large-Scale Structure in the Universe*, A&A **288**, 697 (1994)
- [114] Schmalzing, J., Buchert, T., *Beyond genus statistics: a unifying approach to the morphology of cosmic structure*, astro-ph/9702130
- [115] Bertschinger, E., *COSMICS: Cosmological Initial Conditions and Microwave Anisotropy Codes*, astro-ph/9506070, <http://arcturus.mit.edu/cosmics/>
- [116] Li-Xin Li, *Effect of the Global Rotation of the Universe on the Formation of Galaxies*, Gen. Rel. Grav. **30**, 497 (1998), astro-ph/9703082
- [117] Lynden-Bell, D., *On the Gravitational Collapse of a Cold Rotating Gas Cloud*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **58**, 709 (1962)

- [118] Croudace. K. M., Parry, J., Salopek, D. S. & Stewart, J. M., *Applying the Zel'dovich approximation to general relativity*, ApJ, **423**, 22 (1994)
- [119] Morita, M., Nakamura, K., Kasai, M., *Relativistic Zel 'dovich approximation in spherically symmetric model*, astro-ph/9711026
- [120] Herivel J.W., Proc. Camb. Phil. Soc. 51 (1955), 344
- [121] Lin C.C., *Hydrodynamics of Helium II, Proceedings of the International School of Physics*, Varenna (New York, 1963)
- [122] Virasoro, M. A., *Variational Principle for Two-Dimensional Incompressible Hydrodynamics and Quasigeostrophic Flows*, Phys. Rev. Lett. **47**, 17, 1181 (1981)
- [123] Geurst, J. A., *Variational Principles and two-fluid hydrodynamics of bubbly liquid/gas mixtures*, Physica A, **135**, 455 (1986)
- [124] Taub A.H., *General Relativistic Variational Principle for Perfect Fluids*, Phys. Rev. **94**, 1468 (1954)
- [125] Taub A.H., *Stability of General Relativistic Gaseous Masses and Variational Principles*, Phys. Rev. **94**, 1468 (1954)
- [126] Hartle, J. B., Sharp, D. H., *Variational Principle for the Equilibrium of a Relativistic, Rotating Star*, ApJ, **147**, 317 (1967)
- [127] Bardeen J. M., *A Variational Principle for Rotating Stars in General Relativity*, ApJ, **162**, 71 (1970)
- [128] Tam, K.-K., O'Hanlon, J., *Relativistic Magnetohydrodynamics of a Gravitating Fluid*, Nuovo Cimento, **62 B**, 2, 351 (1969)
- [129] Nauenberg, M., Chapline, G. J., *Energy Variational Method*, ApJ, **175**, 417 (1972)
- [130] Nauenberg, M., Chapline, G. J., *Determination of Properties of Cold Stars in General Relativity by a Variational Method*, ApJ, **179**, 277 (1973)

- [131] Ruban, V. P., *Slow Flows of a Relativistic Perfect Fluid in a Static Gravitational Field*, gr-qc/0008002
- [132] Fermi E., *High Energy Nuclear events*, Prog. Theor. Phys. **5**, 570 (1950)  
Fermi E., *Angular Distribution of the Pions Produced in High Energy Nuclear Collisions*, Phys. Rev. **81**, 683 (1951)
- [133] Landau L. D., Izv. Akad. Nauk USSR, Ser. fiz., **17** (1953), 51; S. Z. Belenkij and L. D. Landau, N. Cim., Suppl., **3** (1956), 15
- [134] Elze, H. T., *Hydrodynamic Evolution of Fields*, preprint
- [135] Bogoslovskii G. Yu., *A variational principle and relativistic hydrodynamics equations in a locally anisotropic space*, Sov. Phys. Dokl. 31(11), 879 (1986)
- [136] Babourova, O. V., Frolov, B. N., *The Variational Theory of Perfect Fluid with Intrinsic Hypermomentum in Space-Time with Nonmetricity*, gr-qc/9509013
- [137] Oliveira, H. P., Salim, J. M., Sautu, S. L., *Non-singular inflationary cosmologies in Weyl integrable spacetime*, Class. Quantum Grav., **14**, 2833 (1997)
- [138] Brown, J. D., Kuchař, K. V., *Dust as a standard of space and time in canonical quantum gravity*, Phys. Rev. D **51**, 10, 5600 (1995)
- [139] Roberts M. D., *The Quantum Commutator Algebra of a Perfect Fluid*, Math. Phys. Anal. Geom., **1**, 367 (1999), gr-qc/9810089
- [140] Brown, J. D., *On Variational Principles for Gravitating Perfect Fluids*, Annals of physics, **248**, 1 (1996), gr-qc/9407008
- [141] Aguiar C. E., Kodama T., Osada T., Hama Y., *Smoothed particle hydrodynamics for relativistic heavy-ion collisions*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., **27**, 1 (2001)
- [142] Kramer D., Stephani H., Herlt E., McCallum M., *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press (1980)

- [143] Misner C. W., Sharp D. H., *Relativistic Equations for Adiabatic, Spherically Symmetric Gravitational Collapse*, Phys. Rev. B, **136**, 2, 571 (1964)
- [144] Lemaître G., *The Expanding Universe*, Annales de la Società Scientificque de Bruxelles **A 53**, 51 (1933). Reimpresso em GRG, **29**, 5, 637 (1997)
- [145] Oppenheimer J. R., Snyder H., *On Continued Gravitational Contraction*, Phys. Rev. **56**, 455 (1939)
- [146] Misner C.M., Throne K.S., Wheeler J.A., *Gravitation*, Freeman, San Francisco, (1973)
- [147] McVittie G. C., Wiltshire R. J., *Relativistic Fluid Spheres and Noncomoving Coordinates. I*, Int. J. Theor. Phys. **16**, 2, 121 (1977)
- [148] Oppenheimer J. R., Volkoff G. M., *On Massive Neutron Stars*, Phys. Rev. **55**, 374 (1939)
- [149] Hernandez, W. C., Misner, C. W., *Observer Time as a Coordinate in Relativistic Spherical Hydrodynamics*, ApJ, **143**, 452 (1966)
- [150] Jackiw, R., *Fluid Dynamical Profiles and Constants of Motion from d-branes*, Nucl. Phys. Suppl. **88**, 215 (2000), hep-th/9911235
- [151] Cad , M. L., *Abordagem Variacional da Dinâmica de Estrelas Compactas*. disserta o de mestrado, IF - UFRJ, 2001
- [152] Ray J. R., *Lagrangian Density for Perfect Fluids in General Relativity*, J. Math. Phys. **13**, 1451 (1972)
- [153] von Neumann J., Richtmyer R. D., *A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks*, J. Appl. Phys., **21**, 232 (1950)
- [154] Baym G.. *Superfluidity in Neutron Stars*, Nature **224**, 673 (1969)
- [155] Prix, R., *Slowly Rotating Two-Fluid Neutron Star Model*, astro-ph/9910293

- [156] Coley A. A., Tupper, *Two-fluid cosmological models*, J. Math. Phys. **27**, 1, 406 (1985)
- [157] Sussman, R. A., *Two-fluid models of cosmological inhomogeneities*, Class. Quantum Grav., **9**, p 1891 (1992)
- [158] Zimdahl W., *Reacting fluids in the expanding Universe: A new mechanism for entropy production*, MNRAS **288**, 665 (1997)
- [159] Zimdahl W., *Cosmological particle production and generalized thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. D **57**, 2245 (1998)
- [160] Zimdahl, W., *Self-interacting cosmic fluids: Particle production, causal evolution, and vacuum decay*, preprint astro-ph/9911251
- [161] Calvão M. O., Lima J. A. S., Waga I., *On the thermodynamics of matter creation in cosmology*, Phys. Lett. A, **162**, 223 (1992)
- [162] Prigogini I., Geheinau J., Gunzig E. & Nardone P., *Thermodynamics and cosmology*, GRG, **21**, 8, 767 (1989)
- [163] Loffredo M. I., *Eulerian Variational Principle for Ideal Hydrodynamics and Two-Fluid Representation*, Phys. Lett. A, **135**, 294 (1989)
- [164] Rasio, F. A., *Particle Methods in Astrophysical Fluid Dynamics*, astro-ph/9911360
- [165] Cerqueira, A. H., Dal Pino, E. M. G., *Magnetic Field Effects on the Structure and Evolution of Overdense Radiatively Cooling Jets*, ApJ (Contribuições IAG, 166)
- [166] Ayal S., Piran T., Oechslin R., Davies M. B., Rosswog S., *Post Newtonian SPH*, astro-ph/9910154
- [167] Cahill M. E., Taub A. H., *Spherically Symmetric Similarity Solutions of the Einstein Field Equations for a Perfect Fluid*, Commun. math. Phys. **21**, 1 (1971)

- [168] Wesson P. S., *An Exact Solution to Einstein's Equations with a Stiff Equation of State*, J. Math. Phys. **19**, 2283
- [169] Gutman I. I., Bernal'sko R. M., *Some Exact Spherically Symmetric Solutions of Einstein's Equations*, Sbornik Sovrem. Probl. Grav., Tbilissi, p. 201 (1967)
- [170] Eardley D. M., *Self-similar Spacetimes: Geometry and Dynamics*, Commun. math. Phys., **37**, 287 (1974)
- [171] Ellis G. F. R., *Relativistic Cosmology*. In R. K. Sachs, editor, *General Relativity and Cosmology*, proceedings of the XLVII Enrico Fermi Summer School, Academic Press, 1971
- [172] Ellis G. F. R., *Relativistic Cosmology*. In E. Schatzman, editor, *Cargèse Lectures on Physics*, Vol. 6, p. 1., Gordon and Breach, New York, 1973
- [173] J. Ehlers, *Contributions to the Relativistic Mechanics of Continuous Media*, Gen. Rel. Grav. **25**, 1225 (1993) (tradução do artigo de 1961)
- [174] Hawking S. W., *Perturbations of an Expanding Universe*, ApJ, **145**, 544 (1966)
- [175] Ellis G. F. R., Bruni M., *Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations*, Phys. Rev. D, **40**, 6, 1804 (1989)
- [176] Ellis G. F. R., Hwang J., Bruni M., *Covariant and gauge-independent perfect fluid Robertson-Walker perturbations*, Phys. Rev. D, **40**, 6, 1819 (1989)
- [177] Bruni M., Dunsby P. K .S., G. F. R. Ellis, *Cosmological Perturbations and the Meaning of Gauge-Invariant Variables*, ApJ, **395**, 34 (1992)
- [178] J. M. Bardeen, Phys. Rev. D, **22**, 1882 (1980)
- [179] H. Kodama, M. Sasaki, *Cosmological Perturbation Theory*, Progress of Theoretical Physics Supplement, **78**, 1 (1984)

- [180] Dunsby P. K. S., Bruni M., G. F. R. Ellis, *Covariant Perturbations in a Multifluid Cosmological Medium*, ApJ, **395**, 54 (1992)
- [181] Barrow, J. D., Maartens, R., *Anisotropic stresses in inhomogeneous universes*, preprint astro-ph/9808268
- [182] Maartens, R., Triginer, J., *Density perturbations with relativistic thermodynamics*, Phys. Rev. D, **56**, 4640 (1997). preprint gr-qc/9707018
- [183] Zimdahl, W., *Covariant cosmological perturbation dynamics in the inflationary universe*, Proceedings of the International Seminar on Mathematical Cosmology, Potsdam, ed H.-J. Schmidt & M. Rainer, World Scientific (1998), gr-qc/9806045
- [184] M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Jorás, R. Klippert, *Minimal closed set of observables in the theory of cosmological perturbations*, Phys. Rev. D, **51**, 2, p 450 (1995)
- [185] M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Jorás, R. Klippert, *Minimal closed set of observables in the theory of cosmological perturbations. II. Vorticity and gravitational waves*, Phys. Rev. D, **52**, 2, p 730 (1995)
- [186] M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, R. Klippert, *Minimal closed set of observables in the theory of cosmological perturbations. III. Quantum treatment*, Phys. Rev. D, **54**, 4, p 2.578 (1996)
- [187] Dunsby, P. K. S., Basset, B., Ellis, G. F. R., *Covariant Analysis of Gravitational Waves in a Cosmological Context*, Class. Quantum Grav., **14**, 1215 (1997), gr-qc/9811092
- [188] Sopena, C. F., Maartens, R., Ellis, G. F. R., Lesame, W. M., *Nonperturbative gravito-magnetic fields are not transverse*, Phys. Rev. D, **60**, 024006 (1999). gr-qc/9809085

- [189] R. Maartens, B. A. Bassett, *Gravitational electromagnetic duality*, *Class. Quantum Grav.*, **15**, 705 (1998)
- [190] Tsagas, C., G., Barrow, J. D., *A Gauge-invariant Analysis of Magnetic Fields in General Relativistic Cosmology*, gr-qc/9704015.
- [191] W. R. Stoeger, R. Maartens, G. F. R. Ellis, *Proving Almost-Homogeneity of the Universe: An Almost Ehlers-Geren-Sachs Theorem*, *ApJ*, **443**, 1 (1995)
- [192] R. Maartens, G. F. R. Ellis, W. R. Stoeger, *Anisotropy and inhomogeneity of the universe from  $\Delta T / T$* , *Astron. Astrophys* **309**, L7 (1996)
- [193] N. Mustapha, C. Hellaby, G. F. R. Ellis, *Large-scale inhomogeneity versus source evolution: can we distinguish them observationally*, *MNRAS* **292**, 817 (1997).  
Preprint gr-qc/9808079
- [194] Hirai, T., *Gauge-Invariant Cosmological Perturbations in Generalized Einstein Theories*, *ApJ*, **431**, 6 (1994)
- [195] Palle, D., *On primordial cosmological density fluctuations in the Einstein-Cartan gravity and COBE data*, astro-ph/9811408
- [196] Dunsby, P. K. S., *A Fully Covariant Description of CMB Anisotropies*, *Class. Quantum Grav.* **14**, 3391-3405, 1997, (astro-ph/9707022)
- [197] Challinor, A. D., Lasenby, A. N., *Covariant and gauge invariant analysis of cosmic microwave background anisotropies from scalar perturbations*, *Phys. Rev. D*, **58**, 023001 (1998)
- [198] Gebbie, T., *The midly nonlinear imprint of structure on the CMB*, (astro-ph/9912072). [Ver também gr-qc/9707022, 9801092, 9904408 (Annals of Physics)]
- [199] Marklund, M., Bordin, G., Dunsby, P. K. S., *Radio wave emissions due to gravitational radiation*, astro-ph/9907350



- [200] Mosquera-Cuesta, H., *Overcoming the Energetics Crisis of the Cosmological Gamma-Ray Bursts: Supernovae Luminosity Enhancement Driven by Gravitational Waves*, preprint
- [201] Ellis G. F. R., van Elst, H., *Theoretical and Observational Cosmology, Cargèse Lectures on Physics*, ed. Marc Lachièze-Rey (Kluwer, Dordrech, 1999), 1, gr-qc/9812046
- [202] Eckart, C, *The Thermodynamics of Irreversible Processes III. Relativistic Theory of the Simple Fluid*, Phys. Rev. **58**, 919 (1940)
- [203] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics* (London, Pergamon Press, 1959)
- [204] S. Weinberg, *Entropy generation and the survival of proto galaxies in an expanding Universe*, ApJ, **168**, 175 (1971)
- [205] A. Barnes & R. Rowlingson, *Irrotational perfect fluids with a purely electric Weyl tensor*, Class. Quantum Grav., **6**, 949 (1989)
- [206] S. Matarrese, O. Pantano, D. Saez, *General-relativistic approach to the nonlinear evolution of collisionless matter*, Phys. Rev. D, **47**, 4, 1311 (1993)
- [207] S. Matarrese, O. Pantano, D. Saez, *General-Relativistic Dynamics of Irrotational Dust: Cosmological Implications*, Phys. Rev. Lett., **72**, 3, 320 (1994)
- [208] S. Matarrese, O. Pantano, D. Saez, *A relativistic approach to gravitational instability in the expanding Universe: second-order Lagrangian solutions*, MNRAS, **271**, 513 (1994)
- [209] M. Bruni, S. Matarrese, O. Pantano, *A Local View of the Observable Universe*, Phys. Rev. Lett., **74**, 11, 1916 (1995)
- [210] M. Bruni, S. Matarrese, O. Pantano, *Dynamics of Silent Universes*, ApJ, **445**, 958 (1995)

- [211] Mutoh, H., Hirai, H., Maeda, K, *Dynamics of Quiet Universes*, Phys. Rev. D **55** (1997) 3276-3287, astro-ph/9608183
- [212] H. van Elst, C. Uggla, W. M. Lesame, G. F. R. Ellis, R. Maartens, *Integrability of irrotational silent cosmological models*, Class. Quantum Grav., **14**, 1151 (1997), gr-qc/9611002
- [213] Szekeres, P., *A Class of Inhomogeneous Cosmological Models*, Commun. math. Phys., **41**, 55 (1975)
- [214] Harrison, E., *Cosmology without General Relativity*, Annals of Physics, **35**, 437 (1965)
- [215] Lima, J. A. S., Zanchin V., Brandenberger R., *On the Newtonian Cosmology Equations with Pressure*, MNRAS, **291**, L1 (1997), astro-ph/9612166
- [216] Padmanabhan, T., Nayeri, A., *A possible Newtonian interpretation of relativistic cosmological perturbation theory*, preprint gr-qc/9807039
- [217] Rangel, L., Novello, M., *Reminiscences of the Primordial Anisotropic Era of our Universe*, Gravitation & Cosmology **3**, 1, 48 (1997)  
Rangel, L., Novello, M., *Fluctuations in a Primordial Anisotropic Era*, Int. J. Mod. Phys. **A13**, 3, 363 (1998)
- [218] G. F. R. Ellis, P. K. S. Dunsby, *Newtonian evolution of the Weyl tensor*, ApJ, **479**, 97 (1997)
- [219] E. Bertschinger, A. J. S. Hamilton, *Lagrangian evolution of the Weyl tensor*, ApJ, **435**, 1 (1994), astro-ph/9403016
- [220] Balbi, A., et al., *Constraints on Cosmological Parameters from MAXIMA-1*, ApJ **545**, L1 (2000), astro-ph/0005124
- [221] Copeland, E. J., Liddle, A. R., Wands, D., *Exponential potentials and cosmological scaling solutions*, Phys. Rev. D, **59**, 5, 023512 (1999), astro-ph/9711068

- [222] Caldwell, R. R., *An Intruduction to Quintessence*, Braz. J. of Phys., **30**, 2, 215 (2000)
- [223] Peebles, P. J. E., Ratra B., *Cosmology with Time-Variable Cosmological “Constant”*, ApJ **325**, L17 (1988)
- [224] Peebles, P. J. E., *Evolution of the Cosmological Constant*, Nature, **398**, 25 (1999)
- [225] Perrota, F., Baccigalupi, C., Matarrese, S., *Extended Quintessence*, astro-ph/9906066
- [226] Ng, S. C. C., Wiltshire, D. L., *Properties of Cosmologies with Dynamical Nambu-Goldstone Bosons*, astro-ph/0004138
- [227] Binétruy, P., *Models of Dynamical Supersymmetry Breaking an Quintessence*, preprint hep-ph/9810553
- [228] Hu, W., Eisenstein, D. J., Tegmark, M., White. M., *Observationally Determining the Properties of Dark Matter*, Phys. Rev. D, **59**, 5, 023512 (1999), astro-ph/9806362.
- [229] Starobinsky, A. A., *How to determine an effective potential for a variable cosmological term*, astro-ph/9810431
- [230] Nakamura, T., Chiba, T., *Determining the Equation of State of the Expanding Universe: Inverse Problem in Cosmology*, MNRAS, **306**, 696 (1999), astro-ph/9810447
- [231] Saini, T. D., Raychaudhury, S., Sahni, V., Starobinsky, A. A., *Reconstructing the Cosmic Equation of State from Supernova Distances*, astro-ph/9910231.
- [232] Garnavich, P. M., et. al., *Supernova Limits on the Cosmic Equation of State*. ApJ, **509**, 74 (1998), astro-ph/9806396
- [233] Waga, I., Miceli, A. P. M. R., *Cosmological constraints from lensing statistics and supernovae on the cosmic equation of state*, Phys. Rev. D, **59**, 103507 (1999), astro-ph/9811460

- [234] Efstathiou, G., *Constraining the equation of state of the Universe from Distant Type Ia Supernovae and the Cosmic Microwave Background Anisotropies*, astro-ph/9904356
- [235] Brax, P. & Martin, J., *Quintessence and Supergravity*, astro-ph/9905040
- [236] Albrecht, A., Skordis, C., *Phenomenology of a Realistic Accelerating Universe Using Only Planck-Scale Physics*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2076 (2000)
- [237] Copeland, E. J., Nunes, N. J., Rosati, F., *Quintessence models in Supergravity*, astro-ph/9905040
- [238] Fabris, J. C., Martin, J., *Amplification of density perturbations in fluids with negative pressure*, *Phys. Rev. D*, **55**, 8, 5205 (1997)
- [239] Fabris, J. C., Gonçalves, S. V. B., *Perturbations in a stringlike fluid*, *Phys. Rev. D*, **56**, 10, 6128 (1997)
- [240] Landy, S. D., Shectman, S. A., Lin, H., Kirshner, R. P., Oemler, A. A., Tucker, D., *The Two-Dimensional Power Spectrum of the Las Campanas Redshift Survey: Detection of Excess power on  $100 H^{-1}$  Mpc Scales*, *ApJ*, **456**, L1 (1996), astro-ph/9510146
- [241] Einasto, J., *Large Scale Structure of the Universe: Current Problems*, astro-ph/9909436
- [242] Chiba, T., Sugiyama, N., Nakamura, T., *Cosmology with  $x$ -matter*, *MNRAS*, **289**, L5 (1997), astro-ph/9704199
- [243] Chiba, T., Sugiyama, N., Nakamura, T., *Observational tests of  $x$ -matter models*, *MNRAS*, **301**, 72 (1998), astro-ph/9806332
- [244] Caldwell, R. R., Dave, R., Steinhardt, P. J., *Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation-of-State*, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998), astro-ph/9708069

- [245] Hu, W., *Structure Formation with Generalized Dark Matter*, ApJ, **506**, 485 (1998) astro-ph/9801234
- [246] Grishchuk, L. P., *Density Perturbations of Quantum Mechanical Origin and the Anisotropy of the Microwave Background*, Phys. Rev. D, **50**, 7154 (1994)
- [247] Viana, P. T. P., Liddle, A. R., *Perturbation evolution in cosmologies with a decaying cosmological constant*, Phys. Rev. D, **57**, 674 (1998), astro-ph/9708247
- [248] Kamenshchik, A., Moschella, U., Pasquier, V., *An Alternative to Quintessence*, gr-qc/0103004
- [249] Bordemann, M., Hoppe, J., *The Dynamics of Relativistic Membranes: Reduction to 2-dimensional fluid dynamics*, Phys. Lett. B, **317**, 315 (1993)
- [250] Jackiw, R., Polychronakos, A. P., *Fluid Dynamical Profiles and Constants of Motion from d-branes*, Commun. Math. Phys., **207**, 107 (1999)
- [251] Fabris, J. C., Gonçalves S. V. B., Souza P. E., *Density Perturbations in an Universe Dominated by a Chaplygin Gas*, gr-qc/0103083
- [252] Ma, C.-P., Bertschinger, E., *Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges*, ApJ, **455**, 7 (1995), astro-ph/9506072
- [253] Lifshitz, E. M., J. Phys. USSR **10**, 116 (1946)
- [254] Lifshitz, E. M., Khalatnikov, I. M., *Investigations in Relativistic Cosmology*, Advances in Physics, **12**, 185 (1963)
- [255] Mendes, R. S., Tsallis, C., *Renormalization Group Approach to Nonextensive Statistical Mechanics*, cond-mat/0003365
- [256] Tsallis, C., *Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics*, Braz. J. Phys. **29**, 1 (1999)  
[http://sbf.if.usp.br/WWW\\_pages/Journals/BJP/Vol29/Num1/index.html](http://sbf.if.usp.br/WWW_pages/Journals/BJP/Vol29/Num1/index.html)

- [257] Einstein A., Strauss E.G., *The Influence of the Expansion of Space on the Gravitation Fields Surrounding the Individual Stars*, Rev Mod. Phys., **17**, 120 (1945)  
Einstein A., Strauss E.G., *Correction and Additional Remarks to our Paper*, Rev. Mod. Phys., **18**, 148 (1946)
- [258] Gilbert, C., *The Gravitational Field of a Star in the Expanding Universe*, **116**, 6, 678 (1956)
- [259] A. Chamorro, *A Kerr Cavity with a Small Rotation Parameter Embedded in Friedmann Universes*, GRG, **20**, 12, pp.1309 (1988)
- [260] J. M. M. Senovilla, R. Vera, *Impossibility of the Cylindrically Symmetric Einstein-Strauss model*, Phys. Rev. Lett., **78**, 12, 2284 (1997)
- [261] McVittie, G. C., MNRAS, **93**, 325 (1933)
- [262] Noerdlinger P. D., Petrosian V., *The effect of cosmological expansion on self-gravitating ensembles of particles*, ApJ, **168**, 1 (1971)
- [263] Nolan B., *Sources for McVittie's mass particle in an expanding universe*, J. Math. Phys. **34**, 1, 178 (1993)
- [264] Roland Gautreau, *Imbedding a Schwarzschild mass into cosmology*, PRD, **29**, 198 (1984)
- [265] N. Van den Bergh, P. Wils, *Comments on: Imbedding a Schwarzschild mass into cosmology*, PRD, **29**, 3002 (1984)
- [266] J. L. Anderson, *Multiparticle Dynamics in an Expanding Universe*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3602 (1995)
- [267] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, *The gravitational equations and the problem of motion*, Ann. Math., Ser. 2 **39**, 65 (1939)  
A. Einstein L. Infeld. *The gravitational equations and the problem of motion II*, Ann. Math., Ser. 2 **40**, 455 (1940)

- A. Einstein L. Infeld, *On the motion of particles in general relativity theory*, Can. J. Math. **3**, 209 (1949)
- [268] Dicke, R. H., Peebles, P. J. E., *Evolution of the Solar System and the Expansion of the Universe*, Phys. Rev. Lett. **12**, 15, 435 (1964)
- [269] Cooperstock, F. I., Faraoni V., Vollick D. N., *The influence of the cosmological expansion on local systems*, ApJ, **503**, 61 (1998)
- [270] W. B. Bonnor, *The cosmic expansion and local dynamics*, MNRAS, **282**, 1467 (1996)
- [271] G. F. R. Ellis, W. R. Stoeger, *The 'fitting problem' in cosmology*, Class. Quantum Grav, **4**, 1697 (1987)
- [272] N. V. Zotov and W. R. Stoeger SJ, *Averaging Einstein's Equations Over a Hierarchy of Bound and Unbound Fragments*, ApJ, **453**, 574 (1995)
- [273] Zalaletdinov, R. M., *Averaging problem in General Relativity, Macroscopic Gravity and Using Einstein's Equations in Cosmology*, gr-qc/9703016
- [274] Davis, T. M., Lineweaver, C. H., *Superluminal Recesson Velocities*, astro-ph/0011070
- [275] Gautreau R., *Geodesic coordinates in the de Sitter universe*, PRD, **27**, 764 (1983)
- [276] Gautreau R., *Curvature Coordinates in Cosmology*, PRD, **29**, 186 (1984)
- [277] Makler., M., *Coordenadas geodésicas*, monografia não publicada (1997)
- [278] Gautreau R., *General Relativity in Newtonian Form*, GRG, **22**, 671 (1990)
- [279] Gautreau R., J. M. Cohen, *Gravitational collapse in a single coordinate system*, Am. J. Phys., **63**, 991 (1995)

- [280] Mannheim P. D., *Local and Global Gravity*, Found. of Phys. (Special issue honoring Professor Lawrence Horowitz), A. van der Merwe and S. Raby, Editors, 1997, preprint gr-qc/9611038
- [281] Randall, L., Sundrum, R., *Large Mass Hierarchy from Small Extra Dimension*, Phys.Rev. Lett. **83**, 3370 (1999)
- [282] Randall, L., Sundrum, R., *An Alternative to Compactification*, Phys.Rev. Lett. **83**, 4690 (1999)
- [283] Eged, L., *The Expanding Earth?*, Nature, **197** March 16, 1059 (1963)
- [284] MacDougall, J., Butler, R., Kronberg, P., Sandqvist, A., *A Comparison of Terrestrial and Universal Expansion*, Nature, **199** September 14, 1080 (1963)
- [285] Anderson, J. D., et al., *Indication, from Pioneer 10/11, Galileo, and Ulysses Data, of an Apparent Anomalous, Weak, Long-Range Acceleration*, gr-qc/9808081
- [286] J. L. Rosales, J. L. Sanchez-Gomez, *A possible cosmological origin of the indicated anomalous acceleration in Pioneer 10/11 orbital data analysis*, preprint gr-qc/9810085
- [287] Rafelski, J., *correspondência pessoal*
- [288] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984)
- [289] Drinkwater, M. J., Webb, J. K., Barrow, J. D., Flambaum, V. V., *New Limits on the Possible Variation of Physical Constants*, MNRAS, **295**, 457 (1998)





# “Dinâmica Gravitacional da Formação de Estruturas no Universo”

MARTIN MAKLER

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Física, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Takeshi Kodama – Presidente/UFRJ

José Ademir Sales de Lima – UFRGN

Murari Mohan Som – UFRJ

Ívano Damião Soares – CBPF

Mário Novello - CBPF

Suplente: Marcelo José Rebouças – CBPF

Convidado especial: Maurício Ortiz Calvão – UFRJ

Rio de Janeiro 23 de agosto de 2001

