

HILÁRIO ANTÔNIO RODRIGUES GONÇALVES

**Descrição Lagrangeana Efetiva do Colapso
Gravitacional e Confinamento de Neutrinos
em Explosão de Supernova**

Tese de

DOUTORADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, 1995

- À memória do meu pai.

- À Érica.

Agradecimentos

– Ao Prof. Sérgio J. Barbosa Duarte, que me orientou neste trabalho com empenho e sabedoria, e por seu firme e inestimável incentivo.

– Ao Prof. Marcelo Chiapparini, que me orientou em parte substancial deste trabalho, por sua amizade e apoio constantes.

– Ao Prof. Takeshi Kodama, por ter delineado os fundamentos do modelo de camadas homogêneas.

– Ao Prof. Victor d'Ávila, com quem trabalhamos em conjunto no desenvolvimento deste trabalho, pela amizade, sugestões e as empolgantes discussões sobre a física de supernovas.

– Ao Prof. Arnaldo José Santiago, pela amizade fraternal, críticas e encorajamento.

– À Edgar Corrêa de Oliveira, Emil de Lima Medeiros, Gerson Pech, Henrique Pereira, Lia Castro Vargas e Marcello Gonçalves, por suas críticas e sugestões.

– Aos meus familiares e amigos que, direta ou indiretamente, em maior ou menor escala, se sacrificaram para que eu pudesse realizar este trabalho. Agradeço a eles por sua confiança e paciência.

– Ao meu irmão Jorge, pelo apoio e incentivo que me prestou nos momentos difíceis e decisivos por que passamos.

– Aos demais amigos, colegas e pesquisadores do DNE e do CBPF, onde realizei este trabalho, e a todo o pessoal técnico.

– À Neuma e à Lena, pelas conversas descontraídas e pelo apoio técnico.

– À Mirian.

– Ao CBPF e ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho, propomos um formalismo lagrangeano efetivo para descrever a dinâmica do colapso gravitacional e do mecanismo de *bounce* de um caroço de supernova. O caroço é dividido em duas camadas homogêneas, cujos raios e massas constituem os graus de liberdade efetivos do sistema, e as equações de movimento resultantes são integradas numericamente para diferentes configurações iniciais. O formalismo permite calcular a intensidade da onda de choque gerada no momento da inversão do colapso.

Com o objetivo de investigar os efeitos do confinamento de neutrinos sobre a evolução do colapso, propomos também uma equação de estado para a matéria estelar no regime hadrônico a $T = 0$, obtida a partir da hadrodinâmica quântica, incorporando-se explicitamente os neutrinos.

Os resultados obtidos mostram que o formalismo reproduz as principais características do colapso de supernova, em particular a geração da onda de choque no instante do *bounce*. O confinamento de neutrinos, introduzido através da equação de estado, exerce um efeito significativo, tanto sobre as propriedades da matéria estelar como sobre a dinâmica do colapso.

Abstract

In this work we propose an effective lagrangian formalism to describe the dynamics of supernova core collapse and the bounce mechanism. The core is divided in two homogeneous shells, their radii and masses being assumed to be the degrees of freedom of the system. The resulting equations of motion are numerically solved for different initial configurations. This formalism allows us to calculate the shock wave intensity generated during the bounce.

To investigate the effects of neutrino trapping on the dynamical evolution of the core collapse, we present a stellar matter equation of state in the hadronic phase at $T = 0$, obtained from the quantum hadrodynamics, where the neutrinos are explicitly taken into account.

The results show that the formalism reproduces the basic characteristics of the supernova core collapse and the shock wave generated during the bounce. The neutrino trapping, introduced through the equation of state, affects dramatically the stellar matter properties and the collapse dynamics.

Sumário

AGRADECIMENTOS	iii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xii
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 – EVOLUÇÃO ESTELAR E COLAPSO GRAVITACIONAL	13
1.1 – Introdução	13
1.2 – Pré-Sequência Principal	15
1.3 – Sequência Principal	18
1.3.1 – As Cadeias <i>pp</i>	18
1.3.2 – O Ciclo <i>CNO</i>	19
1.4 – O Limite de Chandrasekhar	20
1.5 – Anã Branca	26
1.6 – Gigante Vermelha	27
1.7 – Nucleossíntese dos Elementos Pesados	30
1.8 – Supernovas, Estrelas de Nêutrons e Buracos Negros	32
1.9 – Mecanismos de Implosão	35
1.9.1 – Fotodissociação do ^{56}Fe	35
1.9.2 – Captura Eletrônica	36

1.9.3 – Processo Urca	37
1.10 – Mecanismos de Explosão	38
1.10.1 – Transporte de Momento por Neutrinos	38
1.10.2 – Queimas Termonucleares Explosivas	39
1.10.3 – <i>Bounce</i> Hidrodinâmico	40
 CAPÍTULO 2 – EQUAÇÃO DE ESTADO NO REGIME SUBNUCLEAR	44
2.1 – Introdução	44
2.2 – Gás Ideal de Fermi	46
2.3 – Correção Eletrostática	51
2.4 – Equação de Estado de Baym, Pethick e Sutherland	53
2.5 – Equação de Estado de Baym, Bethe e Pethick	59
 CAPÍTULO 3 – HADRODINÂMICA QUÂNTICA	69
3.1 – Introdução	69
3.2 – O Modelo QHD-I	70
3.3 – O Modelo de Walecka Não-Linear	81
3.4 – O Modelo QHD-II	82
3.4.1 – O Teorema de Noether	83
3.4.2 – O Acoplamento $\pi - N$	84
3.4.3 – O Acoplamento $\rho - N$	85
3.4.4 – A Lagrangeana QHD-II	86
3.4.5 – Equação de Estado	89
 CAPÍTULO 4 – EFEITOS DO CONFINAMENTO DE NEUTRINOS SOBRE A EQUAÇÃO DE ESTADO	92
4.1 – Introdução	92

4.2 – Regime Subnuclear com Neutrinos Confinados	96
4.3 – Regime Hadrônico	102
4.4 – Resultados	114
4.5 – Conclusões	116
CAPÍTULO 5 – DESCRIÇÃO DO COLAPSO GRAVITACIONAL A DUAS	
CAMADAS: TRANSFERÊNCIA DE MASSA	126
5.1 – Introdução	126
5.2 – Descrição do Formalismo	131
5.3 – Equações de Movimento	138
5.4 – Equação de Estado	142
5.5 – Condição Inicial	146
5.6 – Acionamento do Colapso Gravitacional	147
CAPÍTULO 6 – RESULTADOS E CONCLUSÕES	150
6.1 – Evolução Dinâmica	150
6.2 – Formação de Onda de Choque	154
6.3 – Consequências do Confinamento de Neutrinos	155
6.4 – Conclusões	157
APÊNDICE A – NOTAÇÕES E CONVENÇÕES	177

Lista de Figuras

1.1 – Representação esquemática da configuração de uma pré-supernova	29
4.1 – Densidade relativa de partículas em função da densidade bariônica, para o caso em que os neutrinos estão ausentes	118
4.2 – Densidade relativa de partículas em função da densidade bariônica, para o caso em que os neutrinos estão confinados	119
4.3 – Comportamento da massa efetiva em unidades da massa de repouso dos nucleons em função da densidade bariônica, para diversos valores da fração leptônica Y_l ...	120
4.4 – Velocidade do som, em unidades da velocidade da luz, como função da densidade bariônica, para diversos valores da fração leptônica Y_l	121
4.5 – Índice adiabático Γ como função da densidade bariônica, para diversos valores da fração leptônica Y_l	122
4.6 – Equação de estado para alguns valores de Y_l , comparada com o caso em que os neutrinos estão ausentes	123
4.7 – Incompressibilidade da matéria nuclear para $\rho = \rho_0$, como função da fração leptônica Y_l	124
5.1 – Carço de ^{56}Fe dividido em duas camadas homogêneas, caracterizadas por seus raios e massas	132
5.2 – Representação esquemática do campo de velocidade no interior do carço em função da distância radial	135
5.3 – Equações de estado para os três regimes de densidade, mostrando a a pressão dividida pela densidade bariônica como função do logaritmo da densidade bariônica	145
6.1a – Evolução temporal dos raios R_1 e R_2 para um carço de $1,24M_\odot$, representando um evento explosivo	160

6.1b – Detalhamento da Fig. 6.1a, mostrando o processo de inversão do caroço homólogo e da camada 2	161
6.2 – Densidades alcançadas pelas duas camadas no instante do <i>bounce</i> , mostrando a dependência com o confinamento de neutrinos	162
6.3 – Evolução temporal dos raios R_1 e R_2 de um evento não explosivo, para um caroço de $1,075M_\odot$	163
6.4 – Evolução temporal da massa da camada 1 (m_1) de um evento explosivo, para um caroço de $1,24M_\odot$	164
6.5 – Evolução temporal das energias totais das duas camadas, em unidades de 10^{51} erg, para um evento explosivo de um caroço de $1,24M_\odot$	165
6.6 – Detalhe da Fig. 6.5, mostrando o processo de transferência de energia da camada 1 para a camada 2	166
6.7 – Velocidade da descontinuidade R_1 em relação a camada 1, em unidades da velocidade do som da camada 1, como função do tempo, para um evento explosivo de um caroço de $1,24M_\odot$	167
6.8 – Velocidade da descontinuidade R_1 , em relação a camada 2, em unidades da velocidade do som da camada 2, como função do tempo, para um evento explosivo de um caroço de $1,24M_\odot$	168
6.9 – Velocidade descontinuidade R_1 , em relação às duas camadas, em unidades das respectivas velocidades do som, como função do tempo, para um evento não explosivo, de um caroço de $1,075M_\odot$	169
6.10 – Evolução temporal do campo de velocidade ao longo do caroço, para alguns instantes de tempo sucessivos, mostrando a formação da onda de choque, para um caroço de $1,24M_\odot$	170
6.11 – Efeitos do confinamento de neutrinos sobre a evolução temporal da massa da camada 1, para um caroço de $1,24M_\odot$	171
6.12 – Efeitos do confinamento sobre a taxa de transferência de massa da camada 2 para a camada 1, para um caroço de $1,24M_\odot$	172
6.13 – Efeitos do confinamento de neutrinos sobre a evolução temporal da energia da camada 2, para um caroço de $1,24M_\odot$	173

6.14 – Efeitos do confinamento de neutrinos sobre o valor de massa final da camada 1, para várias configurações de massas totais diferentes	174
6.15 – Efeitos do confinamento de neutrinos sobre a intensidade da onda de choque gerada no instante do <i>bounce</i> , para várias configurações de massas totais diferentes	175

Lista de Tabelas

Tab. I – Temperatura central (KeV), densidade central (g/cm^3) e tempo (anos), para várias fases evolutivas de duas estrelas, de $1M_{\odot}$ e $25M_{\odot}$	21
Tab. II – Características das supernovas Tipo I e Tipo II	33
Tab. III – Composição química, energia de ligação por nucleon, potencial químico eletrônico e fração leptônica, em função da densidade, para o regime subnuclear sem nêutrons livres, caracterizando a equação de estado de Baym, Pethick e Sutherland	55
Tab. IV – Densidade de energia, pressão, número atômico, número de massa e índice adiabático, em função da densidade bariônica, dados pela equação de estado de Baym, Pethick e Sutherland, para o regime subnuclear sem nêutrons livres	57
Tab. V – Pressão, potencial químico eletrônico, potencial químico dos nucleons, número atômico, número de massa e fração leptônica, dados pela equação de estado de Baym, Bethe e Pethick, para o regime subnuclear com nêutrons livres	67
Tab. VI – Valores adotados neste trabalho para as constantes de acoplamento entre os campos bariônicos e mesônicos, para a incompressibilidade da matéria nuclear e para a massa efetiva dos nucleons relativas à densidade de saturação	115
Tab. VII – O conjunto das equações de estado usadas neste trabalho, englobando todos os regimes de densidade, e as características da matéria estelar em cada um desses regimes	144

*“ Quem entre vós é sábio e entendido?
Mostre em mansidão de sabedoria, mediante
condigno proceder, as suas obras.”*

Tiago: 3;13.

Introdução

” Os antigos não chegaram às coisas que expusemos, porque eram deficientes na douta ignorância.”

De docta ignorantia, Nicolau de Cusa

Há algumas décadas, a física de supernovas tem despertado um interesse crescente no campo da Astrofísica Nuclear Teórica e da Física de Altas Energias [1, 3]. Tal interesse tem aumentado desde a observação da supernova de 1987 – a SN(1987)A –, cujo registro se verificou tanto na faixa ótica quanto na faixa de neutrinos, permitindo por à prova os fundamentos da teoria corrente sobre explosão de supernovas [4, 5].

Para a Física Nuclear, em particular, o estudo desse fenômeno tem sido um guia muito útil para se prever as propriedades da matéria nuclear submetida a condições extremas de densidade e temperatura, permitindo aprimorar nosso conhecimento sobre as forças nucleares e a interação hadrônica. Para a Astrofísica em geral, o estudo das supernovas se justifica, por estarem associadas, como se presume, à formação de estrelas de nêutrons e buracos negros, além de propiciarem a verificação da teoria de evolução estelar padrão. Outros ramos de pesquisa ligados às explosões de supernovas são, por exemplo, a origem dos raios cósmicos, a abundância dos elementos químicos no Universo, a nucleossíntese de elementos pesados, a física de neutrinos, etc.

Quando chegam ao fim de sua vida ativa, estrelas suficientemente massivas, com massa entre $8M_{\odot}$ e $60M_{\odot}$, onde M_{\odot} representa a massa do sol, desenvolvem um caroço de Fe ($\rho \approx 10^9$ g/cm³, $T \approx 10^9$ K), altamente degenerado, e com massa aproximada-

mente igual ao *limite de Chandrasekhar*. Devido a processos fortemente endotérmicos, como a fotodissociação do ^{56}Fe e a captura eletrônica, tais estrelas entram em colapso gravitacional e, a seguir, explodem violentamente como supernovas [6, 7].

A energia liberada por uma explosão de supernova é da ordem de alguns foie ^(*), e um único evento apenas pode ter um brilho maior do que toda uma galáxia. Tais eventos de explosão, espetaculares por suas dimensões, foram denominadas de supernova por Baade e Zwicky [8] em 1934, por serem muito mais brilhantes do que as novas. Os mesmos autores também aventaram, primeira vez, a hipótese básica de que as estrelas de nêutrons seriam o resultado final e residual de uma explosão de supernova.

O colapso gravitacional, cuja escala de tempo é da ordem de milissegundos, prossegue até que a densidade nas regiões centrais da estrela atinja valores entre duas e três vezes o valor da densidade de saturação da matéria nuclear normal (**). Submetida a condições tão extremas de densidade e de temperatura, a composição química da matéria estelar varia muito rapidamente, fazendo com que a equação de estado sofra um repentino *endurecimento*, que se traduz, por exemplo, por um rápido crescimento do índice adiabático, que passa de um valor próximo de $4/3$, no início (estágio de pré-supernova), para um valor entre 2 e 3, no final do colapso, quando a matéria estelar passa para o regime supranuclear de densidade. Essa mudança nas características da equação de estado se deve, notadamente, à interação repulsiva entre os nucleons, que se manifesta, por exemplo, no valor elevado da incompressibilidade da matéria nuclear. Em consequência desse *endurecimento* da equação de estado, as camadas internas do caroço invertem subitamente o sentido de movimento e se expandem rapidamente (*bounce*), colidindo violentamente com as camadas externas. O resultado direto dessa colisão está na formação de uma forte onda de choque, que se propaga radialmente para fora e sobre o restante do material que compõe o caroço (que prossegue em seu movimento quase de queda livre). Eventualmente — dependendo de certos parâmetros como, por exemplo,

(*) $1 \text{ foie} \equiv 10^{51} \text{ erg}$ (ten to fifty one erg). Esta é a unidade natural de energia usada em física de supernovas.

(**) $\rho_0 = 2,8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3 = 0,15 \text{ fm}^{-3}$.

a massa total do caroço —, a onda de choque pode ejetar o restante da estrutura estelar, isto é, a manta e a envoltória da estrela, ocasionando um evento de explosão de supernova [9]. Dessa forma, a formação de onda de choque pelo mecanismo de *bounce* hidrodinâmico estaria habilitada a explicar uma explosão de supernova do Tipo II.

À primeira vista, podemos ter a impressão de que o colapso gravitacional de uma estrela massiva constitua um processo catastrófico e altamente desordenado; mas é o oposto: trata-se de um processo altamente ordenado. De fato, a evolução estelar é dirigida continuamente no sentido de se atingirem estados cada vez mais ordenados, ou seja, estados de baixas entropias. É assim, por exemplo, que durante a fase de sequência principal, estágio em que a estrela ainda está queimando hidrogênio, a entropia por nucleon, em unidades da constante de Boltzmann, é aproximadamente igual a 15, enquanto que no estágio de pré-supernova ela é menor do que 1, no caroço. A redução na entropia é resultante da radiação eletromagnética e dos neutrinos emitidos para fora da estrela durante suas etapas evolutivas precedentes. Este aspecto relevante do colapso gravitacional foi trazido à luz, primeiramente, por Bethe *et al.*, em 1979 [9]. Convém frisar, portanto, que a entropia por nucleon no caroço estelar é mantida aproximadamente constante ao longo do colapso gravitacional, justificando a validade da aproximação de adiabaticidade usada nos cálculos de colapso gravitacional.

O primeiro estágio do colapso gravitacional termina quando a densidade do caroço da estrela alcança um certo valor limiar, em torno $4,3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$. Quando esta densidade é atingida, dois processos importantíssimos passam a ocorrer, mudando drasticamente as propriedades físicas da matéria estelar. Em primeiro lugar os núcleos, fortemente neutronizados em virtude da captura de elétrons, começam a evaporar nêutrons; em segundo, a matéria estelar torna-se opaca aos neutrinos emitidos pela captura eletrônica, ficando confinados no caroço da estrela. O confinamento é causado pelo valor relativamente elevado da seção de choque de certas reações de corrente neutra que ocorrem durante o colapso, quando comparada com as seções de choque típicas de reações eletro-fracas induzidas por correntes carregadas. A relevância desses processos

para a Astrofísica foi apontada, primeiramente, por Sato [10] em 1975, e Mazurek [11] em 1976, e constitui um dos temas deste trabalho.

O confinamento dos neutrinos não é permanente, ocorrendo durante um intervalo de tempo cuja ordem de grandeza é muito maior que a escala de tempo característica do colapso gravitacional. Neste sentido, o confinamento dos neutrinos é efetivo, e se deve a uma drástica redução do seu livre caminho médio, prevista pelo modelo padrão da interação eletro-fracas. A consequência mais importante que deve ser destacada é que, desde o momento em que começa o confinamento, nenhuma energia pode mais abandonar o caroço da estrela, e a partir de então o colapso torna-se rigorosamente adiabático (os fótons estão confinados desde o início do colapso).

No período inicial de formação da estrela de nêutrons, resultante da explosão da supernova, os neutrinos inicialmente confinados desempenham também um papel muito importante no processo de esfriamento da estrela de nêutrons, ao escaparem dela.

Durante o confinamento, a fração leptônica (Y_l) do caroço estelar, definida pela razão entre a densidade de léptons do sistema e a densidade de bárions, permanece constante enquanto o confinamento se mantém. Nesse período, o valor da fração leptônica fica congelado num valor em torno de 0,3, contra uma fração leptônica inicial da ordem de 0,46, que é a razão Z/A para o ^{56}Fe . O decréscimo inicial da fração leptônica se deve, obviamente, ao fato de que antes do confinamento os neutrinos podem escapar do caroço da estrela. Uma vez que o *limite de Chandrasekhar* decresce com a fração leptônica, seu valor vai se reduzindo ao longo do colapso, até que o confinamento se estabeleça e seu valor fique fixado pelo valor final de Y_l . Após a explosão, os neutrinos vão embora e a fração leptônica da estrela de nêutrons é reduzida em virtude, principalmente, do *flash* de neutrinos emitidos.

Em sua generalidade, os cálculos hidrodinâmicos estão de acordo e predizem basicamente as mesmas características do colapso gravitacional, as mesmas que descrevemos anteriormente. Contudo, o mesmo não se verifica no que diz respeito ao período posterior ao *bounce*, sobre o qual existem ainda várias controvérsias. Este desacordo resume

o chamado problema da supernova, que pode ser colocado da seguinte forma: a onda de choque gerada pelo *bounce* é suficientemente intensa para que possa se propagar até a superfície da estrela, e assim poder ejetar quase toda sua massa? Os cálculos mais recentes de simulação de colapso gravitacional apontam para uma resposta negativa a esta pergunta [9]. A razão está no fato de a composição química do caroço no instante do *bounce* não ser homogênea. De fato, a matéria presente nas regiões centrais do caroço, atrás do ponto onde é gerada a onda de choque, é composta por nucleons livres, elétrons, e outras partículas, ou seja, está no regime de densidade nuclear. Entretanto, as camadas mais externas, sobre as quais se propaga a onda de choque, apresenta uma composição química em que núcleos compostos ainda estão presentes. Ora, quando a onda de choque passa por essas camadas, ocorre uma alta compressão do material, elevando enormemente a temperatura; conseqüentemente, os núcleos da região comprimida pela onda de choque vão sendo fotodesintegrados pelos fótons altamente energéticos. A fotodesintegração dos núcleos é uma reação endotérmica, e a energia consumida neste processo é cedida justamente pela onda de choque. Além do mais, parte da energia da onda de choque é dissipada também pela produção de neutrinos.

Tão intensa e eficiente é a dissipação [3] que, após atingir a distância entre 100 a 300 km em relação ao centro, a onda de choque é atenuada e morre, sem chegar a ultrapassar os limites do caroço de ferro, num intervalo de tempo da ordem de 10 ms (A velocidade inicial da onda de choque é da ordem de $3,0 - 6,0 \times 10^9$ cm/s.).

A fragmentação de núcleos contribui para a dissipação de uma outra forma adicional: os prótons livres resultantes da fotodesintegração nuclear capturam elétrons e os neutrinos emitidos neste processo escapam, agindo para dissipar ainda mais a onda de choque. Os neutrinos podem escapar porque a densidade do material em que se propaga a onda de choque é menor do que o valor limiar de confinamento.

Esta discussão introdutória serve para delinear o atual estado da arte da física de supernovas, que vive um impasse fundamental, vale dizer: o mecanismo básico de explosão não é conhecido. Em outras palavras, dado que os cálculos hidrodinâmicos, em

quase sua totalidade, levam a resultados negativos, permanece ainda desconhecido para a Astrofísica Nuclear de que forma o colapso pode ser violentamente revertido numa expansão explosiva, originando um evento de explosão de supernova [7, 12, 13].

Existem, contudo, dois mecanismos de explosão diferentes sobre os quais vale a pena falarmos um pouco. O primeiro [14, 15] foi proposto por Baron *et al.* em 1985, e consiste no chamado mecanismo de explosão direta (*prompt explosion*). O mecanismo de explosão direta se aplicaria a estrelas de massa intermediária, entre $8M_{\odot}$ e $20M_{\odot}$, que seriam capazes, segundo alguns cálculos de evolução estelar, de sintetizar caroços de ferro com massas relativamente pequenas, menores que $1,35M_{\odot}$. Além disto, para que seja eficiente, isto é, para que consiga gerar uma onda de choque suficientemente intensa e capaz de atravessar as camadas mais externas do caroço, tal mecanismo exige que se introduza nos cálculos, *ad hoc*, uma equação de estado *suave* para o regime de densidade nuclear, o que equivale a assumir um valor para a incompressibilidade da matéria nuclear saturada significativamente menor do que aquele que as pesquisas atuais em reações relativísticas de íons pesados parecem apontar.

O funcionamento desse mecanismo é fácil de se entender. Os cálculos hidrodinâmicos mostram que na fase de colapso o caroço estelar se separa em duas partes distintas: um *caroço homólogo* (*), onde a velocidade durante o colapso, em qualquer ponto, é menor que a velocidade do som no meio (região subsônica) e cuja massa é justamente igual ao *limite de Chandrasekhar* e da ordem de $0,8M_{\odot}$ (fixada pela fração leptônica final, como já assinalamos anteriormente), e uma camada externa, cuja velocidade de queda livre é maior que a velocidade do som no meio (região supersônica). Ora, como a onda de choque é formada justamente na borda do *caroço homólogo* então, para alcançar, se for o caso, a superfície do caroço, ela deve atravessar uma quantidade de material dada por $M_c - M_h$, onde M_c é a massa total do caroço e M_h a massa do *caroço homólogo*. Mas, como já vimos, a onda de choque é dissipada pela fotodesintegração nuclear, consumindo

(*) O termo *homólogo* significa que a velocidade em qualquer ponto no interior dessa região do caroço é diretamente proporcional à distância desse ponto ao centro. Isto implica, pela equação da continuidade, que esse caroço é homogêneo.

nesse processo aproximadamente 2 foe para cada $0,1M_{\odot}$ de material dissociado por ela. Essa quantidade de energia é da mesma ordem de grandeza da energia final liberada na explosão. Assim, quanto menor a massa inicial do caroço de ferro, menor a quantidade de material a ser dissociado e, portanto, maior a possibilidade de que a onda de choque possa atingir a superfície do caroço e explodir a estrela. Por outro lado, quanto mais *suave* for a equação de estado, maiores são as densidades atingidas pelo *caroço homólogo* no final do colapso. Com isso, a energia gravitacional disponível para a formação da onda de choque durante o *bounce* do *caroço homólogo* também aumenta, favorecendo ainda mais a possibilidade de uma explosão, significando que uma diferença de “apenas” $0,1M_{\odot}$ na massa inicial do caroço de ferro pode decidir se a estrela explode ou não, pois representa um acréscimo da ordem de $e 2$ foe de energia para a onda de choque. Vemos assim que a maior ou menor eficácia do mecanismo de explosão direta depende criticamente de pequenas diferenças entre grandes quantidades.

O outro mecanismo [16-18], denominado de explosão de longo termo (*delayed explosion*), foi formulado primeiramente por Wilson em 1985, e operaria em estrelas com massa entre $20M_{\odot}$ e $60M_{\odot}$. Em tal mecanismo, são os neutrinos, oriundos da captura eletrônica e inicialmente confinados durante a fase de colapso, que desempenham o papel fundamental. Assim, entre 0,5 e 1,0 s após a onda de choque começar a ser dissipada, a próto-estrela de nêutrons emite um intenso fluxo de neutrinos. Estes neutrinos são absorvidos pelo material imediatamente próximo da onda de choque, aquecendo-o e elevando a pressão. Com isso, a onda de choque é revivida, ganhando energia. Entretanto, os resultados obtidos com este mecanismo dão baixas energias de explosão, se comparadas com as supernovas que já foram observadas e com os resultados obtidos com o mecanismo de explosão direta.

Considerando-se a enorme complexidade dos processos físicos incluídos nas simulações numéricas de explosão de supernova, como, por exemplo, o acoplamento entre as equações hidrodinâmicas e as equações de transporte de neutrinos, taxa de captura eletrônica, taxas de reações nucleares, opacidade da matéria estelar a neutrinos e

os mecanismos de dissipação, apenas para citar alguns exemplos, aliados às inúmeras aproximações, incertezas e erros numéricos embutidos nos cálculos, é fácil entender as controvérsias que envolvem o problema da supernova.

Entretanto, o fato é que os modelos formulados até o presente momento estão em desacordo com os dados observacionais, se considerarmos a frequência de explosões de supernova no Universo. Talvez, em nossa concepção, a explosão de uma supernova seja originada mais pela natureza da estrutura da estrela progenitora e nas propriedades globais da matéria estelar presentes durante o colapso e no momento da sua inversão, do que em processos microscópicos ou em detalhes finos da estrutura da estrela.

Neste trabalho, vamos investigar o problema da supernova em duas frentes complementares. Primeiramente, propomos um formalismo alternativo ao que é aplicado nos cálculos de colapso e explosão de supernovas, ou seja, o tratamento hidrodinâmico usual.

Admitimos como hipótese simplificadora que o processo de explosão de supernovas é decorrente de propriedades globais da matéria estelar, que se manifestam durante o colapso gravitacional, e que esse processo se resume, essencialmente, em um desmembramento do sistema em uma estrela de nêutrons remanescente e uma camada externa, capaz de transferir suficiente energia para a ejeção do restante da estrutura da estrela, que se desacopla do caroço durante o colapso. Com este propósito em mira, dividimos o caroço da pré-supernova em duas camadas homogêneas, cuja dinâmica será descrita por uma lagrangeana efetiva, construída assumindo-se como graus de liberdade efetivos do sistema os raios e as massas das camadas. Mostraremos que a introdução das massas das camadas como variáveis dinâmicas do sistema permite um tratamento direto da onda de choque como uma descontinuidade matemática, assemelhando-se às condições presentes em uma onda de choque real, sem a necessidade de se introduzir qualquer aproximação espúria. Usando-se a equação de continuidade, e supondo que o sistema é esfericamente simétrico, obtemos o campo de velocidade radial no interior de cada camada, com os quais calculamos a expressão da energia cinética efetiva do sistema.

A lagrangeana efetiva do sistema pode ser então construída, adicionando-se os termos de energia gravitacional e energia interna das camadas. Deduzimos então as equações de Euler-Lagrange, que são integradas numericamente. Por simplicidade, adotamos a aproximação de temperatura zero e de adiabaticidade para a análise da evolução dinâmica do sistema. Este trabalho se filia diretamente ao formalismo proposto [19] em 1992 por Rodrigues *et al.*, onde estão apresentados os fundamentos básicos, e aqui propomos estender o mesmo formalismo introduzindo-se o mecanismo de transferência de massa entre as camadas.

Por outro lado, o formalismo lagrangeano efetivo que será proposto neste trabalho, projeta-se como um ponto de partida para uma descrição a várias camadas [20], cuja solução das equações de movimento dispensará, a princípio, aproximações ou a introdução de parâmetros arbitrários, como, por exemplo, a pseudo-viscosidade de VonNeumann [21, 22], amplamente utilizada nos cálculos hidrodinâmicos de colapso gravitacional.

Em segundo lugar, pretendemos investigar o papel desempenhado pelo confinamento de neutrinos sobre a dinâmica do colapso e sobre o processo de formação de onda de choque. Com este objetivo, propomos uma equação de estado realista [23] para o regime de densidade hadrônico, isto é, para a matéria composta de nucleons, mésons e léptons, a temperatura zero, que inclui explicitamente os neutrinos no cálculo da pressão, da energia interna e da composição química do sistema. Para tanto, vamos usar uma teoria quântica relativística consagrada para a descrição da matéria nuclear, a Hidrodinâmica Quântica (QHD), para descrever a dinâmica dos campos bariônicos e mesônicos.

Para finalizar, damos a seguir a estrutura desta tese:

No primeiro capítulo fazemos um breve apanhado da teoria da evolução estelar padrão, e tentamos mostrar ao leitor como o colapso gravitacional é tido como o ponto final na vida evolutiva de estrelas suficientemente massivas. Conceitos importantes para a Astrofísica, como o conceito de *limite de Chandrasekhar*, por exemplo, também

são discutidos. Abordamos os possíveis mecanismos de implosão e os mecanismos de explosão de supernovas, com ênfase no mecanismo de *bounce* hidrodinâmico, que é apresentado com um exemplo simples.

No segundo capítulo, vamos apresentar as equações de estado que serão usadas neste trabalho no cálculo da dinâmica do colapso gravitacional. A primeira delas é a equação de estado obtida por Baym, Pethick e Sutherland [24] para o estado fundamental ($T = 0$) da matéria estelar no regime de densidade subnuclear sem nêutrons livres. A segunda é a equação de estado de Baym, Bethe e Pethick [25] para o regime subnuclear com nêutrons livres. Fazemos no começo do capítulo um breve estudo sobre o gás ideal de Fermi, tópico importante para se entender o que segue.

Apresentamos sumariamente, no terceiro capítulo, uma introdução ao formalismo da Hadrodinâmica Quântica (QHD) e sua aplicação ao cálculo da equação de estado da matéria nuclear à temperatura zero. Esse capítulo deve ser lido como introdução ao quarto capítulo, onde propomos, a partir da QHD, uma equação de estado para a matéria hadrônica com neutrinos confinados, e apresentamos a equação de estado obtida por Gudmundsson e Buchler [26], para o regime subnuclear com nêutrons livres e neutrinos confinados. No mesmo capítulo, apresentamos também os resultados e conclusões sobre a equação de estado proposta.

No quinto capítulo apresentamos o formalismo lagrangeano efetivo com massas variáveis para a descrição do colapso gravitacional e formação de onda de choque. O modelo é exemplificado, aqui, para o caso mais simples de duas camadas apenas. As simulações numéricas são realizadas para as duas situações opostas: ou os neutrinos estão confinados, ou estão ausentes do sistema, para que possamos investigar as consequências do confinamento sobre a evolução do colapso. Com este propósito, usaremos os resultados discutidos no terceiro e quarto capítulos. Finalmente, no sexto capítulo apresentamos os resultados e as conclusões.

Referências

- [1] Wheeler, J. C., Rep. Prog. Phys., **44** (1981), 6.
- [2] Bethe, H.A., Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., **38** (1988), 1.
- [3] Brown, G.E., Phys. Rep., **163** (1988), 1.
- [4] Saha, D. e Chattopadhyay, G., Astrophys. Spa. Sci., **178** (1990), 209.
- [5] Baumgarte, T.W., Shapiro, S.L. e Teukolsky, S.A., Astrophys. J., **443** (1995), 717.
- [6] Woosley, S.E. e Weaver, T.A., Ann. Rev. Astrophys., **24** (1986), 205.
- [7] Bethe, H.A., Rev. Mod. Phys., **62** (1990), 801.
- [8] Baade, W. e Zwicky, F., Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **20** (1934), 254.
- [9] Bethe, H.A., Brown, G.E., Applegate, J. e Lattimer, J.M., Nucl. Phys., **A324** (1979), 487.
- [10] Sato, K., Progr. Theor. Phys., **53** (1975), 595.
- [11] Mazurek, T.J., Astrophys. J., **221** (1976), L87.
- [12] Baron, E. e Cooperstein, J., Astrophys. J., **353** (1990), 597.
- [13] Bruenn, S.W. e Haxton, W.C., Astrophys. J., **376** (1991), 678.
- [14] Baron, E., Cooperstein, J. e Kahana, S., Nucl. Phys., **A440** (1985), 744.
- [15] Cooperstein, J. e Baron, E.A., em *Supernovae*, editado por Petschek, A., Springer-Berlin (1990), 213.
- [16] Wilson, J.R., em “ *Numerical Astrophysics* ”, editado por Centrella, J.M, LeBlanc, J.M. e Bowers, R.L., Jones & Bartlet, Boston (1985), 422.
- [17] Bethe, H.A. e Wilson, J.R., Astrophys. J., **295** (1985), 14.

- [18] Wilson, J.R. e Mayle, R.W., Phys. Rep., **163** (1988), 63
- [19] Rodrigues, H., Duarte, S.B., Kodama, T. e d'Avila, V., Astrophys. Spa. Sci., **164** (1992), 313.
- [20] d'Avila, V., *Tese de Doutorado* (1995), Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), a ser defendida.
- [21] Richtmyer, R.D., “*Difference Methods for Initial-Value Problem*”, Interscience Publishers, Inc., New York (1957).
- [22] Noh, W.F., J. Comp. Phys., **72** (1987), 78.
- [23] Chiapparini, M., Rodrigues, H. e Duarte, S.B., “*Neutrino Trapping in Nonstrange Dense Stellar Matter*”, *pré-print*, CBPF (1995). Submetido para publicação em Phys. Rev. Lett.
- [24] Baym, G., Pethick, C. e Sutherland, P., Astrophys. J., **170** (1971), 299.
- [25] Baym, G., Bethe, H. e Pethick, C., Nuc. Phys., **A175** (1971), 225.
- [26] – Gudmundsson, E.H. e Buchler, J.R., Astrophys. J. **238** (1980), 717.

Evolução Estelar e Colapso Gravitacional

“ (...) vi no Aleph a terra, e na terra outra vez o Aleph e no Aleph a terra, vi meu rosto e minhas vísceras, vi teu rosto e senti vertigem e chorei, porque meus olhos haviam visto esse objeto secreto e conjetural cujo nome os homens usurpam mas que nenhum homem tem olhado: o inconcebível universo.”

O Aleph, Jorge Luis Borges

1.1 Introdução

Entre as poucas informações de que dispomos para o estudo da estrutura e do interior estelar, destacam-se a luminosidade e a temperatura superficial das estrelas. Contudo, essas grandezas exibem certos padrões regulares de variação ao longo do tempo, levando-nos a concluir que as estrelas devem passar por determinados estágios evolutivos, ao longo de sua longa existência. O programa da Astrofísica Nuclear Teórica é estabelecer, com base nas leis e dados experimentais coletados pela física nuclear, os processos físicos subjacentes a tais padrões de variação e as correspondentes etapas evolutivas de uma estrela [1–4].

Um dispositivo amplamente utilizado na análise e classificação das estrelas é o chamado diagrama HR (em homenagem a Hertzsprung e Russel, seus criadores), que

consiste em um gráfico onde cada estrela de um dado aglomerado é representada por um ponto, cuja ordenada está correlacionada com a luminosidade (magnitude) da estrela, e a abscissa com a temperatura superficial (o índice de cor da estrela). Assim, o diagrama HR permite que possamos classificar as estrelas segundo seu estágio de evolução. O que chama mais a nossa atenção é que a maioria das estrelas representadas no diagrama situa-se ao longo da diagonal. Por este motivo, esta região do diagrama HR, assim como a fase evolutiva que caracteriza tais estrelas, ficou sendo chamada de sequência principal. Aí encontramos, por exemplo, o nosso sol. Acima da sequência principal situam-se as gigantes vermelhas, estrelas muito luminosas, com temperaturas superficiais da ordem de $10^3 K$, e de grandes dimensões, com raios da ordem de 10^{12} cm. Abaixo da sequência principal encontramos a região das anãs brancas, estrelas de baixa luminosidade, pouco massivas, temperaturas superficiais da ordem de $10^4 K$ e muito compactas, com raios da ordem de 10^9 cm.

Uma estrela fica a maior parte de sua vida na sequência principal e, dependendo do valor de sua massa pode, após esse período, se deslocar rapidamente para a região das gigantes vermelhas ou para a região das anãs brancas. Entretanto, estrelas suficientemente massivas, após se tornarem gigantes, podem explodir violentamente como supernovas. A Astrofísica Nuclear Teórica estabelece esses três estágios como os fundamentais na vida de uma estrela, e busca esclarecê-los com base no conhecimento que adquirimos sobre o comportamento da matéria que compõe o interior estelar.

É graças à teoria da evolução estelar que ficamos sabendo, por exemplo, que a energia nuclear é a principal fonte de energia emitida pelas estrelas durante sua vida ativa. De fato, é apenas no interior estelar que ocorrem condições termodinâmicas propícias — isto é, condições de densidade, de temperatura e de pressão — capazes de provocar reações termonucleares entre os elementos químicos que compõem a matéria estelar.

Os ciclos de reações termonucleares nas estrelas iniciam-se com a fusão do hidrogênio, da qual resulta a síntese do hélio. No entanto, dependendo da magnitude de certos

parâmetros, como a massa da estrela, por exemplo, tais reações podem avançar para a nucleossíntese de elementos cada vez mais pesados, até o ponto em que todo o combustível nuclear disponível tenha sido exaurido. É por esta razão que podemos pensar as estrelas como os *laboratórios* onde se produziriam os elementos químicos presentes em nosso universo. Neste sentido, um dado importante para pôr à prova a teoria da evolução estelar é a abundância relativa dos elementos químicos existentes no sistema solar.

Um dos feitos mais relevantes realizados pela teoria da evolução estelar, como tentaremos mostrar aqui, foi o de ter conseguido relacionar cada período evolutivo de uma estrela com a fusão termonuclear de um determinado tipo de elemento químico.

1.2 Pré-Sequência Principal

Acredita-se que o nascimento de uma estrela seja originado por instabilidades gravitacionais na distribuição de matéria de um gás interestelar, fazendo com que o sistema se condense lentamente até se formar uma próto-estrela. Uma próto-estrela é composta basicamente de hidrogênio e uma pequena parcela de núclídeos mais pesados, como o hélio, o carbono, o nitrogênio, etc.

Com temperatura, densidade e raio da ordem de $10^4 K$, 1 partícula/cm³ e 10^{20} cm, respectivamente, a contração da próto-estrela prossegue até que a temperatura do material atinja o patamar de ionização. Como a energia de ionização um átomo leve é da ordem de dezenas de elétron-volts, vemos que a temperatura necessária para a ionização é de $\approx 10^6 K$. Para o Sol, por exemplo, que possui um núcleo composto de hidrogênio totalmente ionizado, estima-se que a temperatura central tenha um valor em torno de $2,5 \times 10^6 K$.

Durante o período inicial de formação, chamado de pré-sequência principal, a única fonte de energia da estrela é a gravitação. Pelo teorema do virial, é fácil mostrar que aproximadamente metade da energia gravitacional da contração do sistema é obrigato-

riamente convertida em energia térmica, fazendo aumentar a temperatura da estrela. A energia restante deve ser dissipada em forma de radiação emitida para fora do sistema e, também, para manter as correntes de convecção que se estabelecem no interior da massa gasosa em contração. Contudo, à medida que a densidade vai aumentando, esses movimentos turbulentos vão se restringindo às camadas mais externas, até que um núcleo denso e quente seja formado.

Quando o núcleo da estrela atinge condições termodinâmicas capazes de viabilizarem as reações termonucleares, a estrela para de se contrair e atinge, por um período de tempo relativamente prolongado, uma configuração de equilíbrio. A razão disto é a seguinte: consideremos a escala de tempo hidrodinâmico, definida por

$$t_H \approx \left(\frac{R}{g} \right)^{1/2}, \quad (1.2.1)$$

onde $g = GM/R^2$, sendo M a massa da estrela, R o raio e G a constante gravitacional; e a escala de tempo térmico, definida como

$$t_T \approx \frac{\epsilon_T}{L}, \quad (1.2.2)$$

onde ϵ_T é a densidade de energia térmica por partícula ($\approx kT$) e L a luminosidade. Acontece que, para os sistemas que estamos discutindo — as estrelas — verifica-se que $t_H \ll t_T$.

Para uma estrela como o sol, por exemplo, substituindo-se os respectivos valores de M , R , ϵ_T e L nas equações anteriores, obtemos

$$t_H \approx 10^3 s, \quad t_T \approx 10^7 s. \quad (1.2.3)$$

Sendo assim, somos obrigados a concluir que a estrela deve permanecer a maior parte do tempo de sua vida em estados de equilíbrio hidrostático onde a atividade térmica é predominante.

Notemos que este equilíbrio resulta de um balanceamento entre duas forças básicas: a força gravitacional e a força hidrostática, originada pela pressão exercida pelo gás. Ve-

jamos porque! Assumindo-se que a estrela é uma esfera de raio R ligada gravitacionalmente, e em equilíbrio, então sua energia total H deve satisfazer a seguinte condição de minimização:

$$\delta H = 0, \quad (1.2.4)$$

onde

$$H = - \int_0^{m(R)} \frac{Gm(r)dm(r)}{r} + \int_0^{m(R)} \epsilon_T(r)dm(r), \quad (1.2.5)$$

em que o primeiro termo do segundo membro é a energia potencial gravitacional, o segundo a energia térmica do sistema (ϵ_T representa a energia térmica específica), e

$$m(r) = \int_0^r 4\pi \rho(r')r'^2 dr', \quad (1.2.6)$$

é a massa total encerrada pelo raio r . Consequentemente, a Eq. (1.2.4) nos fornece a seguinte equação de equilíbrio hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}, \quad (1.2.7)$$

onde P e ρ denotam a pressão e a densidade no ponto r , respectivamente. Mediante a equação anterior, vemos que a força gravitacional é contrabalançada pela componente radial do gradiente da pressão, ao longo da estrutura da estrela.

Uma estrela permanece no estágio de pré-sequência principal durante um período de tempo relativamente curto, se comparado com o tempo que ela gastará na sequência principal. Para estrelas com massa igual a $1 M_{\odot}$ (*), por exemplo, este período é de aproximadamente 10^7 anos.

Ao entrar na sequência principal, a densidade média da estrela é aproximadamente igual a 1 g/cm^3 e a temperatura central da ordem de 10^6 K , quando então iniciam-se as reações termonucleares. Numa primeira etapa, essas reações irão transformar o hidrogênio em hélio, acionando nova fonte de energia para a estrela: a energia nuclear.

(*) Símbolo da massa do sol ($= 2,0 \times 10^{33} \text{ g}$).

1.3 Sequência Principal

Assim que ingressa na sequência principal, a estrela apresenta um núcleo denso de hidrogênio, extremamente quente e completamente ionizado, sítio onde se processarão as reações nucleares que servirão como a principal fonte de energia da estrela [5].

1.3.1 – As cadeias pp

Dadas as condições existentes no interior estelar, a fusão do hidrogênio se torna possível graças às chamadas cadeias pp , ou ciclo do hidrogênio, como também são conhecidas. A primeira delas, a cadeia pp I, é composta pelas reações



À medida que a abundância de ${}^4\text{He}$ e a temperatura do meio vão aumentando, outra cadeia — a pp II — entra em operação:

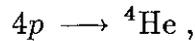


Outra cadeia — a pp III — pode operar também, dependendo da densidade do meio e da seção de choque do ${}^7\text{Be}$, que além de poder capturar elétrons, como ocorre na reação (1.3.2d) acima, pode também capturar prótons. Ela é formada pelas três primeiras reações da cadeia pp II, mais as seguintes:





Observe que o resultado final das três cadeias é sempre



cuja energia média liberada é da ordem de 26,7 MeV.

1.3.2 – O ciclo *CNO*

Existe um outro conjunto de reações capaz de processar a queima do hidrogênio: trata-se do ciclo *CNO*, ou ciclo do carbono, proposto independentemente em 1938 por von Weizsaker [6], e em 1939 por H. Bethe [7]. O ciclo *CNO* engloba as seguintes reações:



Embora com menor probabilidade, o ciclo pode se estender através das reações



fazendo aumentar a abundância do nitrogênio no meio.

A temperatura e a abundância de elementos químicos no centro da estrela é que ditarão qual dos dois ciclos será o dominante para a fusão do hidrogênio, se as cadeias pp ou se o ciclo CNO .

O tempo gasto pela estrela na sequência principal pode ser estimado [8] usando-se a seguinte expressão:

$$t_{sp} \approx \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{L_{\odot}}{L} \right) \times 10^{10} \text{ anos}, \quad (1.3.6)$$

onde L_{\odot} é a luminosidade do sol.

Após ter sido consumido todo o hidrogênio do caroço da estrela, o sistema assume a seguinte estrutura: um núcleo denso composto, agora, basicamente de ${}^4\text{He}$, e uma envoltória rica em hidrogênio. Não existindo condições termodinâmicas que possibilitem a fusão do hélio, as reações nucleares podem passar a ocorrer nas camadas externas, queimando o hidrogênio ali presente. Com o conseqüente aumento da temperatura, estas camadas se expandem, e a estrela move-se para a região das gigantes vermelhas do diagrama HR. O que acontecerá depois, vai depender fortemente da massa com que a estrela sai da sequência principal.

1.4 O Limite de Chandrasekhar

A massa é o parâmetro crítico que permite que se possa estabelecer tanto a sequência evolutiva como o ponto final da vida ativa de uma estrela. Sabe-se que existem limiares inferiores de massa para que cada etapa de queima de um dado tipo de elemento químico possa ocorrer. Tais limiares são necessários para que o material contido no centro da estrela atinja a temperatura apropriada para a ignição do combustível nuclear. Assim, cálculos recentes indicam que as massas mínimas requeridas para a queima do hidrogênio, do hélio, do carbono e do neônio são iguais, respectivamente, a 0,08, 0,25, 1,06 e $1,37M_{\odot}$ [9].

Existem dois aspectos importantes da evolução estelar que estão fortemente relacionados com a massa da estrela: o tempo gasto nos ciclos de reações nucleares e o

aparecimento de matéria degenerada no núcleo da estrela.

Como exemplificamos na Tabela I, as estrelas massivas ficam na sequência principal durante um período de tempo menor que as estrelas pouco massivas, isto é, elas são capazes de queimar o combustível nuclear disponível mais rapidamente do que as estrelas menos massivas e, por isso, são classificadas como estrelas da População I, ou seja, são estrelas jovens. As estrelas de massa pequena, em contrapartida, apresentam processos evolutivos mais lentos do que as primeiras e, por serem estrelas velhas, são classificadas como estrelas da População II. Como o tempo necessário para a queima do combustível nuclear é diretamente proporcional à razão M/L , onde M é a massa e L a luminosidade da estrela, vemos que as estrelas da População I são mais luminosas do que as que pertencem à População II.

Tabela I

Fase	T_c (25)	T_c (1)	ρ_c (25)	ρ_c (1)	Tempo (25)	Tempo (1)
Queima do H	5	2,5	5	100	2×10^6	10^{10}
Queima do He	20	10	700	4×10^4	5×10^5	10^8
Queima do C	80	—	2×10^5	—	60	—
Queima do Ne	150	—	4×10^6	—	1	—
Queima do O	200	—	10^7	—	0,5	—
Queima do Si	350	—	3×10^7	—	0,01	—
Colapso	600	—	3×10^9	—	10^{-6}	—

— Temperatura central T_c (KeV), densidade central ρ_c (g/cm^3) e escala de tempo (anos) para várias fases evolutivas de duas estrelas, uma de $25M_\odot$ e outra de $1M_\odot$. Adaptado da ref. [6].

Justamente por serem pouco massivas, as estrelas da População II apresentam um tendência de atingirem a degenerescência do seu material mais rapidamente que as da População I. Para aquelas, a degenerescência é um fator determinante ao longo de quase toda sua vida evolutiva. A degenerescência pode ocorrer em estrelas pouco massivas ($M \leq 0,5M_\odot$) já no início da sequência principal, enquanto que no caso de estrelas muito massivas ($M \geq 15M_\odot$) ela pode, praticamente, ser desprezada durante

sua vida ativa. A razão disto é que as estrelas pouco massivas são capazes de atingir densidades relativamente maiores, tendendo assim a desenvolver logo um caroço denso e degenerado.

Prosseguindo a discussão, vamos considerar, por simplicidade, uma estrela composta de matéria fria, isto é, a temperatura zero. Suponhamos que a equação de estado do gás de elétrons livres possa ser representada pela equação de estado de um gás politrópico, onde a pressão é dada pela relação (*)

$$P = K \rho^\Gamma, \quad (1.4.1)$$

onde ρ é a densidade de massa do meio, K uma constante e Γ o índice adiabático, definido por

$$\Gamma = \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}. \quad (1.4.2)$$

Se $\rho \ll 10^6 \text{ g/cm}^3$, o gás de elétrons está no domínio não-relativístico, e o índice adiabático vale 5/3. Neste caso, a pressão é dada explicitamente por

$$P = 1,0036 \times 10^{13} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \text{ erg/cm}^3, \quad (1.4.3)$$

onde μ_e é o peso molecular médio por elétron, definido por

$$\mu_e = \left(\sum_i \frac{Z_i X_i}{A_i} \right)^{-1}, \quad (1.4.4)$$

onde Z_i , A_i e X_i são o número atômico, o número de massa e a fração em massa do elemento i , respectivamente.

Entretanto, se os elétrons estiverem no regime ultra-relativístico de energia, o que ocorre se $\rho \gg 10^6 \text{ g/cm}^3$, então $\Gamma = 4/3$, e a equação de estado fica dada por

$$P = 1,2435 \times 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \text{ erg/cm}^3. \quad (1.4.5)$$

(*) Veja a seção 2.2.

A pressão gravitacional em cada ponto no interior da estrela é proporcional a $M^{2/3} \rho^{4/3}$. Portanto, se o gás de elétrons for não-relativístico, a pressão hidrostática será sempre suficiente para contrabalançar a pressão exercida pela força gravitacional, permitindo assim uma configuração de equilíbrio, qualquer que seja o valor da massa da estrela. Entretanto, se o gás de elétrons for extremamente relativístico, passa a existir um limite superior de massa para que a pressão hidrostática consiga evitar a contração gravitacional do sistema. Este limite foi estabelecido primeiramente por Chandrasekhar [11], podendo ser deduzido da seguinte forma: A equação de equilíbrio hidrostático, dada pela Eq. (1.2.7), pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho . \quad (1.4.6)$$

Introduzindo-se as variáveis θ e ξ , definidas de modo a que tenhamos [12]

$$\rho = \rho_c \theta^n , \quad (1.4.7)$$

e

$$r = a \xi , \quad (1.4.8)$$

onde

$$a = \left[\frac{(n+1)K \rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G \rho_c} \right]^{1/2} , \quad (1.4.9)$$

$\rho_c = \rho(r=0)$ é a densidade central, e n o índice politrópico, dado pela relação

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{n} , \quad (1.4.10)$$

podemos expressar a Eq. (1.4.6) na seguinte forma adimensional:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} + \theta^n = 0 , \quad (1.4.11)$$

conhecida como equação de Lane-Emden para um politrópico de índice n .

Este formalismo permite determinar o raio, a massa máxima e o perfil de densidade de uma esfera composta de um gás politrópico em equilíbrio, podendo ser aplicado em uma análise aproximada da estrutura de estrelas anãs brancas. Vejamos como:

Aplicando-se as seguintes condições de contorno, óbvias por si mesmas, para o centro da esfera:

$$\theta(r = 0) = 1, \quad (1.4.12)$$

e

$$\theta'(r = 0) = 0, \quad (1.4.13)$$

onde $\theta' \equiv d\theta/d\xi$, e $P = \rho = 0$, $\xi = \xi_1$, $\theta(\xi_1) = 0$ em $r = R$, onde R é o raio da esfera politrópica, podemos integrar numericamente a equação de Lane-Emdem, arbitrando-se para n e ρ_c valores fixos.

Se $n < 5$ ($\Gamma > \frac{6}{5}$), obtemos a seguinte expressão para o raio da esfera politrópica:

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \xi_1, \quad (1.4.14)$$

e

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 4\pi^2 \rho(r) dr \\ &= 4\pi a^2 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi, \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

para a massa total da esfera.

Usando-se (1.4.7) e (1.4.9) para se eliminar θ^n e a na equação anterior, obtemos

$$M = 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|. \quad (1.4.16)$$

Eliminando-se agora ρ_c entre as Eqs. (1.4.14) e (1.4.16), chegamos à seguinte relação entre a massa e o raio de uma esfera politrópica

$$M = 4\pi R^{\frac{3-n}{1-n}} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{n-1}} \xi_1^{\frac{3-n}{1-n}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|. \quad (1.4.17)$$

Pelo que foi discutido em parágrafos anteriores, nos interessam aqui as soluções para dois casos particulares, especificadas pelos seguintes conjuntos de parâmetros:

$$\Gamma = \frac{5}{3}, \quad n = \frac{3}{2}, \quad \xi_1 = 3,65375, \quad \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2,71406, \quad (1.4.18)$$

para o gás de elétrons não-relativístico presente numa anã branca com baixa densidade central, e

$$\Gamma = \frac{4}{3}, \quad n = 3, \quad \xi_1 = 6,89685, \quad \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2,01824, \quad (1.4.19)$$

se o gás de elétrons for extremamente relativístico, como é o caso em anãs brancas com densidade central grande.

No primeiro caso, o raio e a massa total para as configurações de equilíbrio são dados pelas expressões

$$R = 1,122 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ g/cm}^3} \right)^{-1/6} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/6} \text{ km}, \quad (1.4.20)$$

e

$$M = 0,7011 \left(\frac{R}{10^4 \text{ km}} \right)^{-3} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-5} M_\odot. \quad (1.4.21)$$

No segundo caso, obtemos

$$R = 3,347 \times 10^4 \left(\frac{\rho_c}{10^6 \text{ g/cm}^3} \right)^{-1/3} \left(\frac{\mu_e}{2} \right)^{-2/3} \text{ km}, \quad (1.4.22)$$

e

$$M = M_{Ch} = 1,457 \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 M_\odot. \quad (1.4.23)$$

Em resumo, quando assumimos o limite extremamente relativístico para o gás de elétrons, obtemos uma expressão para a massa que é independente de R e ρ_c . O valor encontrado é justamente o limite de Chandrasekhar (abreviadamente M_{Ch}), que fornece o valor máximo possível para a massa de uma anã branca. Observe também que a dependência do limite de Chandrasekhar com a composição química da estrela está inteiramente embutida no peso molecular médio por elétron, μ_e . Assim, para uma estrela composta de núcleos relativamente leves, para os quais $\mu_e \approx 2$, temos que

$$M_{Ch} \approx 1,46 M_\odot. \quad (1.4.24)$$

Para um caroço totalmente sintetizado a ^{56}Fe , como se presume existir nos instantes que precedem o colapso gravitacional de uma gigante vermelha, $M_{Ch} \approx 1,24M_{\odot}$.

1.5 Anã Branca

Se, ao sair da sequência principal, a massa da estrela for menor que o limite de Chandrasekhar, os fatores dominantes a partir de então serão a degenerescência do gás de elétrons e o esfriamento por emissão de radiação. Neste caso, tendo sido consumido todo o hidrogênio inicialmente disponível, a estrela se contrai até que o equilíbrio hidrostático seja restabelecido em virtude do aumento da pressão exercida pelo gás de elétrons, agora fortemente degenerado. Neste ponto, a temperatura superficial da estrela atinge valores da ordem de 10^4 K, densidade central $\approx 10^6$ g/cm³ e raio $\approx 10^9$ cm.

Não existindo condições termodinâmicas que permitam que a fusão do hélio, agora abundante no caroço, entre em operação, a estrela inicia um longo período de esfriamento, período este em que a luminosidade da estrela será originada apenas pela energia térmica dos núcleos não degenerados.

Este é o último estágio de atividade para estrelas deste porte, sendo chamado de anã branca. Pelo que foi discutido na seção anterior, sabemos que as anãs brancas são objetos altamente compactos, e que se mantêm em equilíbrio hidrostático perene em virtude da pressão da matéria fortemente degenerada existente em seu interior.

O tempo que uma estrela poderá gastar neste estágio vai depender fortemente da composição química e da temperatura central que a estrela possuir quando sair da sequência principal. Por exemplo, para uma configuração inicial típica com temperatura central igual a 5×10^6 K e número de massa $A = 20$, esse tempo é da ordem de grandeza de 10^9 anos. Ao fim desse período, a estrela terá se transformado em um objeto denso, frio e sem qualquer atividade: uma anã negra.

1.6 Gigante Vermelha

Se ao sair da sequência principal a massa da estrela for maior que o limite de Chandrasekhar, a pressão do gás de elétrons não será suficiente para impedir a contração gravitacional do caroço e, atingindo-se temperaturas da ordem de $10^8 K$ e densidades da ordem de 10^6 g/cm^3 , viabiliza-se a fusão termonuclear do hélio, enquanto que a envoltória da estrela continuará queimando o hidrogênio.

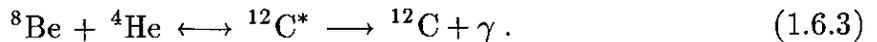
A fusão do ^4He ocorre através da chamada reação 3α , que em notação compacta se escreve



cuja energia média liberada é aproximadamente igual a 7,65 MeV. Esta reação ocorre em dois estágios, a saber: primeiramente, duas partículas alfa combinam-se durante um intervalo de tempo muito curto ($\approx 10^{-6} \text{ s}$) para formarem o núcleo do isótopo ^8Be , que é muito instável,



mas que, devido às condições existentes no meio, pode interagir com uma partícula alfa,



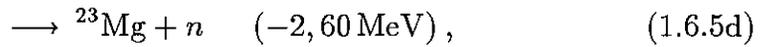
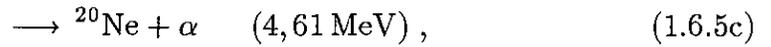
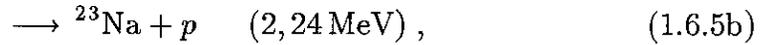
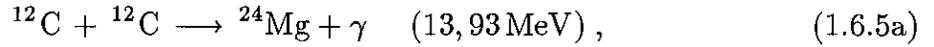
Após ter sido produzida uma quantidade suficiente de carbono, o hélio poderá ser consumido por outra reação, dada por



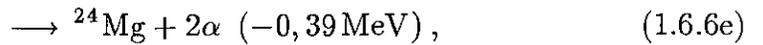
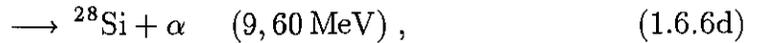
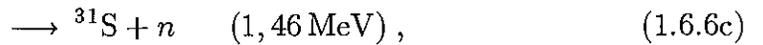
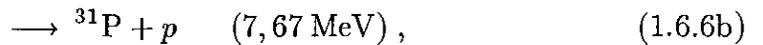
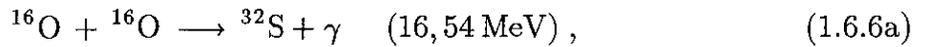
com a qual começa a ser sintetizado o oxigênio.

Encerrado o ciclo da queima do hélio no núcleo da estrela, composto agora basicamente de carbono e oxigênio, há uma nova contração das camadas centrais, enquanto que a envoltória se expande. Com a queda da temperatura, cessa também a queima

do hidrogênio nas camadas mais externas. Naturalmente, o próximo ciclo deverá ser a queima do carbono e do oxigênio disponível no caroço da estrela, caso a massa do caroço seja maior que o correspondente limite de Chandrasekhar. A fusão do carbono se realiza por um dos seguintes canais:



Quanto ao oxigênio, ele pode ser queimado através dos canais:



onde o ^{28}Si aparece como o principal núcleo sintetizado. Por sua vez, este núcleo pode participar da seguinte reação fotonuclear:



A partir da queima do silício, vão se processar outras reações termonucleares cujo resultado final será a síntese de núcleos cada vez mais pesados, até que sejam sintetizados os elementos químicos pertencentes ao chamado grupo do ferro. Como se sabe, dos elementos da tabela periódica conhecidos, é justamente o ^{56}Fe que possui a máxima energia de ligação por nucleon, sendo, por isso mesmo, o elemento mais estável (Qualquer

processo de fusão que inclua o ^{56}Fe só pode ser endotérmico.). Deste ponto em diante, encerram-se os ciclos de reações termonucleares no interior da estrela.

Ao final deste estágio de evolução, a estrela está com a seguinte estrutura: um caroço extremamente quente e denso, todo sintetizado a ^{56}Fe , envolvido por outras camadas menos densas e compostas por núcleos mais leves onde, provavelmente, prosseguem as reações termonucleares. Na Fig. 1.1, representamos ilustrativamente a configuração final da estrela, em que prevalece uma estrutura de camadas.

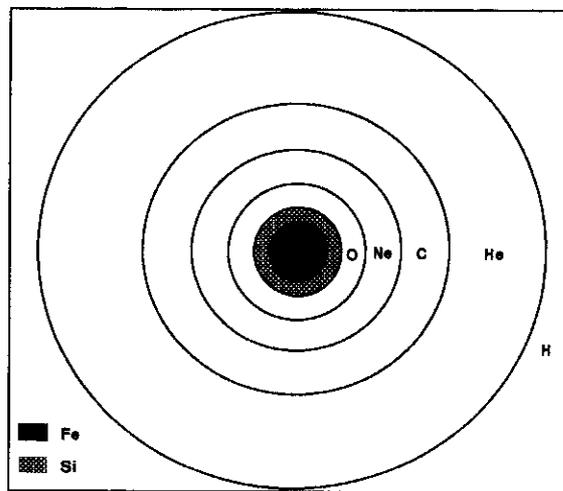


Fig. 1.1 – Estrutura de camadas, ou de cebola, de uma estrela no estágio de pré-supernova. O centro da estrela apresenta um caroço denso de ^{56}Fe , com massa em torno de $1,4M_{\odot}$.

Como a fonte de energia nuclear é interrompida, o caroço da estrela se contrai, usando, dessa forma, a energia gravitacional disponível. Com a contração, toda a estrutura evolui rapidamente em direção a uma configuração altamente instável, desencadeando-se reações ultra-rápidas. Com temperatura $\approx 10^9 \text{ K}$ e densidade $\approx 10^9 \text{ g/cm}^3$, o sistema caminha rapidamente para o colapso gravitacional: é o começo do fim para a estrela. Esta configuração é chamada de pré-supernova. A partir de então, passam a ocorrer processos fortemente endotérmicos, como a fotodissociação do ^{56}Fe e a captura eletrônica,

levando a uma brusca redução da pressão e da energia térmica do gás de elétrons. Como consequência, o equilíbrio hidrostático é rompido e as regiões centrais da estrela, que compõem o caroço de Fe, entram em colapso gravitacional, ou seja, implodem.

Durante o colapso gravitacional, a matéria estelar torna-se rica em nêutrons, em virtude da captura de elétrons pelos núcleos, ao passo que, em frações de segundo, as camadas centrais implodem com velocidades características da ordem de grandeza da velocidade de queda livre do sistema. Nestas condições catastróficas, a equação de estado sofre uma mudança funcional brusca, passando a depender essencialmente da densidade, em virtude da forte degenerescência dos elétrons.

Nos instantes finais do colapso, a temperatura e a densidade assumem valores extremos, da ordem de $10^{10} K$ e 10^{14} g/cm^3 , respectivamente, e um caroço duro e rico em nêutrons é formado. Por razões que ainda não estão bem esclarecidas para a Astrofísica Nuclear, a implosão é bruscamente invertida numa violenta expansão, originando um evento de explosão de supernova.

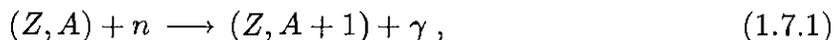
1.7 Nucleossíntese dos Elementos Pesados

A nucleossíntese dos elementos químicos até o grupo do Fe, como vimos, tem a sua origem determinada pelas reações termonucleares presentes no interior estelar.

Contudo, a fusão do Fe é inviável por causa da elevada barreira coulombiana a ser vencida, o que exigiria para a matéria estelar temperaturas superiores a $5 \times 10^9 K$. Entretanto, frente a temperaturas tão elevadas, o mais provável é a fotodesintegração dos núcleos do que a fusão.

Como então a teoria padrão de evolução estelar explica a abundância dos elementos pesados, vale dizer, daqueles elementos mais pesados que o Fe? A idéia mais aceita é a de que esses núcleos seriam formados através de três processos básicos: a captura lenta de nêutrons (processo-*s*), a captura rápida de nêutrons (processo-*r*) e a captura de prótons (processo-*p*).

A baixas temperaturas, os núcleos podem capturar nêutrons durante dois estágios de evolução: na fase de gigante vermelha, para o processo- s , e durante uma explosão de supernova, para o processo- r . No primeiro caso, núcleos pesados podem capturar nêutrons livres de baixas energias, produzidos pelo grupo de reações (1.6.5) e (1.6.6), através da reação



favorecida pelo fato de não envolver nenhuma barreira coulombiana a ser vencida. Se o núcleo $(Z, A + 1)$ resultante for estável contra decaimento beta, ele poderá, eventualmente, capturar mais nêutrons, caminhando na direção de um isótopo cada vez mais rico em nêutrons. Em caso contrário, haverá uma competição entre o decaimento beta e a captura de nêutrons. No entanto, para que ocorra o processo- s , é imperativo que a taxa de captura de nêutrons seja muito menor que a de decaimento beta. Segundo Burbidge *et al.* [5], é mais provável que o processo- s ocorra durante a fase de gigante vermelha da estrela.

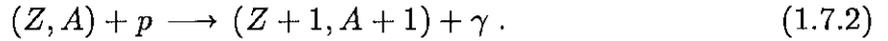
A outra alternativa é o processo- r : Se no meio houver um fluxo de nêutrons intenso, entre 10^{22} e 10^{26} nêutrons/cm²/s, a captura de nêutrons pode ser mais rápida que o decaimento beta. Neste contexto, o núcleo segue capturando nêutrons, um de cada vez, até que a energia de separação de um nêutron (S_n) se torne tão baixa que ele não poderá mais capturar nêutrons. A partir de então, o núcleo, rico em nêutrons, vai realizar sucessivos decaimentos beta tornando-se, assim, mais rico em prótons. Quando valores de Z muito grandes forem atingidos, o processo- r passará a competir com o processo de fissão dos núcleos formados.

Vale ressaltar, contudo, que a formação de núcleos pesados através do processo- r requer, além da presença de um fluxo de nêutrons bastante intenso, que a temperatura seja suficientemente baixa de modo a que os núcleos que vão sendo formados não sejam fotodesintegrados.

Naturalmente, o sítio mais provável para o processo- r deve ser a explosão de uma supernova. De fato, a onda de choque gerada durante a explosão, ao atravessar as

camadas mais externas e frias da estrela, libera uma grande quantidade de nêutrons, os quais podem ser capturados pelos núcleos.

A síntese dos núcleos ricos em prótons ocorre mediante o processo- p [5], ou seja, pela captura de prótons por núcleos, através da reação



A baixa abundância relativa destes núcleos refletiria a baixa presença de prótons na matéria estelar, causada pela captura eletrônica.

1.8 Supernovas, Estrelas de Nêutrons e Buracos Negros

São identificadas duas classes de supernovas: as do Tipo I (SNI) e as do Tipo II (SNII). Fundamentalmente, o que distingue uma classe de outra são a curva de luz, ou seja, o modo como a luminosidade da supernova se comporta em relação ao tempo, o intervalo de massa para a estrela progenitora e o mecanismo de explosão.

Uma SNI gasta aproximadamente 50 dias para atingir seu brilho máximo, tendo como principal característica a regularidade da sua curva de luz. Por outro lado, existem evidências observacionais de que as SNI's estejam associadas a estrelas binárias [13]. Assim, o fluxo de matéria oriundo da companheira faz com que a massa da anã branca exceda o limite de Chandrasekhar, levando-a a entrar em colapso gravitacional e a desencadear, por exemplo, a detonação do carbono como mecanismo de explosão (*). Podemos acrescentar ainda que não há nenhum registro de uma estrela de nêutrons que seja remanescente da explosão de uma SNI [14]. Presume-se, também, que as SNI's tenham como progenitoras estrelas velhas, isto é, estrelas da População II, e pouco massivas, cujo intervalo de massa é $4M_{\odot} \leq M \leq 8M_{\odot}$.

Por seu turno, as SNII's apresentam curvas de luz irregulares e são, pelo que se acredita, o resultado final da evolução de estrelas jovens (População I) e massivas, com

(*) Veja mais adiante a seção 1.10.2.

$8M_{\odot} \leq M \leq 60M_{\odot}$. Após passarem por vários ciclos de nucleossíntese, tais estrelas entram em colapso gravitacional e explodem violentamente, deixando como resultado um caroço denso e rico em nêutrons. Como ilustração, mostramos na Tabela II algumas propriedades que distinguem os dois tipos de supernovas.

Tabela II

Tipo de Supernova	SNI	SNII
Massa ejetada	$\approx 0,1 - 1M_{\odot}$	$>5M_{\odot}$
Velocidade	$\approx 10^9 \text{ cm/s}$	$\approx 5 \times 10^9 \text{ cm/s}$
Energia cinética	$\approx 5 \times 10^{50} \text{ erg}$	$\approx 10^{51} \text{ erg}$

Características das Supernovas Tipos I e II.

Já foram registradas, em nossa galáxia, seis eventos de supernovas, e destas a mais célebre é a que resultou na Nebulosa do Carangueijo, localizada na Constelação de Touro, observada pelos chineses no ano de 1054, e no centro da qual está o pulsar do Carangueijo.

Após explodir violentamente como supernova Tipo II, restará no centro da estrela um caroço compacto que pode, conforme o valor da sua massa, atingir uma configuração dinamicamente estável: uma estrela de nêutrons. Segundo as muitas evidências observacionais disponíveis, acredita-se que os pulsares sejam estrelas de nêutrons girantes. Esta hipótese, hoje praticamente um consenso entre os astrofísicos, foi aventada inicialmente por Gold [15], em 1968, logo após a primeira observação de um pulsar, feita por Hewish et al. [16] em 1967.

A densidade no centro de uma estrela de nêutrons pode chegar a assumir valores maiores que a densidade de saturação da matéria nuclear ($\rho_0 = 0,15 \text{ nucleons/fm}^3$) e, por isso mesmo, contrariamente ao que ocorre no caso das anãs brancas, o limite superior de massa de uma estrela de nêutrons não está ainda bem estabelecido, uma vez que a equação de estado da matéria estelar quente, no regime supranuclear de densidade, não

é bem conhecida ainda. Em vista disto, o limite superior de massa para uma estrela de nêutrons é fortemente dependente do tipo de equação de estado que é implementada nos cálculos de estrela de nêutrons. Por exemplo, o primeiro cálculo neste sentido foi realizado em 1939 por Oppenheimer e Volkoff [17]. Para tanto eles usaram a equação de estado de um gás ideal de nêutrons livres e uma equação de equilíbrio hidrostático obtida da Relatividade Geral, e encontraram o valor limite de $3/4 M_{\odot}$ para uma estrela de nêutrons. A equação de equilíbrio hidrostático, neste caso, pode ser obtida fazendo-se as seguintes substituições na Eq. (1.2.7):

$$m(r) \longrightarrow m(r) + \frac{4\pi P r^3}{c^2}, \quad (1.8.1)$$

$$\rho \longrightarrow \rho + \frac{P}{c^2}, \quad (1.8.2)$$

$$r^2 \longrightarrow r^2 \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right). \quad (1.8.3)$$

Mais recentemente, à guisa de exemplo, Glendenning [18], usando uma equação de estado obtida da QHD, obteve o limite de $M \approx 1,81M_{\odot}$ para uma estrela de nêutrons rica em híperons, com raio $\approx 11,3$ km e densidade central igual a $2,4 \times 10^{15}$ g/cm³ (aproximadamente 8 vezes o valor da densidade da matéria nuclear saturada).

Entretanto, se a massa do caroço remanescente for maior que este limite, ele deverá reimplodir após a explosão da supernova, dando origem a um buraco negro. Para o caso mais simples, isto é, simetria esférica, a Teoria da Relatividade Geral prevê que para um observador remoto, localizado fora da ação do campo gravitacional da estrela, o raio desse caroço tenderá assintoticamente para o valor [12]

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1.8.4)$$

conhecido como raio de Schwarzschild.

1.9 Mecanismos de Implosão

Consideremos um caroço esférico de massa M e raio R . A escala de tempo de queda livre do sistema é dada por

$$t_{gl} \approx \left[\frac{2R^3}{GM} \right]^{1/2}. \quad (1.9.1)$$

Como exemplo, consideremos um caroço típico de uma pré-supernova com $M \approx 1,5M_{\odot}$ e $R \approx 10^8$ cm. Substituindo-se esses valores na equação acima, encontramos $t_{gl} \approx 50$ milissegundos.

Ora, dizemos que ocorre um colapso gravitacional quando a escala de tempo da contração do sistema tem a mesma ordem de grandeza do tempo de queda livre. A pergunta que cabe então é a seguinte: Que processos físicos, atuando durante frações de segundo, seriam capazes de levar um caroço denso e quente a implodir, isto é, a entrar em colapso gravitacional?

Os mecanismos físicos que podem ocasionar o processo de implosão são os seguintes:

1.9.1 – Fotodissociação do ^{56}Fe

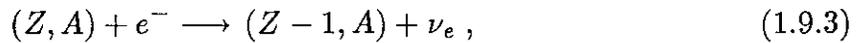
Em 1957, Burbidge *et al.*[5] propuseram a seguinte reação fotonuclear para acionar a implosão:



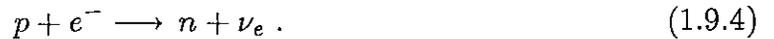
Trata-se de uma reação fortemente endotérmica, capaz de consumir do sistema aproximadamente $2,1 \times 10^{18}$ erg/g. Lembremos que o ^{56}Fe é, precisamente, o produto final dos ciclos de nucleossíntese, e que precedem à formação do caroço de pré-supernova.

1.9.2 – Captura Eletrônica

Outro mecanismo que pode acionar o colapso gravitacional é o processo de captura eletrônica. Depois que o ^{56}Fe é sintetizado, o caroço da gigante vermelha se contrai lentamente, fazendo com que a densidade se eleve gradualmente. Com isso, o potencial químico dos elétrons cresce na mesma medida em que diminui o volume do sistema. Para densidades da ordem de 10^9 g/cm^3 , o potencial químico dos elétrons é de $\approx 10 \text{ MeV}$, e a seguinte reação é energeticamente possível:



conhecida como captura eletrônica. Na equação acima, (Z, A) representa o núcleo original de número atômico Z e número de massa A . Os prótons livres, eventualmente presentes no meio, também podem participar do processo, através da reação



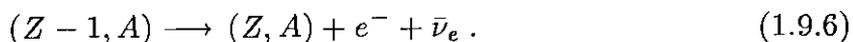
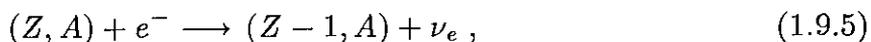
Notemos que a captura eletrônica constitui um processo duplamente endotérmico: por um lado, ela reduz tremendamente o número de elétrons do sistema, diminuindo a pressão e a energia interna do gás e, por outro lado, através do fluxo de neutrinos abundantemente emitidos para fora do sistema nos instantes iniciais do colapso, às custas da energia dos elétrons. De fato, em 1964 Bahcall [19] calculou a taxa de captura eletrônica para as condições reinantes em uma pré-supernova, e mostrou que a captura eletrônica comporta-se como um mecanismo de implosão muito eficiente.

Outro aspecto importante sobre a captura eletrônica está relacionado com o fato dela produzir uma tremenda neutronização da matéria estelar. O processo de neutronização desempenha um papel fundamental nos instantes finais do colapso gravitacional, pelo seguinte: quando a densidade atinge o valor de $4,0 \approx 10^{11} \text{ g/cm}^3$, os núcleos, ricos em nêutrons, com número de massa grande e distantes do vale de estabilidade beta, começam a evaporar nêutrons. Os nêutrons livres formam um gás, e quando

a densidade desse gás torna-se suficientemente grande, a interação hadrônica passa a determinar o rumo dos acontecimentos. Por outro lado, os neutrinos produzidos pela captura eletrônica ficam confinados no caroço da estrela durante o colapso, afetando fortemente a dinâmica do mesmo. Este tópico sobre o confinamento dos neutrinos, em particular sua influência sobre a composição química e a equação de estado da matéria estelar, será discutido com mais detalhes no Capítulo 4.

1.9.3 – Processo Urca

Proposto em 1941 por Gamow e Schoenberg [20], o assim chamado processo Urca (*) consiste no seguinte ciclo:



Na primeira reação (uma captura eletrônica), uma fração da energia do elétron é usada na criação de um neutrino e , na segunda reação (um decaimento beta), o núcleo resultante da primeira reação decai, convertendo parte da energia do processo em um anti-neutrino. Observe que o núcleo original é sempre recuperado ao final do ciclo, cumprindo apenas o papel de catalizador do processo.

Vemos assim que o processo Urca constitui um mecanismo de produção de neutrinos às custas da energia dos elétrons, sendo, portanto, um processo endotérmico capaz de reduzir a pressão do gás de elétrons.

Porém, é pouco provável que o processo Urca seja um mecanismo eficiente de implosão. A razão é que, com o aumento da energia de Fermi dos elétrons, a segunda reação do processo fica fortemente inibida em virtude da elevada degenerescência dos

(*) Nome dado pelos autores em homenagem ao extinto cassino da Urca. A analogia está em que, num cassino, o que é “dissipado” nos ciclos de apostas é ... o dinheiro do jogador.

elétrons (princípio de exclusão de Pauli).

1.10 Mecanismos de Explosão

Entre os mecanismos que podem provocar uma explosão de supernova, os principais são os seguintes:

1.10.1 – Transporte de Momento por Neutrinos

O transporte de momento por neutrinos, proposto em 1975 por Schramm e Arnett [21], consiste essencialmente no seguinte: Supondo-se que a dinâmica do colapso respeite a simetria esférica, a aceleração por unidade de massa é dada pela expressão

$$\ddot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{Gm}{r^2} + \frac{Fk_\nu}{c}, \quad (1.10.1)$$

onde F representa o fluxo de energia dos neutrinos, k_ν a opacidade do meio aos neutrinos e c a velocidade da luz. Observando que o terceiro termo do lado direito dá uma contribuição positiva para a aceleração, uma explosão pode ocorrer se

$$\frac{Fk_\nu}{c} > \frac{Gm}{r^2}, \quad (1.10.2)$$

isto é, se a luminosidade de neutrinos for maior que um certo valor crítico, definido por

$$L_\nu = \frac{4\pi Gm}{k_\nu}, \quad (1.10.3)$$

conhecido como *limite de Eddington*. No entanto, observe que uma grande opacidade aos neutrinos enfraquece enormemente o transporte de momento por eles, pelo fato de L_ν depender do inverso da opacidade.

Na verdade, como discutiremos no Capítulo 4, os processos de interação fraca com corrente neutra levam os neutrinos a ficarem confinados no caroço durante um intervalo de tempo cuja ordem de grandeza é muito maior que o tempo característico de colapso. Assim, o confinamento dos neutrinos praticamente inviabiliza qualquer mecanismo de explosão que seja fundamentado em transporte de momento ou energia por neutrinos.

1.10.2 – Queimas Termonucleares Explosivas

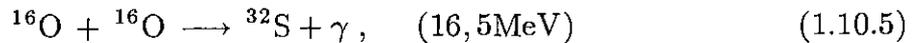
Em condições de densidade e temperatura específicas, e sendo a matéria estelar degenerada, as reações termonucleares podem se tornar explosivas. Neste contexto, as queimas termonucleares explosivas aparecem como possíveis mecanismos de explosão. Como foi visto na seção 1.6, um dos canais possíveis para a fusão do carbono é dada pela reação



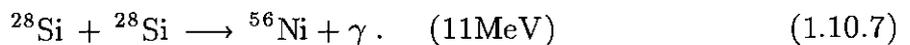
Se o material do caroço apresentar baixa degenerescência, a queima do carbono ocorrerá não explosivamente, pois, neste caso, a pressão do gás atua como um termostato, de forma que, se a temperatura aumenta, o sistema expande fazendo baixar a pressão e mantendo aproximadamente constante a taxa de reação. Mas, num gás fortemente degenerado a pressão depende fracamente da temperatura e nada impede que a temperatura, e conseqüentemente também a taxa de reação, aumentem muito. Neste caso, a reação (1.10.4) pode ocorrer numa escala de tempo tão pequena, que a queima do carbono pode se tornar explosiva.

Um ponto fraco deste mecanismo para explicar a explosão de supernova é que ele deve conduzir a estrela a uma total destruição, sem deixar um caroço denso remanescente. Apesar disto, pode ser que a detonação do carbono, e de outros elementos, atuem na explosão de supernovas do Tipo I.

Outras possibilidades são: a detonação do oxigênio, através da reação



e a detonação do silício,



1.10.3 – *Bounce* Hidrodinâmico

Outro mecanismo de explosão, proposto em 1960 por Colgate e Johnson [22], Bruenn [23] em 1975, e Bethe *et. al* [24] em 1979, é o *bounce* hidrodinâmico.

Nos instantes finais do colapso, o caroço da estrela inverte repentinamente o sentido de movimento (*bounce*), ao mesmo tempo em que as camadas externas próximas ao caroço – em movimento quase de queda livre – colidem violentamente com um caroço denso e duro, sendo então refletidas. A onda de choque gerada durante o choque de reflexão pode, eventualmente, ejetar as camadas externas inicialmente em colapso, juntamente com o restante da estrutura da estrela. Para podermos visualizar melhor a natureza deste mecanismo, consideremos novamente a Eq. (1.10.1). Na ausência do transporte de neutrinos, aquela equação torna-se

$$\ddot{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{Gm}{r^2}, \quad (1.10.7)$$

O sinal da aceleração em cada ponto do fluido depende da competição entre o termo dado pelo gradiente da pressão hidrostática e o termo dado pela força gravitacional. Ocorrerá um *bounce* se o primeiro termo for maior que o segundo, o que poderá, em geral, levar o caroço a oscilar. Portanto, dependendo do comportamento da equação de estado, o gradiente de pressão pode se tornar muito maior que o termo gravitacional, de modo que o subsequente *bounce* possa gerar uma forte onda de choque. Para que isso aconteça, entretanto, é necessário que nos instantes finais do colapso o índice adiabático varie subitamente de um valor abaixo de 4/3 para um valor acima de 5/3.

Vamos considerar, por simplicidade, um caroço composto de gás politrópico em contração homóloga (velocidade em cada ponto do fluido proporcional ao raio). A equação de estado, neste caso, é dada pela Eq. (1.4.1) sendo que

$$\rho \approx \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3, \quad (1.10.8)$$

de modo que

$$\frac{dP}{dr} = -3\Gamma \left(\frac{P}{r} \right), \quad (1.10.9)$$

e, portanto,

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3\Gamma-4} \right], \quad (1.10.10)$$

onde r_0 é o raio do caroço quando em equilíbrio estático. Notemos então o seguinte: se $\Gamma < 4/3$ e $r < r_0$, temos que $\ddot{r} < 0$, isto é, o caroço fica em colapso. Entretanto, se no final do colapso o índice adiabático passa subitamente para, digamos, $5/3$, então $\ddot{r} > 0$: é o *bounce*, portanto.

A propósito, lembremos que uma onda de choque constitui, basicamente, uma propagação de discontinuidades: descontinuidade na pressão, na densidade, na temperatura e no campo de velocidade através da frente da onda de choque. A descrição de uma onda de choque deve satisfazer às chamadas condições de Hugoniot-Rankine [25], dadas por

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{u_0}{u_1}, \quad (1.10.11)$$

$$u_0 - u_1 = [(P_1 - P_0)(v_0 - v_1)]^{1/2}, \quad (1.10.12)$$

e

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2} (P_1 + P_0)(v_0 - v_1), \quad (1.10.13)$$

que expressam, respectivamente, as leis da conservação da massa, do momento e da energia através da frente de onda. Nas três equações acima, os subíndices 1 e 0 denotam, pela ordem, a região do meio perturbada pela onda e a não perturbada. P , v , u e ε representam, respectivamente, a pressão, o volume específico, a velocidade do meio em relação à frente da onda de choque e a energia interna por unidade de massa.

Referências

- [1] Clayton, D.D., “Principles of Stellar Evolution”, MacGraw–Hill (1968). Vitense, E.B., “Introduction to Stellar Astrophysics”, Vol.III, Cambridge University Press (1992).
- [2] Chiu, H.Y., “Stellar Physics”, Vol. I, Blaisdel Publishing Company (1968)
- [3] Chandrasekhar, S., “An Introduction to the Study of Stellar Structure”, Dover Publications (1957).
- [4] Zeldovich, Y.B. e Novikov, I.D., “Relativistic Astrophysics”, Vol. I, University of Chicago Press (1971).
- [5] Burbidge, E.M., Burbidge, G.R., Fowler, W.A e Hoyle, F., Rev. Mod. Phys., **29** (1957), 547.
- [6] Weizsäcker, C.F., Phys. Z., **39** (1938), 633.
- [7] Bethe, H., Phys. Rev., **55** (1939), 434.
- [8] Mazurek, T.J., Astrophys. J., **207** (1976), L87.
- [9] Nomoto, K. e Hashimoto, M., Prog. Nucl. Phys., **17** (1986), 267.
- [10] Cooperstein, J., Bethe, H.A. e Brown, G.E., Nucl. Phys., **A, 429** (1984), 527.
- [11] Chandrasekhar, S., “An Introduction to the Study of Stellar Structure”, Dover Publications (1957).
- [12] Shapiro, S.L. e Teukolsky, S.A., “Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars – The Physics of Compact Objects”, John Wiley & Sons, U.S.A. (1983).
- [13] Woosley, S.E. e Weaver, T.A., Ann. Astron. Astrophys., **24** (1986), 205.
- [14] Trimble, V., Rev. Mod. Phys., **54** (1982), 1183.

- [15] Gold, T., *Nature*, **218** (1968), 731.
- [16] Hewish, A., Bell, S.J., Pilkington, J.D.H., Scott, P.F. e Collins, R.A., *Nature*, **217** (1967), 709.
- [17] Oppenheimer, J.R. e Volkoff, G.M., *Phys. Rev.*, **55** (1939), 374.
- [18] Glendenning, N.K., *Astrophys. J.*, **293** (1985), 470.
- [19] Bahcall, J.N., *Astrophys. J.*, **139** (1964), 318.
- [20] Gamow, G. e Schoenberg, M., *Phys. Rev.*, **59** (1941), 539.
- [21] Schramm, D.N. e Arnett, W.D., *Ap. J.*, **198** (1975), 628.
- [22] Colgate, S. e Johnson, M.J., *Phys. Rev. Lett.*, **5** (1960), 235.
- [23] Bruenn, S.W., *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, **262** (1975), 80.
- [24] Bethe, H.A., Brown, G.E., Applegate, J. e Lattimer, J.M., *Nucl. Phys. A* **324** (1979), 487.
- [25] Zeldovich, Y.B. e Raizer, Y.P., “*Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*”, Academic Press, Inc. (1970).

Equação de Estado da Matéria Estelar no Regime Subnuclear

2.1 Introdução

Durante o colapso gravitacional, a matéria estelar passa por três regimes de densidade: o subnuclear sem nêutrons livres, o subnuclear com nêutrons livres e o hadrônico, incluindo a transição de fase à matéria nuclear.

O primeiro regime varre o intervalo de densidades que vai de $\rho \approx 10^4 \text{ g/cm}^3$ até $\rho \approx 4,3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$, que corresponde ao valor de densidade onde se inicia a evaporação de nêutrons pelos núcleos altamente neutronizados. Nesta faixa de densidade, a matéria estelar é composta por núcleos e um gás de elétrons uniforme, cuja degenerescência cresce monotonicamente com a densidade. Ao contrário dos núcleos, que são muito mais pesados e não degenerados, é o gás de elétrons que dá a principal contribuição tanto para a pressão como para a energia interna da matéria estelar, podendo ser tratado, em primeira aproximação, como um gás ideal quântico. Este assunto será tratado na primeira seção deste capítulo, dedicada a um estudo introdutório sobre o gás ideal de Fermi, onde apresentamos a equação de estado de um gás de elétrons livres. Na terceira seção, vamos discutir a necessidade de se introduzir uma correção relevante na equação

de estado do gás de elétrons, proveniente do fato de que os núcleos se distribuem em uma rede cristalina, quando se utiliza a aproximação de temperatura zero ao se analisar as propriedades básicas da matéria estelar densa. Aliás, queremos frisar que esta será a aproximação adotada, neste trabalho, em todos os regimes de densidade, sempre que o nosso objetivo for o de estudar a equação de estado da matéria estelar. Na seção quarta, apresentaremos a equação de estado para o regime subnuclear sem nêutrons livres, obtida por Baym, Pethick e Sutherland [1] em 1971, e que será usada neste trabalho.

O regime subnuclear com nêutrons livres se caracteriza pelo processo de evaporação de nêutrons pelos núcleos, o que começa a ocorrer a partir de $\rho \approx 4,3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$, e se estende até $\rho \approx 2,8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, que é o valor da densidade de saturação da matéria nuclear ordinária. Nesse estágio, a matéria torna-se crescentemente rica em nêutrons livres, de um lado, e o número de elétrons fica drasticamente reduzido, de outro, como consequência do processo de captura eletrônica. Nesta faixa de densidade, os nêutrons livres – degenerados – surjem como a principal fonte para a pressão e para a energia interna. Esta mudança na composição química da matéria estelar é a responsável pelo crescimento do índice adiabático nos instantes finais do colapso, ocasionando uma violenta inversão do colapso (*ibounce*) em uma explosão. Para o regime subnuclear com nêutrons livres, usaremos a equação de estado de Baym, Bethe e Pethick [2], que será apresentada, em linhas gerais, na última seção deste capítulo.

Nos instantes finais do colapso, a densidade da matéria estelar atinge valores superiores ao da densidade da matéria nuclear normal, e os graus de liberdade de um condensado hadrônico passam a ser os principais protagonistas dos acontecimentos. Inicialmente, os núcleos se dissolvem, perdendo sua existência individual, para formarem um gás de nêutrons, prótons, elétrons, múons e, possivelmente, neutrinos. Com o aumento da densidade e, portanto, da energia disponível no sistema, outros hádrons, mais pesados, como os híperons, vão sendo criados.

Por sua maior complexidade e por se constituir numa das contribuições a ser ap-

resentada neste trabalho, o estudo da equação de estado neste regime de densidade — isto é, o regime hadrônico — será deixado para os Capítulos 3 e 4.

2.2 Gás Ideal de Fermi

Um gás de Fermi é um gás ideal cujas partículas constituintes obedecem à Estatística de Fermi–Dirac. Já dissemos que o gás de elétrons é a componente dominante para a pressão nos instantes iniciais do colapso gravitacional. Além disso, as condições de densidade e temperatura, presentes na matéria estelar durante o colapso, permitem que se aplique a aproximação $T = 0$, o que equivale a dizer-se que os elétrons podem ser descritos como um gás de Fermi completamente degenerado.

Consideremos um sistema composto de férmions independentes e encerrados dentro de um volume V . A estatística de Fermi–Dirac prevê que a função de partição *grand canônica* [3–5] para tal sistema é dada pela expressão

$$\Xi = \prod_q [e^{(\mu - \epsilon_q)/kT} + 1], \quad (2.2.1)$$

onde ϵ_q é a energia de cada partícula, μ o potencial químico, k a constante de Boltzmann e T a temperatura do sistema. O índice q indica que o produtório varre todos os estados quânticos de uma partícula.

O número de partículas por unidade de volume é dado por

$$n \equiv \frac{kT}{V} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi = \frac{1}{V} \sum_q \bar{n}_{\epsilon_q}, \quad (2.2.2)$$

onde

$$\bar{n}_{\epsilon_q} = \frac{1}{e^{(\epsilon_q - \mu)/kT} + 1}, \quad (2.2.3)$$

é a *função de distribuição* de Fermi, que representa o número de ocupação médio do nível de energia ϵ_q .

No *ensemble grand canônico*, a pressão é definida por

$$\frac{PV}{kT} = \ln \Xi = \sum_q \ln [e^{(\mu - \epsilon_q)/kT} + 1]. \quad (2.2.4)$$

Contudo, se o espectro de energia das partículas for contínuo, devemos substituir o somatório na equação anterior por uma integral no espaço de fase, varrendo todos os estados acessíveis de energia para as partículas. Assumindo-se que ϵ_q não depende da posição, isto equivale a operarmos a seguinte substituição

$$\sum_q \rightarrow \frac{g}{h^3} \int d^3x d^3p = g \frac{V}{h^3} \int d^3p,$$

onde h é a constante de Planck e h^3 o volume de uma célula unitária no espaço de fase. O fator g representa a degenerescência de uma partícula de momento \vec{p} . Para partículas massivas, $g = 2S + 1$, onde S é o spin (por exemplo, para elétrons e nêutrons $g = 2$). Para os fótons $g = 2$, e para neutrinos $g = 1$. Seguindo-se as prescrições observadas acima, as Eqs. (2.2.2) e (2.2.4) tornam-se

$$n = \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} dp, \quad (2.2.5)$$

e, após uma integração por partes,

$$P = \frac{g}{6\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^3}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} \frac{\partial \epsilon}{\partial p} dp. \quad (2.2.6)$$

A energia interna do gás, \mathcal{E} , é dada por

$$\mathcal{E} \equiv - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi \right)_{z, V}, \quad (2.2.7)$$

onde $z \equiv e^{\mu/kT}$ e $\beta \equiv 1/kT$. É fácil verificar que a densidade de energia interna por unidade de volume é

$$\epsilon = \frac{\mathcal{E}}{V} = \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} \epsilon dp. \quad (2.2.8)$$

Nas equações acima, quando necessário, devemos substituir ϵ pela expressão relativística para a energia das partículas, isto é,

$$\epsilon = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}, \quad (2.2.9)$$

onde m é a massa da partícula e c a velocidade da luz.

No limite $\mu \gg kT$, o gás torna-se completamente degenerado e a função de distribuição se reduz à seguinte função degrau

$$\bar{n}(\epsilon) = \begin{cases} 1, & \epsilon \leq \epsilon_F ; \\ 0, & \epsilon > \epsilon_F , \end{cases} \quad (2.2.10)$$

onde ϵ_F é a *energia de Fermi* do sistema, que substitui o potencial químico neste limite, sendo dada por

$$\epsilon_F = (p_F^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} , \quad (2.2.11)$$

onde p_F é o *momento de Fermi*. Tanto ϵ_F como p_F são funções unicamente da densidade. Neste contexto, as integrais presentes nas Eqs. (2.2.5), (2.2.6) e (2.2.8) possuem soluções analíticas, dadas por

$$n = \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{g}{6\pi^2} (mc/\hbar)^3 x^3 , \quad (2.2.12)$$

$$P = \frac{g}{6\pi^2 \hbar^3} c^2 \int_0^{p_F} \frac{p^4}{\epsilon} dp = \frac{gm^4 c^5}{2\hbar^3} \phi(x) , \quad (2.2.13)$$

$$\epsilon = \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} \epsilon p^2 dp = \frac{gm^4 c^5}{2\hbar^3} \chi(x) , \quad (2.2.14)$$

onde a variável adimensional

$$x \equiv \frac{p_F}{mc} , \quad (2.2.15)$$

é o parâmetro relatividade,

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x \left(\frac{2}{3} x^2 - 1 \right) (1 + x^2)^{1/2} + \ln [x + (1 + x^2)^{1/2}] \right\} , \quad (2.2.16)$$

e

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x (1 + x^2)^{1/2} (1 + 2x^2) - \ln [x + (1 + x^2)^{1/2}] \right\} . \quad (2.2.17)$$

Para um gás de elétrons devemos fazer $g = 2$ e $m = m_e$, onde m_e é a massa do elétron, para obtermos

$$P_e = 1,42180 \times 10^{25} \phi(x) \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3} , \quad (2.2.18)$$

e

$$\epsilon_e = 1,42180 \times 10^{25} \chi(x) \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3} . \quad (2.2.19)$$

Substituindo (2.2.15) em (2.2.12), encontramos

$$p_{F_e} = (3\pi^2 \hbar^3)^{1/3} n_e^{1/3} , \quad (2.2.20)$$

e, da Eq. (2.2.11),

$$\epsilon_{F_e} = m_e c^2 (1 + x^2)^{1/2} . \quad (2.2.21)$$

As Eqs. (2.2.13) e (2.2.14) definem parametricamente a equação de estado de um gás de férmions livres completamente degenerado, tendo sido obtidas por Chandrasekhar em 1931 [6, 7].

Analisemos agora alguns limites de interesse. Primeiro, se $x \ll 1$ (gás não-relativístico) as funções $\phi(x)$ e $\chi(x)$ possuem as seguintes expressões assintóticas [8]:

$$\phi(x) \rightarrow \frac{1}{15\pi^2} \left(x^5 - \frac{5}{14}x^7 + \frac{5}{24}x^9 \dots \right) , \quad (2.2.22)$$

$$\chi(x) \rightarrow \frac{1}{3\pi^2} \left(x^3 + \frac{3}{10}x^5 - \frac{3}{56}x^7 \dots \right) , \quad (2.2.23)$$

e para $x \gg 1$ (gás relativístico),

$$\phi(x) \rightarrow \frac{1}{12\pi^2} \left(x^4 - x^2 + \frac{3}{2} \ln 2x \dots \right) , \quad (2.2.24)$$

$$\chi(x) \rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \left(x^4 + x^2 - \frac{1}{2} \ln 2x \dots \right) . \quad (2.2.25)$$

Considerando-se apenas o primeiro termo das Eqs. (2.2.22) e (2.2.24), verificamos que a pressão de um gás completamente degenerado assume a forma politrópica, isto é, $P \propto \rho^\Gamma$, onde Γ é o índice adiabático, definido pela Eq. (1.4.1) (igual a 5/3 para um gás não-relativístico e 4/3 para um gás relativístico).

Para um plasma neutro completamente ionizado, composto por íons com número de massa A e número atômico Z , o número de elétrons por unidade de volume [9] pode ser escrito como

$$n_e = \frac{Y_e \rho}{m_B}, \quad (2.2.26)$$

onde $Y_e = Z/A$ é o número de elétrons por bárion, m_B a massa de repouso dos bárions e ρ a densidade de massa. Segue-se da Eq. (2.2.12) que

$$x = \left(\frac{Y_e \rho}{10^6} \right)^{1/3} \quad [\text{cgs}]. \quad (2.2.27)$$

Vemos agora que o limite não-relativístico corresponde a $\rho \ll 10^6/Y_e$. Assim, os elétrons presentes em um plasma cuja densidade é muito menor que 10^6 g/cm^3 , podem ser considerados não-relativísticos. Neste caso, a energia de Fermi dos elétrons, dividida por kT , e desprezando-se a massa de repouso do elétron, é dada aproximadamente por

$$\frac{\epsilon_{Fe}}{kT} \approx \frac{1}{2} \frac{m_e c^2}{kT} \left(\frac{Y_e \rho}{10^6} \right)^{2/3} \quad [\text{cgs}]. \quad (2.2.28)$$

Como num gás degenerado cumpre-se que $\epsilon_F/kT \gg 1$, devemos ter então

$$\rho \gg \left(\frac{Y_e^{-1} T}{2,97 \times 10^5} \right)^{3/2} \quad [\text{cgs}], \quad (2.2.29)$$

como condição de degenerescência. Para o regime ultra-relativístico temos que $\rho \gg 10^6/Y_e$ (*). Neste caso,

$$\frac{\epsilon_{Fe}}{kT} \approx \frac{m_e c^2}{kT} \left(\frac{Y_e \rho}{10^6} \right)^{1/3}, \quad (2.2.30)$$

e a condição de degenerescência para a densidade passa a ser

$$\rho \gg \left(\frac{Y_e^{-1} T}{5,93 \times 10^7} \right)^3 \quad [\text{cgs}]. \quad (2.2.31)$$

(*) Para um gás de nêutrons, o regime ultra-relativístico é atingido para $\rho \gg 6,0 \times 10^{15} \text{ g/cm}^3$.

2.3 Correção Eletrostática

No estado fundamental do sistema ($T = 0$), os íons tendem a formar uma rede cristalina, acarretando uma não-homogeneidade na distribuição das cargas positivas na estrutura. Isto torna necessária a inclusão de uma correção eletrostática na equação de estado do gás de elétrons, apresentada na seção anterior [10]. Tal correção pode ser feita usando-se, por exemplo, o modelo de *Wigner-Seitz* [8], que, em linhas gerais, é o seguinte: Suponhamos que a rede cristalina seja formada por células “esféricas” idênticas, de raios iguais, digamos, a r_0 . No centro de cada uma dessas esferas temos um núcleo e Z elétrons uniformemente distribuídos. O volume de cada célula unitária é igual a $4\pi r_0^3/3 = 1/n_N$, onde n_N representa o número de núcleos por unidade de volume. Vamos determinar a magnitude da interação eletrostática dos elétrons entre si (repulsiva) e destes com os íons (atrativa).

A interação eletrostática entre os elétrons é igual a

$$E_{e,e} = \int_0^{r_0} \frac{q dq}{r}, \quad (2.3.1)$$

onde, para uma distribuição esférica e homogênea, temos

$$q = -Ze \frac{r^3}{r_0^3},$$

onde e é a carga do elétron. Integrando, obtemos

$$E_{e,e} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0}. \quad (2.3.2)$$

Analogamente, para a interação entre os elétrons e os íons, temos

$$E_{e,i} = Ze \int_0^{r_0} \frac{dq}{r} = -\frac{3}{2} \frac{Z^2 e^2}{r_0}. \quad (2.3.3)$$

Portanto, a energia eletrostática por célula é

$$E_R = E_{e,e} + E_{e,i} = -\frac{9}{10} \frac{Z^2 e^2}{r_0}. \quad (2.3.4)$$

Usando-se a relação $n_e = Zn_N$ para eliminarmos r_0 em favor de n_e na equação anterior, podemos escrever

$$\frac{E_R}{Z} = -\frac{9}{10} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{2/3}, \quad (2.3.5)$$

que nos fornece a correção da energia eletrostática por elétron. Evidentemente, a “energia da rede” deve ser somada à energia do gás de elétrons que foi obtida na seção anterior.

A correspondente correção da pressão pode ser obtida da relação termodinâmica

$$P_R = n_e^2 \frac{\partial (E_R/Z)}{\partial n_e}.$$

Da Eq. (2.3.5) segue-se que

$$P_R = -\frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3}, \quad (2.3.6)$$

No limite ultra-relativístico, como vimos na seção anterior, a pressão do gás de elétrons é dada aproximadamente por (*)

$$P_0 \approx \frac{1}{4} \hbar c (3\pi^2)^{1/3} n_e^{4/3}. \quad (2.3.7)$$

A razão entre a pressão corrigida e a pressão do gás de elétrons sem a correção eletrostática (P_0) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_0} &= \frac{P_0 + P_R}{P_0} \\ &= 1 - \frac{2^{5/3}}{5} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \alpha Z^{2/3}, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

onde $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ é a constante de estrutura fina.

Embora tais correções possam ser desprezadas para baixos valores de densidade, elas tornam-se importantes para densidades elevadas. Para $\rho \approx 10^{11}$ g/cm³, por exemplo, a correção eletrostática na densidade de energia do gás de elétrons é da ordem de 15%.

(*) Veja as equações (2.2.13) e (2.2.24).

Outro aspecto relevante é que, além da redução na energia e na pressão dos elétrons, a organização dos núcleos numa rede cristalina influencia, também, a composição química da matéria estelar, como será visto a seguir.

2.4 Equação de Estado de Baym, Pethick e Sutherland (BPS)

Lembremos que no regime subnuclear sem nêutrons livres, a matéria estelar é composta de núcleos imersos num gás de elétrons, isto é, um plasma neutro completamente ionizado. Por outro lado, vimos também que, em virtude da sua elevada degenerescência, podemos tratar o gás de elétrons com a aproximação $T = 0$, e visualizar os núcleos distribuídos uniformemente numa rede cristalina (estado fundamental).

Suponhamos, então, que a matéria estelar seja composta por núcleos com número de massa A e número atômico Z . Seja n_N a densidade de núcleos por unidade de volume e n_e a densidade de elétrons por unidade de volume. Podemos escrever a densidade de energia do sistema por unidade de volume como

$$\varepsilon(A, Z, n_N) = n_N M(A, Z) c^2 + n_N \varepsilon_R + \varepsilon_e(n_e), \quad (2.4.1)$$

onde $M(A, Z) c^2$ representa a energia do núcleo (A, Z) , englobando a energia de repouso dos nucleons, ε_e a energia dos elétrons por unidade de volume e ε_R a energia eletrostática da rede por núcleo (negativa).

Para o cálculo da energia da rede, os autores usaram os resultados obtidos por Horsfall e Maradudin [11] para uma rede do tipo *bcc*. Explicitamente:

$$\varepsilon_R = -1,819620 \frac{Z^2 e^2}{a^2}, \quad (2.4.2)$$

onde

$$a^3 = \frac{2}{n_N}. \quad (2.4.3)$$

A densidade de energia do gás de elétrons é dada pela Eq. (2.2.14)

$$\varepsilon_e = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \chi(x), \quad (2.4.4)$$

onde m_e é a massa do elétron.

Através das relações

$$n_N = \frac{n_B}{A} \quad (2.4.5)$$

e

$$n_e = \frac{Z}{A} n_B, \quad (2.4.6)$$

onde n_B é o número de bárions por unidade de volume, podemos exprimir cada termo da Eq. (2.4.1) em função apenas de Z , A e n_B . Assim, para um valor de densidade bariônica fixado, deve-se determinar o núcleo (A, Z) que minimize a energia do sistema. A minimização da energia, como foi descrito acima, pode ser operacionalizada supondo-se que Z e A são variáveis contínuas e resolvendo-se as equações

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} \right)_{A, n_B} = 0, \quad (2.4.7)$$

e

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A} \right)_{Z, n_B} = 0. \quad (2.4.8)$$

Para o cálculo da energia do estado fundamental dos núcleos, foi usada a fórmula semi-empírica de massa de Meyers e Swiatecki [12]. Os resultados obtidos por Baym *et al.* [1] estão resumidos na Tab. III, onde listamos todos os núcleos que definem a composição química para o estado fundamental do sistema, bem como os intervalos de densidade em que tais núcleos estão presentes. Estes núcleos caracterizam a composição química para o estado fundamental da matéria no regime de densidade considerado aqui.

Notemos que a captura eletrônica, implicitamente incorporada na minimização da energia, é o processo responsável pela mudança progressiva na composição química.

Tabela III(*)

Núcleos	B/A	Z/A	ρ_{max}	μ_e	$\Delta\rho/\rho$
⁵⁶ Fe	8,7905	0,4643	$8,1 \times 10^6$	0,95	2,9
⁶² Ni	8,7947	0,4516	$2,7 \times 10^8$	2,6	3,1
⁶⁴ Ni	8,7777	0,4375	$1,2 \times 10^9$	4,2	7,9
⁸⁴ Se	8,6797	0,4048	$8,2 \times 10^9$	7,7	3,5
⁸² Ge	8,5964	0,3902	$2,2 \times 10^{10}$	10,6	3,8
⁸⁰ Zn	8,4675	0,3750	$4,8 \times 10^{10}$	13,6	4,1
⁷⁸ Ni	8,2873	0,3590	$1,6 \times 10^{11}$	20,0	4,6
⁷⁶ Fe	7,9967	0,3421	$1,8 \times 10^{11}$	20,2	2,2
¹²⁴ Mo	7,8577	0,3387	$1,9 \times 10^{11}$	20,5	3,1
¹²² Zr	7,6705	0,3279	$2,7 \times 10^{11}$	22,9	3,3
¹²⁰ Sr	7,4522	0,3166	$3,7 \times 10^{11}$	25,2	3,5
¹¹⁸ Kr	7,2002	0,3051	$4,3 \times 10^{11}$	26,2	...

— B/A é a energia de ligação por nucleon; ρ_{max} a densidade máxima até onde o nuclídeo está presente; μ_e o potencial químico do elétron em $\rho = \rho_{max}$, e $\Delta\rho/\rho$ o incremento relativo da densidade de massa na transição de um tipo de nuclídeo para o seguinte. B/A e μ_e estão dados em MeV e ρ_{max} em g/cm^3 . $\rho_{max} = 4,3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ é a densidade limiar para evaporação de nêutrons.

Para que ocorra uma transição de uma dada espécie de núcleo (A, Z) para a espécie (A', Z'), é necessário uma variação na densidade de massa dada por

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{Z/A}{Z'/A'} - 1. \tag{2.4.9}$$

Assim, por exemplo, a transição dos núcleos de ⁵⁶Fe para os núcleos de ⁶²Ni corresponde a um incremento relativo de 2,9% na densidade de massa.

Com a composição química e a energia do estado fundamental conhecidas, a pressão pode ser obtida através da relação

$$P = n_B^2 \frac{\partial(\varepsilon/n_B)}{\partial n_B}, \tag{2.4.10}$$

(*) Adaptada da referência [1].

que com a Eq. (2.4.1), fornece

$$P = P_e + \frac{1}{3} n_N \varepsilon_R , \quad (2.4.11)$$

onde

$$P_e = n_e \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial n_e} - \varepsilon_e , \quad (2.4.12)$$

é a pressão parcial de elétrons, dada por

$$P_e = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \phi(x) . \quad (2.4.13)$$

Estão listados na Tab. IV os valores de densidade de energia, pressão , número de bárions por unidade de volume, Z , A e o índice adiabático Γ . Notemos que os cálculos apresentados aqui se estendem de $\rho = 1,044 \times 10^4 \text{ g/cm}^3$, onde predominam os núcleos de ^{56}Fe , até a densidade limiar para evaporação de nêutrons, $\rho = 4,3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$.

Como vimos, a equação de estado de Baym *et al.* não incorpora nêutrons livres e, por isso mesmo, ela deve ser aplicada, apenas, ao regime de densidades menores que a densidade limiar de evaporação de nêutrons. Contudo, podemos determinar a densidade para a evaporação de nêutrons introduzindo-se um termo a mais na Eq. (2.4.1), isto é, adicionando-se a densidade de energia dos nêutrons livres e, a seguir, minimizando-se a energia total também em relação à fração de nêutrons livres Y_n , definida por

$$Y_n = \frac{n_n}{n_B} , \quad (2.4.14)$$

onde n_n é o número de nêutrons livres por unidade de volume. Verifica-se que

$$n_e = \frac{Z}{A} (1 - Y_n) n_B . \quad (2.4.15)$$

Neste novo contexto, a grandeza que deve ser extremizada é

$$\varepsilon (A, Z, n_N) = n_N M(Z, A) c^2 + n_N \varepsilon_R + \varepsilon_e(n_e) + \varepsilon_n(n_n) , \quad (2.4.16)$$

Tabela IV(*)

$\rho(= \epsilon/c^2)$	P	n_B	Z	A	γ
$1,044 \times 10^4$	$9,744 \times 10^{18}$	$6,295 \times 10^{27}$	26	56	1,796
$2,622 \times 10^4$	$4,968 \times 10^{19}$	$1,581 \times 10^{28}$	26	56	1,744
$6,587 \times 10^4$	$2,431 \times 10^{20}$	$3,972 \times 10^{28}$	26	56	1,706
$1,654 \times 10^5$	$1,151 \times 10^{21}$	$9,976 \times 10^{28}$	26	56	1,670
$4,156 \times 10^5$	$5,266 \times 10^{21}$	$2,506 \times 10^{29}$	26	56	1,631
$1,044 \times 10^6$	$2,318 \times 10^{22}$	$6,294 \times 10^{29}$	26	56	1,586
$2,622 \times 10^6$	$9,755 \times 10^{22}$	$1,581 \times 10^{30}$	26	56	1,534
$6,558 \times 10^6$	$3,911 \times 10^{23}$	$3,972 \times 10^{30}$	26	56	1,482
$8,293 \times 10^6$	$5,259 \times 10^{23}$	$5,000 \times 10^{30}$	28	62	1,471
$1,655 \times 10^7$	$1,435 \times 10^{24}$	$9,976 \times 10^{30}$	28	62	1,437
$3,302 \times 10^7$	$3,833 \times 10^{24}$	$1,990 \times 10^{31}$	28	62	1,408
$6,589 \times 10^7$	$1,006 \times 10^{25}$	$3,972 \times 10^{31}$	28	62	1,386
$1,315 \times 10^8$	$2,604 \times 10^{25}$	$7,924 \times 10^{31}$	28	62	1,369
$2,624 \times 10^8$	$6,676 \times 10^{25}$	$1,581 \times 10^{32}$	28	62	1,357
$3,304 \times 10^8$	$8,738 \times 10^{25}$	$1,990 \times 10^{32}$	28	64	1,355
$5,237 \times 10^8$	$1,629 \times 10^{26}$	$3,155 \times 10^{32}$	28	64	1,350
$8,301 \times 10^8$	$3,029 \times 10^{26}$	$5,000 \times 10^{32}$	28	64	1,346
$1,045 \times 10^9$	$4,129 \times 10^{26}$	$6,294 \times 10^{32}$	28	64	1,344
$1,316 \times 10^9$	$5,036 \times 10^{26}$	$7,924 \times 10^{32}$	34	84	1,343
$1,657 \times 10^9$	$6,860 \times 10^{26}$	$9,976 \times 10^{32}$	34	84	1,342
$2,626 \times 10^9$	$1,272 \times 10^{27}$	$1,581 \times 10^{33}$	34	84	1,340
$4,164 \times 10^9$	$2,356 \times 10^{27}$	$2,506 \times 10^{33}$	34	84	1,338
$6,601 \times 10^9$	$4,362 \times 10^{27}$	$3,972 \times 10^{33}$	34	84	1,337
$8,312 \times 10^9$	$5,662 \times 10^{27}$	$5,000 \times 10^{33}$	32	82	1,336
$1,046 \times 10^{10}$	$7,702 \times 10^{27}$	$6,294 \times 10^{33}$	32	82	1,336
$1,318 \times 10^{10}$	$1,048 \times 10^{28}$	$7,294 \times 10^{33}$	32	82	1,336
$1,659 \times 10^{10}$	$1,425 \times 10^{28}$	$9,976 \times 10^{33}$	32	82	1,335
$2,090 \times 10^{10}$	$1,938 \times 10^{28}$	$1,256 \times 10^{34}$	32	82	1,335
$2,631 \times 10^{10}$	$2,503 \times 10^{28}$	$1,581 \times 10^{34}$	30	80	1,335
$3,313 \times 10^{10}$	$3,404 \times 10^{28}$	$1,990 \times 10^{34}$	30	80	1,335
$4,172 \times 10^{10}$	$4,628 \times 10^{28}$	$2,506 \times 10^{34}$	30	80	1,334
$5,254 \times 10^{10}$	$5,949 \times 10^{28}$	$3,155 \times 10^{34}$	28	78	1,334
$6,617 \times 10^{10}$	$8,089 \times 10^{28}$	$3,972 \times 10^{34}$	28	78	1,334

(*) Adaptada da referência [1].

- cont. da Tab. IV

$8,332 \times 10^{10}$	$1,100 \times 10^{29}$	$5,000 \times 10^{34}$	28	78	1,334
$1,049 \times 10^{11}$	$1,495 \times 10^{29}$	$6,294 \times 10^{34}$	28	78	1,334
$1,322 \times 10^{11}$	$2,033 \times 10^{29}$	$7,924 \times 10^{34}$	28	78	1,334
$1,664 \times 10^{11}$	$2,597 \times 10^{29}$	$9,976 \times 10^{34}$	26	76	1,334
$1,844 \times 10^{11}$	$2,892 \times 10^{29}$	$1,105 \times 10^{35}$	42	124	1,334
$2,096 \times 10^{11}$	$3,290 \times 10^{29}$	$1,256 \times 10^{35}$	40	122	1,334
$2,640 \times 10^{11}$	$4,473 \times 10^{29}$	$1,581 \times 10^{35}$	40	122	1,334
$3,325 \times 10^{11}$	$5,816 \times 10^{29}$	$1,990 \times 10^{35}$	38	120	1,334
$4,188 \times 10^{11}$	$7,538 \times 10^{29}$	$2,506 \times 10^{35}$	36	118	1,334
$4,299 \times 10^{11}$	$7,805 \times 10^{29}$	$2,572 \times 10^{35}$	36	118	1,334

— ρ é a densidade de massa em g/cm^3 ; P a pressão em dyn/cm^2 ; n_B o número de bárions por centímetro cúbico; A e Z representam o número de massa e o número de prótons, respectivamente, dos núcleos presentes e Γ é o índice adiabático.

onde $\epsilon_n(n_e)$ é a densidade de energia dos nêutrons livres. Derivando-se a equação acima em relação a Y_n e igualando a zero, obtemos

$$\epsilon_F^{(n)} = \frac{M(A, Z) c^2 + Z\epsilon_F^{(e)} + 4Z\epsilon_R/3n_e}{A}, \quad (2.4.17)$$

onde $\epsilon_F^{(n)}$ e $\epsilon_F^{(e)}$ são a energia de Fermi dos nêutrons e dos elétrons, respectivamente. Se $\epsilon_F^{(n)} \geq m_n c^2$, onde m_n é a massa do nêutron, os nêutrons passam a preencher um espectro contínuo de energia. Portanto, da equação anterior, vemos que a evaporação de nêutrons é ditada pela condição

$$M(A, Z) c^2 \geq Am_n c^2 - Z\epsilon_F^{(e)} - 4Z\epsilon_R/3n_e. \quad (2.4.18)$$

A equação anterior fornece a condição para a presença de nêutrons livres no sistema, e nos permite determinar a densidade e o tipo de nuclídeo presente quando a matéria estelar faz a transição para o regime com nêutrons livres. Da Tab. III, vemos que

a densidade limiar para evaporação de nêutrons, estabelecida pelos autores, é igual a $4,3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$, onde predomina, na composição química, o nuclídeo ^{118}Kr .

2.5 Equação de Estado de Baym, Bethe e Pethick (BBP)

O regime subnuclear com nêutrons livres cobre o intervalo de densidades entre $\rho \approx 4,3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ — onde começa a evaporação de nêutrons — e $\rho \approx 2,8 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ — quando os núcleos presentes começam a se dissociar, tendo lugar uma transição de fase para a matéria nuclear.

A configuração de equilíbrio neste regime de densidade consiste de núcleos distribuídos em uma rede cristalina e imersos num gás uniforme de elétrons degenerados e relativísticos, e num gás de nêutrons degenerados e não-relativísticos, que interagem fortemente entre si e com os núcleos da rede.

A aproximação $T = 0$ ainda se justifica, uma vez que as temperaturas típicas da matéria estelar neste estágio ($< 10 \text{ KeV}$) são baixas se comparadas com as energias necessárias para a excitação dos núcleos [13]. Como na seção anterior, o problema de obter a equação de estado neste regime de densidade resume-se, essencialmente, em se conhecer a energia de ligação por bárion e a composição química em função da densidade. Os cálculos realizados por Baym, Bethe e Pethick [2] são, em certo sentido, semelhantes aos realizados por Baym, Pethick e Sutherland. A diferença básica está na necessidade de se incluir nos cálculos a interação entre os nucleons e na forma de se determinar a energia dos núcleos, como veremos mais adiante.

A densidade de energia é escrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon(A, Z, n_N, n_n, V_N) \\ &= n_N (W_N + W_R) + (1 - V_N n_N) \varepsilon_n(n_n) + \varepsilon_e(n_e), \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

onde n_N é o número de núcleos por unidade de volume (densidade de núcleos), n_n a densidade de nêutrons livres, n_e a densidade de elétrons e V_N o volume do núcleo. Quando a pressão do gás de nêutrons externos aos núcleos aumenta, V_N diminui, de-

vendo ser tratado, então, como uma variável. O termo W_N representa a energia do núcleo, incluindo a energia de repouso (sendo dependente de A , Z , n_n e V_N), W_R a energia da rede cristalina por núcleo, ε_n a densidade de energia do gás de nêutrons e ε_e a densidade de energia do gás de elétrons. Notemos que $V_N n_N$ corresponde à fração de volume ocupado pelos núcleos, enquanto que $1 - V_N n_N$ dá a fração de volume ocupado pelos nêutrons livres.

Em termos destas variáveis, podemos definir a densidade de nêutrons como

$$n_n \equiv \frac{N_n}{V_n} = \frac{N_n}{V(1 - V_N n_N)}, \quad (2.5.2)$$

onde N_n é o número total de nêutrons livres, V_n o volume ocupado por eles e V é o volume do sistema. Em consequência, a densidade bariônica (o número de bárions por unidade de volume) é dada por

$$n_B = An_N + (1 - V_N n_N) n_n. \quad (2.5.3)$$

Finalmente, a condição de neutralidade de carga da matéria estelar é expressa pela relação

$$n_e = Zn_N. \quad (2.5.4)$$

Para se determinar a configuração de equilíbrio, devemos minimizar a densidade de energia ε , fixando-se a densidade bariônica n_B . Observe, no entanto, que ε é uma função de cinco variáveis, e que a minimização de ε deve fornecer quatro condições de equilíbrio independentes.

Para obtermos a primeira condição, podemos fixar, dentro de um volume unitário, o número de prótons Zn_N , o número de nêutrons $n_N(A - Z)$ nos núcleos, a fração $n_N V_N$ do volume ocupado pelos núcleos e o número de nêutrons livres, $n_n(1 - V_N n_N)$. A pergunta então é: qual o valor ótimo de A ? A resposta está em se minimizar ε em relação a A , fixando-se Zn_N , An_N , $n_N V_N$, e n_n . Consequentemente, teremos também ε_n e ε_e fixos. Definindo

$$x \equiv \frac{Z}{A}, \quad (2.5.5)$$

a condição descrita acima se expressa matematicamente por

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{W_N + W_R}{A} \right)_{x, An_N, V_N n_N, n_n} = 0, \quad (2.5.6)$$

cujo significado é que a energia por nucleon, dentro dos núcleos, deve ser um mínimo.

A segunda condição é imposta pela estabilidade beta dos núcleos, relacionada com a variação de Z . Assim, ε deve ser um mínimo em relação a Z , quando A , n_N , V_N e n_n são fixos. Devemos ter então

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} \right)_{A, N_N, V_N, n_n} = 0. \quad (2.5.7)$$

Notemos, no entanto, que

$$\frac{\partial}{\partial Z} \varepsilon_e(n_e) = \frac{d\varepsilon_e}{dn_e} \frac{\partial n_e}{\partial Z} = \mu_e n_N, \quad (2.5.8)$$

onde usamos a Eq. (2.5.4). μ_e é o potencial químico dos elétrons. Conjugando-se as Eqs. (2.5.1), (2.5.7) e a anterior, obtemos

$$\mu_e = -\frac{\partial}{\partial Z} (W_N + W_R)_{A, n_N, V_N, n_n}. \quad (2.5.9)$$

Mas, por outro lado, o potencial químico dos nêutrons pertencentes aos núcleos, $\mu_n^{(N)}$, é dado por

$$\mu_n^{(N)} = \frac{\partial}{\partial A} (W_N + W_R)_{Z, n_N, V_N, n_n}, \quad (2.5.10)$$

que representa a energia mínima necessária para adicionar um nêutron ao núcleo. Analogamente, o potencial químico dos prótons é dado por

$$\begin{aligned} \mu_p^{(N)} &= \frac{\partial}{\partial Z} (W_N + W_R)_{A-Z, n_N, V_N, n_n} \\ &= \frac{\partial}{\partial Z} (W_N + W_R)_{A, n_N, V_N, n_n} + \frac{\partial}{\partial A} (W_N + W_R)_{Z, n_N, V_N, n_n}, \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

As duas equações escritas acima permitem que se escreva a condição de equilíbrio beta, representada pela Eq. (2.5.9), na forma usual

$$\mu_e = \mu_n^{(N)} - \mu_p^{(N)}. \quad (2.5.12)$$

A terceira condição traduz o equilíbrio existente entre o gás de nêutrons livres e os nêutrons no interior do núcleo. Em outras palavras, esta condição de equilíbrio significa que não deve haver nenhum custo de energia para transferir um nêutron do gás para o núcleo. Isto implica em minimizar-se ε em relação a A , fixando-se Z , n_N , V_N e n_B , isto é,

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A}\right)_{Z, n_N, V_N, n_B} = 0, \quad (2.5.13)$$

que, pelo fato de n_B não ser independente das demais variáveis, pode ser escrita como

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A}\right)_{Z, n_N, V_N, n_B} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A}\right)_{Z, n_N, V_N, n_n} + \frac{\partial n_n}{\partial A} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_n}\right)_{Z, n_N, V_N, A} = 0. \quad (2.5.14)$$

Da Eq. (2.5.3), verifica-se que

$$\frac{\partial n_n}{\partial A} = -\frac{n_N}{1 - V_N n_N}. \quad (2.5.15)$$

Por outro lado, a energia do núcleo por unidade de volume ocupado pelo gás de nêutrons é dada por

$$\frac{n_N V}{V_n} W_N = \frac{n_N}{1 - V_N n_N} W_N. \quad (2.5.16)$$

Quando o núcleo evapora um nêutron, tanto ε_n quanto a energia do núcleo sofrem uma variação. Segue-se então que o potencial químico dos nêutrons livres deve ser definido por

$$\mu_n^{(G)} = \frac{n_N}{1 - V_N n_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n}\right)_{Z, A, n_N, V_N} + \frac{d\varepsilon_n}{dn_n}. \quad (2.5.17)$$

Como W_R não depende de n_n , a Eq. (2.5.14) pode ser escrita na forma

$$n_N \frac{\partial}{\partial A} (W_N + W_R)_{Z, n_N, V_N, n_n} = \frac{n_N^2}{1 - V_N n_N} n_N \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n}\right)_{Z, A, n_N, V_N} + n_N \frac{d\varepsilon_n}{dn_n}, \quad (2.5.18)$$

usando-se a Eq. (2.5.1). Observando-se as Eqs. (2.5.10) e (2.5.17), a última equação resulta em que

$$\mu_n^{(N)} = \mu_n^{(G)}. \quad (2.5.19)$$

A quarta e última condição de equilíbrio vem da minimização da energia total, ϵ , em relação a V_N , com Z , A , n_N e $N_n/V = n_n(1 - V_N n_N)$ fixos, ou seja,

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial V_N} \right)_{Z,A,n_N,N_n/V} = 0, \quad (2.5.20)$$

ou, ainda,

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial V_N} \right)_{Z,A,n_N,n_n} + \frac{\partial n_n}{\partial V_N} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n_n} \right)_{Z,A,n_N,V_N} = 0. \quad (2.5.21)$$

Aplicando a equação anterior à Eq. (2.5.1), encontramos

$$\frac{\partial}{\partial V_N} (W_N + W_R)_{Z,A,n_N,n_n} + \frac{\partial n_n}{\partial V_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n} \right)_{Z,A,n_N,V_N} + \frac{1 - V_N n_N}{n_N} \frac{\partial n_n}{\partial V_N} \frac{d\epsilon_n}{dn_n} - \epsilon_n = 0. \quad (2.5.22)$$

Mas

$$P^{(N)} \equiv - \frac{\partial}{\partial V_N} (W_N + W_R)_{Z,A,n_N,n_n}, \quad (2.5.23)$$

e

$$\frac{\partial n_n}{\partial V_N} = \frac{n_N}{1 - V_N n_N} n_n. \quad (2.5.24)$$

Então,

$$-P^{(N)} + n_n \frac{n_N}{1 - V_N n_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n} \right)_{Z,A,n_N,V_N} + n_n \frac{d\epsilon_n}{dn_n} - \epsilon_n = 0. \quad (2.5.25)$$

Da Eq. (2.5.17) temos que

$$\frac{n_N}{1 - V_N n_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n} \right)_{Z,A,n_N,n_n} = \mu_n^{(G)} - \frac{d\epsilon_n}{dn_n}. \quad (2.5.26)$$

Substituindo o resultado acima na Eq. (2.5.24), obtemos

$$P^{(N)} = n_n \mu_n^{(G)} - \epsilon_n. \quad (2.5.27)$$

Entretanto, a pressão do gás de nêutrons é definida por

$$P_n = n_n \mu_n^{(G)} - \epsilon_n. \quad (2.5.28)$$

Logo

$$P^{(N)} = P_n . \quad (2.5.29)$$

A última equação expressa o balanço entre a pressão dos núcleos e a pressão externa do gás de nêutrons.

As quatro condições de equilíbrio deduzidas atrás, dadas pelas Eqs. (2.5.6), (2.5.12), (2.5.19) e (2.5.29), determinam completamente a composição química da matéria em função da densidade, vale dizer, o número de massa e o número atômico dos núcleos para uma dada densidade n_B fixa, assim como a densidade relativa de núcleos e de nêutrons livres. Entretanto, a aplicação dessas quatro equações de equilíbrio requer que se especifique W_N , W_R , ε_n e ε_e .

A energia dos núcleos $W_N(A, Z, V_N, n_n)$, é uma função de A , Z , do volume nuclear V_N e da densidade de nêutrons livres n_n . Lembremos, no entanto, que nos modelos nucleares padrões a pressão na superfície dos núcleos é zero, pelo simples fato de que tais modelos se aplicam a núcleos isolados. Ora, ao se estudar as propriedades destes núcleos na presença do gás de nêutrons livres, dois fatores importantes devem ser levados em consideração: primeiro, a alteração que os nêutrons livres causam na energia superficial dos núcleos e, segundo, a pressão exercida por eles sobre os núcleos. Ocorre que a pressão externa exercida pelo gás de nêutrons tende a reduzir o volume dos núcleos, enquanto que a diminuição da energia superficial tem exatamente o efeito oposto. Por estes motivos, Baym, Bethe e Pethick adotaram em seu trabalho o chamado modelo da gota líquida compressível para o cálculo da energia dos núcleos, em que W_N possui uma dependência explícita com a densidade bariônica.

Dentro do mesmo espírito da fórmula semi-empírica de massa usual, a energia dos núcleos é escrita como

$$W_N(A, Z, V_N, n_n) = A [(1 - x)m_n c^2 + x m_p c^2 + W(k, x)] + W_C(A, Z, V_N, n_n) + W_s(A, Z, V_N, n_n) , \quad (2.5.30)$$

onde $W_C(A, Z, V_N, n_n)$ é a energia coulombiana, $W_s(A, Z, V_N, n_n)$ a energia superficial

e o termo de volume $W(k, x)$ (*) depende de n_B através da relação

$$n_B \equiv \frac{2k^3}{3\pi^2}, \quad (2.5.31)$$

onde k é o número de onda e x fração relativa de prótons definida pela Eq. (2.5.5). Para o cálculo de $W(k, x)$, os autores do trabalho incluíram os efeitos da interação nucleon-nucleon através do potencial de Reid. Em particular, para a matéria nuclear simétrica ($x = 1/2$) e para densidades próximas à densidade da matéria nuclear saturada (ρ_0), temos a seguinte expressão para $W(k, x)$:

$$W(k, \frac{1}{2}) = -w_0 + \frac{1}{2}K \left(1 - \frac{k}{k_0}\right)^2, \quad (2.5.32)$$

onde $w_0 \approx 16$ MeV, k_0 é o número de onda correspondente à densidade de saturação ($k_0 \approx 1,4$ fm⁻¹) e K a incompressibilidade (≈ 135 MeV).

Por consistência, a mesma função $W(k, x)$ é usada na determinação da densidade de energia do gás de nêutrons, para o qual $x = 0$, sendo dada por

$$\varepsilon_n = n_n [W(k_n, 0) + m_n c^2], \quad (2.5.33)$$

onde

$$n_n \equiv \frac{2k_n^3}{3\pi^2}. \quad (2.5.34)$$

O termo de superfície, $W_s(A, Z, V_N, n_n)$, é construído de tal maneira que $W_s = 0$ quando a densidade do gás de nêutrons e a densidade no interior dos núcleos são iguais, sendo dado por

$$W_s = \frac{\sigma (W_{ext} - W_{int})}{w_0} \left(1 - \frac{n_{ext}}{n_{int}}\right)^{2/3} A^{2/3}, \quad (2.5.35)$$

onde σ é um parâmetro ajustado pelos dados experimentais, n_{int} e n_{ext} são as densidades de nêutrons no interior dos núcleos e fora dos núcleos, respectivamente, $W_{ext} \equiv W(n_{ext})$ e $W_{int} \equiv W(n_{int})$.

(*) A expressão de $W(k, x)$ e os cálculos para obtê-la são muito extensos, e sua apresentação detalhada foge aos objetivos deste trabalho.

A energia coulombiana, já incluída a correção eletrostática da rede cristalina, é dada por

$$W_{C+L} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_N} \left(1 - \frac{r_N}{r_0}\right)^2 \left(1 + \frac{r_N}{2r_0}\right), \quad (2.5.36)$$

onde r_N é o raio do núcleo e r_0 o raio da célula esférica definida na seção 2.3.

Aplicando-se a Eq. (2.4.10) à Eq. (2.5.1) obtemos a pressão, dada por

$$P = P_n + P_e + P_L, \quad (2.5.37)$$

onde P_n é a pressão do gás de nêutrons, definida na Eq. (2.5.28), P_e é a pressão do gás de elétrons, apresentada na seção 2.2 e P_L é a pressão da rede, dada por

$$P_L = n_N^2 \left(\frac{\partial W_L}{\partial n_N} \right)_{A,Z,n_N,n_n}. \quad (2.5.38)$$

Os principais resultados deste trabalho e que permitem especificar completamente a equação de estado para o regime subnuclear com nêutrons livres, estão mostrados na Tabela V. Observe que a densidade de massa é dada pela Eq. (2.5.1) dividida por c^2 . Observe ainda que, para altas densidades, os valores obtidos para Z e A não são realistas.

Quando $\rho = 4,3 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$, a pressão da matéria é devida quase que totalmente à pressão do gás de elétrons e $P_n/P \approx 0$; mas quando $\rho = 1,5 \times 10^{12} \text{ g/cm}^3$, $P_n/P \approx 0,20$, e em $\rho = 1,5 \times 10^{13} \text{ g/cm}^3$, $P_n/P \approx 0,80$.

Tabela V(*)

ρ	A	Z	x	k	k_n	μ_n	$\mu_p^{(N)}$	μ_e	P	$n_N \times 10^6$
$4,66 \times 10^{11}$	127	40	0,313	1,32	0,07	0,14	-24,89	26,31	$5,00 \times 10^{-4}$	2,02
$6,61 \times 10^{11}$	130	40	0,310	1,32	0,12	0,37	-25,33	26,98	$5,68 \times 10^{-4}$	2,13
$8,79 \times 10^{11}$	134	41	0,397	1,32	0,15	0,55	-25,67	27,51	$6,42 \times 10^{-4}$	2,23
$1,20 \times 10^{12}$	137	42	0,304	1,32	0,18	0,75	-26,08	28,13	$7,60 \times 10^{-4}$	2,34
$1,47 \times 10^{12}$	140	42	0,302	1,32	0,20	0,91	-26,38	28,58	$8,73 \times 10^{-4}$	2,43
$2,00 \times 10^{12}$	144	43	0,299	1,31	0,23	1,15	-26,88	29,33	$1,11 \times 10^{-3}$	2,58
$2,67 \times 10^{12}$	149	44	0,295	1,31	0,26	1,42	-27,44	30,15	$1,47 \times 10^{-3}$	2,74
$3,51 \times 10^{12}$	154	45	0,291	1,31	0,29	1,71	-28,05	31,05	$1,98 \times 10^{-3}$	2,93
$4,54 \times 10^{12}$	161	46	0,286	1,30	0,32	2,01	-28,72	32,02	$2,69 \times 10^{-3}$	3,14
$6,25 \times 10^{12}$	170	48	0,280	1,30	0,36	2,45	-29,69	33,43	$4,04 \times 10^{-3}$	3,45
$8,38 \times 10^{12}$	181	49	0,273	1,29	0,40	2,91	-30,78	34,98	$6,02 \times 10^{-3}$	3,82
$1,10 \times 10^{13}$	193	51	0,266	1,28	0,44	3,41	-31,98	36,68	$8,81 \times 10^{-3}$	4,23
$1,50 \times 10^{13}$	211	54	0,256	1,27	0,49	4,07	-33,64	39,00	$1,38 \times 10^{-2}$	4,84
$1,99 \times 10^{13}$	232	57	0,246	1,26	0,54	4,77	-35,50	41,56	$2,09 \times 10^{-2}$	5,54
$2,58 \times 10^{13}$	257	60	0,234	1,25	0,59	5,51	-37,57	44,37	$3,09 \times 10^{-2}$	6,36
$3,44 \times 10^{13}$	296	65	0,220	1,24	0,65	6,47	-40,34	48,10	$4,77 \times 10^{-2}$	7,52
$4,68 \times 10^{13}$	354	72	0,202	1,22	0,72	7,67	-43,99	52,95	$7,62 \times 10^{-2}$	9,12
$5,96 \times 10^{13}$	421	78	0,186	1,21	0,78	8,77	-47,49	57,56	0,111	10,7
$8,01 \times 10^{13}$	548	89	0,163	1,20	0,86	10,36	-52,66	64,32	0,176	13,1
$9,83 \times 10^{13}$	683	100	0,146	1,20	0,92	11,66	-56,86	69,81	0,243	15,0
$1,30 \times 10^{14}$	990	120	0,121	1,21	1,01	13,77	-63,52	78,58	0,384	17,8
$1,72 \times 10^{14}$	1640	157	0,096	1,24	1,11	16,39	-71,16	88,84	0,616	19,6
$2,00 \times 10^{14}$	2500	210	0,081	1,27	1,17	18,11	-75,79	95,19	0,803	18,8
$2,26 \times 10^{14}$	4330	290	0,067	1,29	1,22	19,59	-79,69	100,57	0,988	15,4
$2,39 \times 10^{14}$	7840	445	0,057	1,30	1,25	20,37	-81,92	103,57	1,09	11,0

- ρ é a densidade de massa em g/cm^3 ; $x = Z/A$; k é o número de onda, em fm^{-1} , no interior dos núcleos, cuja densidade de nucleons é igual a $2k^3/3\pi^2$; a densidade do gás de nêutrons é $2k_n^3/3\pi^2$; μ_n é o potencial químico dos nêutrons livres (MeV); $\mu_p^{(N)}$ o potencial químico dos prótons nos núcleos; μ_e o potencial químico dos elétrons; P é a pressão em unidades de MeV/fm^3 e n_N o número de núcleos por fm^3 .

(*) Adaptada da referência [2].

Referências

- [1] Baym, G., Pethick, C. e Sutherland, P., *Astrophys. J.*, **170** (1971), 299.
- [2] Baym, G., Bethe, H. e Pethick, C., *Nuc. Phys.*, **A175** (1971), 225.
- [3] Landau, L. e Lifchitz, E., “*Physique Théorique*”, Edições Mir, Moscou (1967), Vol. V.
- [4] Pathria, R.K., “*Statistical Mechanics*”, Pergamon Press (1985).
- [5] Bludman, S.A. e Van Riper, K.A., *Astrophys. J.*, **212** (1977), 859.
- [6] Chandrasekhar, S., *Phyl. Mag.*, **11** (1931), 592.
- [7] Chandrasekhar, S., *Astrophys. J.*, **74** (1931), 81.
- [8] Shapiro, S.L. e Teukolsky, S.A., “*Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars – The Physics of Compact Objects*”, John Wiley & Sons, U.S.A. (1983).
- [9] Chiu, H.Y., “*Stellar Physics*”, Vol. I, Blaisdel Publishing Company (1968).
- [10] Salpeter, E.E., *Astrophys. J.*, **140** (1961), 796.
- [11] Horsfall, R.A.C. e Maradudin, A.A., *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 395.
- [12] Myers, W.D. e Swiatecki, W.J., *Nuc. Phys.*, **81** (1966), 1.
- [13] Negele, J.W. e Vautherin, D., *Nuc. Phys.*, **A207** (1973), 298.

Hadrodinâmica Quântica

3.1 Introdução

Proposta por Walecka em 1974, a Hadrodinâmica Quântica (abreviadamente QHD ^(*)) é uma teoria quântica relativística de muitos corpos renormalizável, cujo objetivo é descrever autoconsistentemente a interação entre hádrons, incorporando explicitamente os graus de liberdade bariônicos e mesônicos [1]. Entre suas aplicações, podemos citar: o estudo da equação de estado matéria nuclear infinita [2, 3] – um dos temas deste trabalho – e as propriedades dos núcleos finitos [4]. Em Astrofísica Nuclear, tem sido aplicada, por exemplo, à pesquisa da estrutura de estrelas de nêutrons e ao estudo da equação de estado da matéria estelar no regime supranuclear de densidade [5, 6].

A QHD guarda certa afinidade com a QED: esta descreve a interação eletromagnética entre partículas carregadas em termos do campo de fótons — os *quanta* do campo eletromagnético — enquanto que, em QHD, a interação entre hádrons é descrita através da troca de mésons massivos.

Vamos apresentar, neste capítulo, uma breve introdução à QHD, enfatizando de

^(*) Do Inglês **Quantum Hadro-Dynamics**.

que forma esse formalismo pode ser aplicado, com sucesso, na obtenção de uma equação de estado realística para o estado fundamental da matéria hadrônica, isto é, da matéria composta de bárions e mésons à temperatura zero. Lembramos que as equações de estado para o regime subnuclear sem nêutrons livres e para o subnuclear com nêutrons livres, já foram discutidas no capítulo anterior. Neste sentido, este capítulo serve de suporte ao Capítulo 4, onde propomos uma equação de estado para o regime supranuclear de densidade à luz da QHD, visando incorporar o confinamento dos neutrinos produzidos pela captura eletrônica durante o colapso estelar. O leitor familiarizado com o formalismo da QHD pode, se preferir, ir direto ao Capítulo 4.

Neste trabalho, adotamos as mesmas convenções e notações usadas por Serot e Walecka na referência [4], descritas no Apêndice A, e o sistema natural de unidades $\hbar = c = 1$.

3.2 O Modelo QHD-I

Consideremos um sistema de nucleons interagindo entre si através do campo escalar $\sigma(x_\mu)$ e do campo vetorial $\omega_\nu(x_\mu)$. O campo escalar é introduzido para descrever a parte atrativa da interação entre os nucleons, dominante para densidades intermediárias (em relação a densidade da matéria nuclear saturada, ρ_0), enquanto que o campo vetorial descreve a parte repulsiva da interação, dominante para densidades elevadas. A inclusão destes dois campos neutros é suficiente para reproduzir a curva de saturação da energia de ligação nuclear observada experimentalmente.

Os graus de liberdade fundamentais em QHD são os campos bariônicos e os campos mesônicos. Estes campos são fundamentais no sentido de que as partículas descritas por eles não possuem estrutura interna (*).

Assim, a interação entre os nucleons é descrita pelo acoplamento do campo bariônico

(*) Neste sentido, a QHD não é a teoria fundamental da interação forte, como é a QCD.

Ψ com os campos mesônicos, sendo mensurada pelos termos $g_v \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi \omega^\mu$ e $g_s \bar{\Psi} \Psi \sigma$, onde g_v e g_s são as constantes de acoplamento vetorial e escalar, respectivamente. Nesta descrição, Ψ , σ e ω são operadores.

A lagrangeana do sistema descrito acima é dada por [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & \bar{\Psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v \omega^\mu) - (m_B - g_s \sigma)] \Psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_s^2 \sigma^2) \\ & - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_\mu \omega^\mu, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

onde γ_μ denota as matrizes de Dirac, que na representação usual de Dirac-Pauli são dadas pelas seguintes matrizes 4×4 :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2.2)$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade 2×2 e

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.3)$$

são as matrizes de Pauli. O tensor antisimétrico $\omega_{\mu\nu}$ é definido por

$$\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu, \quad (3.2.4)$$

e m_B , m_v e m_s representam as massas dos nucleons, do méson vetorial e do méson escalar, respectivamente.

O primeiro termo da Eq. (3.2.1) é a lagrangeana de Dirac para férmions livres, acrescida da energia de interação com os mésons ω e σ ; o segundo é a lagrangeana para bósons escalares livres; o terceiro e o quarto termos correspondem à lagrangeana de um campo vetorial massivo.

Partindo-se das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial (\partial q_i / \partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_I}{\partial q_i} = 0, \quad (3.2.5)$$

com $q_i = \sigma, \omega_\mu, \Psi$, pode-se obter as seguintes equações de movimento para os campos:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2)\sigma = g_s \bar{\Psi} \Psi, \quad (3.2.6)$$

$$\partial_\mu \omega^{\mu\nu} + m_v^2 \omega^\nu = g_v J_B^\nu, \quad (3.2.7)$$

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_v \omega_\mu) - (m_B - g_s \sigma)] \Psi = 0, \quad (3.2.8)$$

onde, em (3.2.7),

$$J_B^\mu \equiv \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \quad (3.2.9)$$

é a corrente bariônica, sendo

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0, \quad (3.2.10)$$

o conjugado de Dirac associado ao operador Ψ .

Da Eq. (3.2.8) obtemos a seguinte equação para $\bar{\Psi}$:

$$\bar{\Psi} [\gamma^\mu (i\partial_\mu + g_v \omega_\mu) + (m_B - g_s \sigma)] = 0. \quad (3.2.11)$$

Multiplicando-se (3.2.8) à esquerda por $\bar{\Psi}$ e (3.2.11) à direita por Ψ e, a seguir, somando-as, obtemos a equação

$$\partial_\mu J_B^\mu = 0, \quad (3.2.12)$$

que traduz a lei da conservação da corrente bariônica. Consequentemente, sendo $m_v \neq 0$, segue-se de (3.2.7) que $\partial_\mu \omega^\mu = 0$.

Em termos da densidade lagrangeana, o tensor energia-momento é usualmente [7] definido por

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q_i / \partial x^\mu)} \frac{\partial q_i}{\partial x^\nu}. \quad (3.2.13)$$

Substituindo-se (3.2.1) e (3.2.8) na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} [-\partial_\lambda \sigma \partial^\lambda \sigma + m_s^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} \omega_{\lambda\sigma} \omega^{\lambda\sigma} - m_v^2 \omega_\lambda \omega^\lambda] g_{\mu\nu} \\ & + i \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \partial_\mu \omega^\lambda \omega_{\lambda\nu}. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Uma outra relação [8], muito útil para nós, é que, para um fluido uniforme, o valor médio do tensor $T_{\mu\nu}$ é dado por

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\varepsilon + P) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} , \quad (3.2.15)$$

onde ε é a densidade de energia do fluido, P a pressão e $u_\mu = (1, \mathbf{u})$ o quadri-vetor velocidade associado ao movimento do fluido. Portanto, para um fluido uniforme em repouso, valem as relações

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle , \quad (3.2.16)$$

e

$$P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle . \quad (3.2.17)$$

Assim, dada a lagrangeana de um sistema, podemos obter a equação de estado determinando-se o valor médio de $T^{\mu\nu}$. No presente caso, isto equivale a conhecer-se, primeiramente, as expressões para os campos Ψ , ω_μ e σ que satisfaçam às equações de movimento (3.2.6–8).

Portanto, voltemos às equações de movimento. Podemos ver que elas formam um sistema de equações diferenciais acopladas e não-lineares para os campos Ψ , ω_μ e σ , e cujas soluções exatas são, evidentemente, de difícil obtenção. Como resolvê-las, então? Uma solução aproximada, e em muitos casos bastante satisfatória, para se contornar o problema, consiste em se substituir, nas equações de movimento, os campos mesônicos por seus respectivos valores médios relativos ao estado fundamental do sistema. Este método de resolver as equações de movimento é denominado de Aproximação de Campo Médio (ACM), a qual, aplicada no presente caso, é equivalente a se introduzir as seguintes substituições:

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle \equiv \sigma^0$$

e

$$\omega_\mu \rightarrow \langle \omega_\mu \rangle \equiv \omega_\mu^0 .$$

Para um sistema uniforme, os campos σ^0 e ω_μ^0 são independentes de x_μ , e as respectivas equações de movimento admitem, neste caso, as soluções

$$\sigma^0 = \frac{g_s}{m_s^2} \varrho_s , \quad (3.2.18)$$

$$\omega_0^0 = \frac{g_v}{m_v^2} \varrho_B , \quad (3.2.19a)$$

$$\omega_i^0 = \frac{g_v}{m_v^2} \langle J_{B,i} \rangle , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (3.2.19b)$$

O termo de fonte para o campo σ^0 médio, presente na Eq. (3.2.6), é a densidade escalar ϱ_s , definida por

$$\varrho_s \equiv \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle_0 . \quad (3.2.20)$$

Por outro lado, para o campo ω_μ^0 as fontes são: a densidade bariônica (número de bárions por unidade de volume), dada por

$$\varrho_B \equiv \langle \Psi^\dagger \Psi \rangle_0 , \quad (3.2.21)$$

e as componentes espaciais da corrente bariônica. Notemos que nas soluções apresentadas acima para os campos mesônicos, exige-se que os mésons em questão sejam massivos. Por outro lado, podemos ver também que as fontes para os campos condensados dependem apenas do campo bariônico Ψ .

Da Eq. (3.2.21), vemos que

$$B \equiv \int_V J_B^0 d^3x = \int_V \Psi^\dagger \Psi d^3x , \quad (3.2.22)$$

onde B , o número total de bárions do sistema, é uma constante de movimento.

Substituindo-se σ^0 e ω_μ^0 na Eq. (3.2.8), obtemos a equação de movimento para Ψ

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v \omega_0^\mu) - m_B^*] \Psi = 0 , \quad (3.2.23)$$

onde a equação

$$m_B^* = m_B - g_s \sigma_0 , \quad (3.2.24)$$

define a *massa efetiva* dos nucleons, cuja solução discutiremos mais adiante.

Consideremos, em primeiro lugar, a solução de onda plana clássica para a equação de Dirac (3.2.23), dada por

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = u(k, \lambda) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\varepsilon(k)t}, \quad (3.2.25)$$

onde $u(k, \lambda)$ é o espinor de Dirac, k o momento e λ define o estado de spin. Substituindo-se a solução acima na Eq. (3.2.23), obtemos a seguinte equação de autovalores ^(*) :

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta m_B^*) u(k, \lambda) = E^* u(k, \lambda), \quad (3.2.26)$$

onde $\beta \equiv \gamma^0$, $\boldsymbol{\alpha} \equiv \beta \boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$),

$$E^* = \varepsilon(k) - g_v \omega_0^0$$

e

$$k_i = k_i - g_v \omega_i^0.$$

Observe que, sob a ação do campo médio σ_0 , os bárions respondem com a redução de sua massa efetiva, como vemos da Eq. (3.2.24) e que, por outro lado, o campo vetorial afeta a relação de dispersão da solução de onda plana, redefinindo o *zero* de energia e o momento \mathbf{k} da partícula.

A Eq. (3.2.26) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} m_B^* - E^* & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} & -m_B^* - E^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u,$$

cujas soluções fornecem os autovalores de energia

$$\varepsilon_{\pm} = g_v \omega_0 \pm E^*, \quad (3.2.27)$$

^(*) O operador $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta m_B^*$ é o hamiltoniano da partícula.

Nesta base de operadores, o procedimento usual de quantização fornece a seguinte expressão para o operador de campo [4]:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k, \lambda} [a_{k\lambda} u(k, \lambda) e^{ik \cdot \mathbf{x} - i\varepsilon t} + b_{k\lambda}^\dagger v(k, \lambda) e^{-ik \cdot \mathbf{x} - i\varepsilon t}], \quad (3.2.35)$$

onde V é o volume do sistema.

Num sistema com simetria esférica, o valor médio da parte espacial do campo vetorial é identicamente nulo, isto é, $\langle \omega_i \rangle_0 = 0$. Neste caso, sobrevive apenas a componente temporal ω_0 e as soluções se obtém fazendo-se a substituição $k_i \rightarrow k_i$. Suporemos, daqui por diante, que o nosso sistema possui simetria esférica. Vejamos agora como obter a equação de estado.

Em termos dos campos médios σ_0 e ω_0 , a lagrangeana (3.2.1) se escreve, agora,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{(ACM)} &= \bar{\Psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 \omega_0 - m_B^*] \Psi \\ &\quad - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2. \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Usando-se a Eq. (3.2.23), obtemos

$$(T_{\mu\nu})_{ACM} = i\bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi - \left(\frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \right) g_{\mu\nu}. \quad (3.2.37)$$

Escrevendo-se separadamente as componente diagonais do tensor energia-momento, teremos

$$\begin{aligned} (T_{00})_{ACM} &= \Psi^\dagger i \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2, \\ (T_{ii})_{ACM} &= -i \Psi^\dagger \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \Psi + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2. \end{aligned}$$

De acordo com as Eqs. (3.2.16) e (3.2.17), encontramos as seguintes expressões para a densidade de energia e para a pressão:

$$\varepsilon = \Psi^\dagger (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \boldsymbol{\beta} m_B^* + g_v \omega_0) \Psi - \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2, \quad (3.2.38)$$

$$P = \frac{1}{3} \Psi^\dagger (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla) \Psi + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2, \quad (3.2.39)$$

onde, nas passagens, foi usada a *equação de Dirac* juntamente com as propriedades das matrizes de Dirac descritas no Apêndice A.

Investiguemos agora o limite $T = 0$. Neste caso, em decorrência do Princípio de Exclusão de Pauli, todos os férmions do sistema — isto é, os nucleons — devem preencher os níveis de energia abaixo do *nível de Fermi*. Sendo assim, podemos definir o estado fundamental do sistema, $|EF\rangle$, como

$$|EF\rangle \equiv \prod_{k\lambda}^{k_F} a_{k\lambda}^\dagger |0\rangle, \quad (3.2.40)$$

onde k_F é o momento de Fermi dos nucleons e o *ket* $|0\rangle$ é o estado de *vácuo* dos operadores de criação a e b , tal que,

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0.$$

Usando-se (3.2.35), é imediato verificarmos que

$$\rho_B = \langle \Psi^\dagger \Psi \rangle = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3, \quad (3.2.41)$$

onde $\gamma \equiv \sum_i (2S_i + 1)$ é a degenerescência de spin, sendo S_i o spin de cada espécie ($\gamma = 2$ para a matéria de nêutrons e $\gamma = 4$ para a matéria nuclear).

Assim, os valores esperados da densidade de energia e da pressão no estado fundamental, definido por (3.2.40), ficam dados por

$$\varepsilon = g_v \omega_0 \rho_B - \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 (k^2 + m_B^{*2})^{1/2} dk, \quad (3.2.42)$$

$$P = \frac{1}{2} g_v \omega_0 \rho_B - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} dk. \quad (3.2.43)$$

Eliminando-se ω_0 e σ_0 nas duas equações anteriores, através das Eqs. (3.2.18–19), encontramos

$$\varepsilon = \frac{C_v^2}{2m_B^2} \rho_B^2 + \frac{m_B^2}{2C_s^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 (k^2 + m_B^{*2})^{1/2} dk, \quad (3.2.44)$$

$$P = \frac{C_v^2}{2m_B^2} \rho_B^2 - \frac{m_B^2}{2C_s^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} dk, \quad (3.2.45)$$

onde $C_v \equiv g_v m_B / m_v$ e $C_s \equiv g_s m_B / m_s$.

As duas equações acima especificam univocamente a equação de estado da matéria nuclear a temperatura zero, prevista pelo modelo QHD-I. Elas fornecem a densidade de energia e a pressão em função, apenas, de um único parâmetro: a densidade bariônica ρ_B .

A massa efetiva m_B^* pode ser obtida substituindo-se (3.2.18) em (3.2.24), com o que encontramos

$$m_B^* = m_B - \frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 \frac{m_B^*}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} dk. \quad (3.2.46)$$

Resolvendo-se a integral do segundo membro, temos

$$m_B^* = m_B - \frac{C_s^2}{m_B^2} \frac{\gamma m_B^*}{4\pi^2} \left[k_F E_F^* - m_B^{*2} \ln \left(\frac{k_F + E_F^*}{m_B^*} \right) \right], \quad (3.2.47)$$

onde $E_F^* = (k_F^2 + m_B^{*2})^{1/2}$.

As constantes de acoplamento g_s e g_v são ajustadas usando-se as seguintes propriedades [4] da matéria nuclear simétrica saturada: a energia de ligação por nucleon e o momento de Fermi, cujos valores experimentais são

$$\left(\frac{E - Bm_B}{B} \right)_0 = -15,75 \text{ MeV},$$

$$k_F^0 = 1,42 \text{ fm}^{-1}, \quad (3.2.48a)$$

a partir dos quais obtemos (*)

$$C_s^2 = 267,1,$$

$$C_v^2 = 195,9. \quad (3.2.48b)$$

A massa efetiva m_B^* é uma função decrescente. Para a densidade nuclear ordinária, a razão m_B^*/m_B é da ordem de 0,6. Isto ocorre por causa do alto valor de $g_s \sigma_0$, que

(*) Observe que o modelo depende, na verdade, da razão entre as constantes de acoplamento e as massas dos respectivos mésons. Sendo assim, não existe uma escala que fixe a massa dos mésons para a matéria nuclear.

determina o comportamento da massa efetiva. Para a densidade de saturação $g_s \sigma_0$ é da ordem de 400 MeV. Embora o campo repulsivo não afete o valor da massa efetiva, ele contribui para a energia de ligação por bárion (E/B), a esta mesma densidade, com aproximadamente 330 MeV.

Dessa forma, a baixa energia de ligação nuclear (≈ 16 MeV) observada experimentalmente, pode ser entendida pela competição entre o campo escalar atrativo e o campo vetorial repulsivo.

Existem dois parâmetros relevantes para a discussão presente, que são: a incompressibilidade da matéria nuclear saturada, definida por

$$K(\rho_0) = 9\rho_0^2 \left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} \right]_{\rho=\rho_0}, \quad (3.2.49)$$

e a energia de assimetria [9, 10]

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{2} \rho_B \left[\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_3^2} \right)_{\rho_B} \right]_{\rho_3=0} \\ &= \frac{g_\rho^2}{12\pi^2 m_\rho^2} k_F^2 + \frac{1}{6} \frac{k_F^2}{(k_F^2 + m_B^{*2})^{1/2}}, \end{aligned} \quad (3.2.50)$$

onde ρ_3 e g_ρ são grandezas associadas ao méson ρ , cujos significados serão discutidos na seção 3.4 (*). Evidentemente, como o méson ρ está ausente na QHD-I, o primeiro termo do membro direito da última equação é identicamente nulo.

Ocorre que o valor previsto pelo modelo QHD-I para a incompressibilidade da matéria nuclear saturada, de 540 MeV, está em grande desacordo com o valor experimental, estimado em 210 ± 30 MeV [11]. Entretanto, verifica-se um desacordo menor para a energia de assimetria a_4 : de 22,1 MeV, contra o valor empírico de 33,2 MeV.

(*) O coeficiente a_4 entra na expressão da fórmula semi-empírica de massa, dada por

$$\frac{E}{B} = m_B - a_1 + \frac{a_2}{B^{1/3}} + \frac{a_3 Z^2}{B^{4/3}} + a_4 \frac{(B - 2Z)^2}{B^2(1 + \zeta/B^{1/3})},$$

onde ζ é uma correção ao termo de superfície.

Contudo, uma significativa redução da incompressibilidade pode ser obtida com a introdução, na lagrangeana (3.2.1), de potências de ordens superiores em σ , como veremos na seção seguinte. Por outro lado, a correção de a_4 surge naturalmente com a incorporação do méson ρ ao modelo, como será visto na seção 3.4.

3.3 O Modelo de Walecka Não-Linear

Ainda que a QHD-I forneça uma descrição consistente da matéria nuclear, vimos que ela falha ao prever para a incompressibilidade da matéria nuclear, na densidade de saturação, por exemplo, um resultado discrepante com os valores previstos empiricamente e, também, um valor reduzido para a massa efetiva. No primeiro caso, a diferença é consequência do elevado valor médio atribuído ao campo vetorial repulsivo.

Contudo, os resultados que estamos mencionando podem ser corrigidos introduzindo-se, na densidade lagrangeana (3.2.1), termos de ordens superiores em σ , e que correspondem a uma auto-interação do campo escalar. Com efeito, no modelo não-linear, como é chamado, a lagrangeana para o mesmo sistema descrito no início da seção anterior é dada por [12, 13]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\Psi} \left[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v \omega^\mu) - (m_B - g_s \sigma) \right] \Psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_s^2 \sigma^2) \\ & - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_\mu \omega^\mu - U(\sigma), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

onde

$$U(\sigma) = \frac{1}{3} b m_B \sigma^3 + \frac{1}{4} c \sigma^4, \quad (3.3.2)$$

representa a energia de auto-interação do campo escalar σ , sendo b e c constantes adimensionais.

As equações de movimento para os campos são dadas por

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2) \sigma = g_s \bar{\Psi} \Psi - b m_B \sigma^2 - c \sigma^3, \quad (3.3.3)$$

$$\partial_\mu \omega^{\mu\nu} + m_v^2 \omega^\nu = g_v J_B^\nu, \quad (3.3.4)$$

$$\left[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_v \omega_\mu) - (m_B - g_s \sigma) \right] \Psi = 0. \quad (3.3.5)$$

Aplicando-se agora a aproximação de campo médio às três equações anteriores e lembrando que, no estado fundamental de um sistema com simetria esférica no espaço dos momentos, o valor esperado da componente espacial do campo vetorial é nula, encontramos

$$g_s \sigma_0 = \frac{C_s^2}{m_B^2} \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle_0 - \frac{C_s^2}{m_B} \frac{b}{g_s^3} (g_s \sigma_0)^2 - \frac{C_s^2}{m_B^2} \frac{c}{g_s^4} (g_s \sigma_0)^3, \quad (3.3.6)$$

$$g_v \omega^0 = \frac{C_v^2}{m_B^2} \langle \Psi^\dagger \Psi \rangle_0, \quad (3.3.7)$$

$$[i\gamma_\mu \partial^\mu - g_v \gamma^0 \omega_0 - m_B^*] \Psi = 0, \quad (3.3.8)$$

onde $C_s \equiv g_s m_B / m_s$ e $C_v \equiv g_v m_B / m_v$.

Da Eq. (3.3.6), vemos que a equação para m_B^* é

$$m_B^* = m_B + \frac{C_s^2}{m_B^2} \frac{b}{g_s^3} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{C_s^2}{m_B^2} \frac{c}{g_s^4} (m_B - m_B^*)^3 - \frac{C_s^2}{m_B^2} \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle_0. \quad (3.3.9)$$

Seguindo o mesmo procedimento descrito na seção anterior, podemos deduzir as seguintes expressões para a densidade de energia e para a pressão (para $T = 0$):

$$\varepsilon = U(\sigma) + \frac{m_B^2}{2C_s^2} g_s^2 \sigma_0^2 + \frac{C_v^2}{2m_B^2} \varrho_B^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} (k^2 + m_B^{*2})^{1/2} d^3k, \quad (3.3.10)$$

$$P = -U(\sigma) - \frac{m_B^2}{2C_s^2} g_s^2 \sigma_0^2 + \frac{C_v^2}{2m_B^2} \varrho_B^2 + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} d^3k. \quad (3.3.11)$$

Nesta descrição, existe a liberdade de ajustar-se os valores de b e c para se obter os valores desejados de K e m_B^* , condizentes com os dados experimentais.

3.4 O Modelo QHD-II

Uma extensão natural da QHD-I seria incorporar, além dos mésons σ e ω , os mésons π e ϱ . Entretanto, antes de apresentarmos os resultados desse modelo, passemos rapidamente em revista algumas propriedades desses mésons, e de que forma eles

podem ser tratados consistentemente dentro do formalismo da QHD-II, tendo em vista a consideração de algumas simetrias e leis de conservação do sistema.

3.4.1 – O Teorema de Noether

O teorema de Noether afirma que, para cada simetria exibida pela lagrangeana de um dado sistema, está associada a conservação de uma corrente. Como exemplo, consideremos a seguinte transformação sobre o campo Ψ

$$\Psi(\mathbf{x}) \rightarrow \Psi'(\mathbf{x}) = e^{i\alpha}\Psi(\mathbf{x}), \quad (3.4.1)$$

onde α é uma constante (isto é, trata-se de uma transformação de fase global). Se α é infinite-simal, temos

$$\Psi(\mathbf{x}) \rightarrow \Psi'(\mathbf{x}) = (1 + i\alpha)\Psi(\mathbf{x}), \quad (3.4.2)$$

e

$$\bar{\Psi}(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\Psi}'(\mathbf{x}) = (1 - i\alpha)\bar{\Psi}(\mathbf{x}). \quad (3.4.3)$$

A lagrangeana (3.2.1) é invariante frente às transformações anteriores, isto é,

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}'_I.$$

Logo, $\delta\mathcal{L}_I = 0$. Tendo em vista a Eq. (3.2.5), segue-se que

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}_I}{\partial(\partial_\mu\Psi)} \delta\Psi \right] = \partial_\mu [i\bar{\Psi}\gamma^\mu\delta\Psi] = 0.$$

Mas $\delta\Psi = i\alpha\Psi$; logo

$$\alpha\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = 0,$$

ou

$$\partial_\mu J_B^\mu = 0, \quad (3.4.4)$$

onde J_B^μ é a corrente bariônica [veja as Eqs. (3.2.9) e (3.2.12)].

A lei de conservação de uma dada corrente acarreta, como consequência, a conservação de uma carga associada a esta corrente (a integral de volume da componente

temporal do vetor que a descreve). No presente caso, a carga conservada é justamente o número total de bárions do sistema, como mostra a Eq. (3.2.22).

3.4.2 – O acoplamento π - N

O méson π é um méson pseudoescalar-isovetorial (isospin 1), cujo campo é completamente especificado por um tripleto de campos reais

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}, \quad (3.4.5)$$

em que os campos para cada estado de carga podem ser obtidos através das combinações lineares

$$\begin{aligned} \pi_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2), \\ \pi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2), \\ \pi_0 &= \pi_3. \end{aligned}$$

Para o que se segue, é conveniente representarmos o campo dos nucleons (N) por um único objeto no espaço de isospin: um duplete de isospin 1/2, dado por

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix}. \quad (3.4.6)$$

Consideremos a lagrangeana [4] de um sistema de nucleons e píons:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi N} &= \bar{\Psi}_N (\gamma_\mu i \partial^\mu - m_B) \Psi_N + \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - m_\pi^2 \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}) - ig_\pi \bar{\Psi}_N \boldsymbol{\gamma}_5 \boldsymbol{\tau} \Psi_N \cdot \boldsymbol{\pi} \\ &+ \frac{1}{2} g_{\sigma\pi} m_s \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} \sigma, \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

onde a matriz $\boldsymbol{\gamma}_5$ é definida por $\boldsymbol{\gamma}_5 = i\boldsymbol{\gamma}^0\boldsymbol{\gamma}^1\boldsymbol{\gamma}^2\boldsymbol{\gamma}^3$, e investiguemos suas simetrias.

Os geradores do grupo SU(2), T_i , satisfazem às seguintes relações de comutação

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k, \quad (3.4.8)$$

onde ε_{ijk} é o tensor de Levi-Civita de três índices. Ora, o operador de isospin, $\boldsymbol{\tau}$, obedece à mesma álgebra dos geradores T_i . Efetuemos, então, as seguintes transformações de fase globais sobre os campos Ψ_N e $\boldsymbol{\pi}$

$$\Psi_N(\mathbf{x}) \rightarrow \Psi'_N(\mathbf{x}) = e^{i\boldsymbol{\tau}\cdot\vec{\theta}/2}\Psi_N(\mathbf{x}), \quad (3.4.9)$$

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\pi}'(\mathbf{x}) = e^{iT\cdot\vec{\theta}}\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}), \quad (3.4.10)$$

onde $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ é um tripleto de constantes reais. Para $\vec{\theta} \rightarrow 0$, temos

$$\Psi'_N(\mathbf{x}) = \left(1 + \frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\vec{\theta}\right)\Psi_N(\mathbf{x}), \quad (3.4.11)$$

e

$$\boldsymbol{\pi}'(\mathbf{x}) = (1 - \vec{\theta}\times)\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}). \quad (3.4.12)$$

É fácil verificarmos que a lagrangeana (3.4.7) é invariante em relação ao conjunto de transformações mostradas acima. Em consequência, temos que

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{\pi N}}{\partial(\partial_\mu \Psi_N)} \delta \Psi_N \right] + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{\pi N}}{\partial(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})} \delta \boldsymbol{\pi} \right] = 0,$$

que conduz à equação

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.4.13)$$

onde a corrente conservada (J^μ) é dada pela expressão

$$J^\mu = \frac{1}{2}\bar{\Psi}_N \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \Psi_N + \boldsymbol{\pi} \times \partial^\mu \boldsymbol{\pi}, \quad (3.4.14)$$

que é a corrente de isospin.

3.4.3 – O acoplamento ρ - N

Em sua forma mais simplificada, a densidade lagrangeana que descreve a interação entre o méson ρ e os nucleons é dada por [9]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rho N} = & \bar{\Psi}_N \left[\gamma_\mu \left(i\partial_\mu - \frac{g_\rho}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu \right) - m_B \right] \Psi_N - \frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu, \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

onde

$$\mathbf{e}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{e}_\nu - \partial_\nu \mathbf{e}_\mu - g_\rho (\mathbf{e}_\mu \times \mathbf{e}_\nu). \quad (3.4.16)$$

O méson ρ é um vetor isovetor (isospin 1), que pode ser representado por um tripleto de quadrivetores correspondentes aos seus três estados de carga

$$\mathbf{e}^\mu = \begin{pmatrix} \varrho^0_1 & \varrho^x_1 & \varrho^y_1 & \varrho^z_1 \\ \varrho^0_2 & \varrho^x_2 & \varrho^y_2 & \varrho^z_2 \\ \varrho^0_3 & \varrho^x_3 & \varrho^y_3 & \varrho^z_3 \end{pmatrix}. \quad (3.4.17)$$

Consideremos a seguinte transformação global sobre o objeto $T \cdot \mathbf{e}_\mu$:

$$[T \cdot \mathbf{e}_\mu] \rightarrow [T \cdot \mathbf{e}_\mu]' = e^{iT \cdot \vec{\theta}} T \cdot \mathbf{e}_\mu e^{-iT \cdot \vec{\theta}}. \quad (3.4.18)$$

Tal transformação deixa $\mathcal{L}_{\rho N}$ invariante, e a corrente conservada associada a essa invariância é dada, neste caso, pela corrente isovetorial

$$T^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi}_N \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \Psi_N + \mathbf{e}_\nu \times \mathbf{e}^{\nu\mu}. \quad (3.4.19)$$

Frisemos, finalmente, que os resultados que foram obtidos mais acima para as lagrangeanas parciais $\mathcal{L}_{\pi N}$ e $\mathcal{L}_{\rho N}$, são uma consequência direta de sua invariância frente às transformações globais do grupo SU(2).

3.4.4 – A Lagrangeana QHD-II

De acordo com o que foi visto nas duas seções anteriores, a lagrangeana [4] para o sistema composto de nucleons acoplados aos campos mesônicos σ , ω , $\boldsymbol{\pi}$ e $\boldsymbol{\rho}$ é dada por

$$\mathcal{L}_{II} = \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_{\pi N} + \mathcal{L}_{\rho N} + \mathcal{L}_\pi^0 + \mathcal{L}_\rho^0, \quad (3.4.20a)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi N} &= -ig_\pi \boldsymbol{\pi} \cdot (\bar{\Psi}_N \boldsymbol{\gamma}_5 \boldsymbol{\tau} \Psi_N), \\ \mathcal{L}_{\rho N} &= -\frac{i}{2} g_\rho \bar{\Psi}_N \boldsymbol{\gamma}^\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_\mu \Psi_N, \\ \mathcal{L}_\pi^0 &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - m_\pi^2 \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{2} g_{\sigma\pi} m_s \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi} \sigma, \\ \mathcal{L}_\rho^0 &= \frac{1}{2} m_\rho^2 \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\mu - \frac{1}{4} \mathbf{e}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{e}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.4.20b)$$

e \mathcal{L}_I é a lagrangeana QHD-I, definida na Eq. (3.2.1).

As correspondentes equações de movimento são

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_v \omega_\mu - \frac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}_\mu) - (m_B - g_s \sigma)] \Psi_N = 0, \quad (3.4.21)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2) \sigma = g_s \bar{\Psi}_N \Psi_N, \quad (3.4.22)$$

$$\partial_\mu \omega^{\mu\nu} + m_v^2 \omega^\nu = g_v \bar{\Psi}_N \gamma^\nu \Psi_N, \quad (3.4.23)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\pi^2) \boldsymbol{\pi} = g_\pi \bar{\Psi}_N \boldsymbol{\gamma}_5 \boldsymbol{\tau} \Psi_N, \quad (3.4.24)$$

$$\partial_\mu \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}^\nu = \frac{1}{2} g_\rho \bar{\Psi}_N \boldsymbol{\gamma}^\nu \boldsymbol{\tau} \Psi_N. \quad (3.4.25)$$

Afortunadamente, a aproximação de campo médio conduz a uma significativa simplificação dessas equações. Vejamos, primeiramente, o que acontece com o campo pseudoescalar $\boldsymbol{\pi}$. Como se sabe, o méson π tem paridade negativa, isto é,

$$\hat{P} \boldsymbol{\pi} \hat{P}^{-1} = -\boldsymbol{\pi},$$

onde \hat{P} é o operador de paridade. Assumindo-se que o estado fundamental tem paridade definida, isto é, que $\hat{P}|EF\rangle = a|EF\rangle$, onde $|a| = 1$, é fácil ver que o valor médio do campo $\boldsymbol{\pi}$ é igual a zero

$$\langle \boldsymbol{\pi} \rangle_0 = 0. \quad (3.4.26)$$

Analogamente, a invariância de translação e de rotação implicam que os valores médios das componentes espaciais dos campos mesônicos sejam todos nulos, isto é,

$$\langle \omega_i \rangle_0 = \langle \rho_i \rangle_0 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.4.27)$$

e que os termos derivativos mesônicos também sejam nulos. Por outro lado, no espaço de isospin temos que

$$\tau_3 |EF\rangle = (N_p - N_n) |EF\rangle, \quad (3.4.28)$$

onde N_p é o número total de prótons do sistema e N_n o número total de nêutrons. É fácil mostrar que $\langle \tau_1 \rangle_0 = \langle \tau_2 \rangle_0 = 0$. Portanto,

$$\langle \rho_1^0 \rangle_0 = \langle \rho_2^0 \rangle_0 = 0. \quad (3.4.29)$$

Sendo assim, quando a aproximação de campo médio é aplicada ao campo ϱ_μ , sobrevive somente a componente temporal $\langle \varrho_3^0 \rangle_0 \equiv \varrho_{03}$, associada ao méson ϱ neutro.

Tendo em vista as simplificações mencionadas acima, a lagrangeana QHD-II se reduz, portanto, à expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{II}^{(ACM)} = & \bar{\Psi}_N \left[i\gamma_\mu \partial^\mu - \frac{1}{2} g_\varrho \tau_3 \gamma^0 \varrho_{03} - g_v \gamma^0 \omega_0 - (m_B - g_s \sigma_0) \right] \Psi_N - \frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 \\ & + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_\varrho^2 \varrho_{03}^2, \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

a partir da qual obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2} g_\varrho \tau_3 \gamma^0 \varrho_{03} - g_v \gamma^0 \omega_0 - (m_B - g_s \sigma_0) \right] \Psi_N = 0, \quad (3.4.31)$$

$$\sigma_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \varrho_s, \quad (3.4.32)$$

$$\omega_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \varrho_B, \quad (3.4.33)$$

$$\varrho_{03} = \frac{g_\varrho}{2m_\varrho^2} \varrho_3, \quad (3.4.34)$$

onde as fontes dos campos mesônicos são dadas por

$$\varrho_s = \langle \bar{\Psi}_N \Psi_N \rangle = \left(\langle \bar{\Psi}_p \Psi_p \rangle + \langle \bar{\Psi}_n \Psi_n \rangle \right), \quad (3.4.35)$$

$$\varrho_B = \langle \Psi_N^\dagger \Psi_N \rangle = \left(\langle \Psi_p^\dagger \Psi_p \rangle + \langle \Psi_n^\dagger \Psi_n \rangle \right), \quad (3.4.36)$$

$$\varrho_3 = \langle \Psi_N^\dagger \tau_3 \Psi_N \rangle = \left(\langle \Psi_p^\dagger \Psi_p \rangle - \langle \Psi_n^\dagger \Psi_n \rangle \right). \quad (3.4.37)$$

De acordo com a equação acima, vemos que o méson ϱ traz informação sobre a assimetria de carga no sistema e que a fonte ϱ_3 pode ser escrita na forma

$$\varrho_3 = \varrho_p - \varrho_n. \quad (3.4.38)$$

Em particular, para $\varrho_p = \varrho_n$ (matéria nuclear simétrica) recupera-se os resultados obtidos na seção 3.2.

A solução da equação de Dirac é semelhante à que foi obtida na primeira seção. Entretanto, a relação de dispersão é dada agora pelas seguintes expressões:

$$\varepsilon_{\pm} = g_v \omega_0 + \frac{1}{2} g_{\rho} \rho_{03} \pm (k^2 + m_B^{*2})^{1/2}, \quad (3.4.39)$$

para prótons e

$$\varepsilon_{\pm} = g_v \omega_0 - \frac{1}{2} g_{\rho} \rho_{03} \pm (k^2 + m_B^{*2})^{1/2}, \quad (3.4.40)$$

para nêutrons.

3.4.5 – Equação de Estado

Vejamos agora como fica a equação de estado prevista pelo modelo QHD-II. Para o valor médio do tensor energia-momento temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle_0 = & -g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} m_s^2 \sigma_0^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} m_{\rho}^2 \rho_{03}^2 \right) \\ & + \langle \bar{\Psi}_p i \gamma_{\mu} \partial_{\nu} \Psi_p \rangle + \langle \bar{\Psi}_n i \gamma_{\mu} \partial_{\nu} \Psi_n \rangle. \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

De acordo com o que vimos na seção 3.2, a equação de estado para a matéria nuclear fria é dada, então, por

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \langle T_{00} \rangle_0 \\ = & \frac{C_v^2}{2m_B^2} \rho_B^2 + \frac{m_B^2}{2C_s^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{C_{\rho}^2}{8m_B^2} \rho_{03}^2 \\ & + \frac{2}{(2\pi)^3} \left[\int_0^{k_p} (k^2 + m_B^{*2})^{1/2} d^3k + \int_0^{k_n} (k^2 + m_B^{*2})^{1/2} d^3k \right], \end{aligned} \quad (3.4.42)$$

e

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle_0 \\ = & \frac{C_v^2}{2m_B^2} \rho_B^2 - \frac{m_B^2}{2C_s^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{C_{\rho}^2}{8m_B^2} \rho_{03}^2 \\ & + \frac{2}{(2\pi)^3} \left[\int_0^{k_p} \frac{k^2}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} d^3k + \int_0^{k_n} \frac{k^2}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} d^3k \right], \end{aligned} \quad (3.4.43)$$

onde k_p e k_n são os *momentos de Fermi* dos prótons e nêutrons, respectivamente, e $C_\rho = g_\rho^2 m_B / m_\rho$.

Por último, a Eq. (2.3.32) fornece a seguinte equação de movimento para a massa efetiva:

$$\begin{aligned} m_B^* &= m_B - g_s \sigma_0 \\ &= m_B - \frac{C_s^2}{m_B^2} \frac{2}{(2\pi)^3} \left[\int_0^{k_p} \frac{m_B^*}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} d^3 k \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{k_n} \frac{m_B^*}{(k^2 + m_B^{*2})^{1/2}} d^3 k \right]. \end{aligned} \quad (3.4.44)$$

No total, o modelo possui cinco parâmetros: sendo dois deles parâmetros externos, ρ_B e ρ_3 , e mais as constantes de acoplamento, g_s , g_v e g_ρ . As constantes g_s e g_v são fixadas pelas mesmas propriedades da matéria nuclear simétrica mencionadas no final da seção 3.2. O valor de g_ρ é obtido mediante o ajuste do valor empírico de a_4 .

Referências

- [1] Walecka, J.D., Ann. Phys. (N.Y.), **83** (1974), 491.
- [2] Chin, S.A. e Walecka, J.D., Phys. Lett., **52B** (1974), 24.
- [3] Chin, S.A., Ann. Phys. (N.Y.), **108** (1977), 301.
- [4] Serot, B.D. e Walecka, J.D., “*Advances in Nuclear Physics*”, Plenum, New York (1986), Vol. 16.
- [5] Glendenning, N.K., Astrophys. J., **293** (1985), 470.
- [6] Glendenning, N.K. e Moszkowski, S.A., Phys. Rev. Lett., **67** (1991), 2414.
- [7] Lurié, D., “*Particles and Fields*”, Interscience Publishers (1968).
- [8] Weinberg, S., “*Gravitation and Cosmology*”, John Wiley & Sons (1972).
- [9] Serot, B.D., Phys. Lett., **86B** (1979), 146.
- [10] Matsui, T., Nucl. Phys., **A370** (1981), 365
- [11] Blaizot, J.P., Gogny, D. e Grammaticos, B., Nucl. Phys., **A265** (1976), 315.
- [12] Boguta, J. e Bodmer, A.R., Nucl. Phys., **A 292** (1977), 413.
- [13] Waldhouser, B.M., Maruhn, J.A., Stocker, H. e Greiner, W., Phys. Rev. **C38** (1988), 1003.

Efeitos do Confinamento de Neutrinos sobre a Equação de Estado

“Posui então [o homem] a inteira certeza de não conhecer nem um sol nem uma terra, mas apenas olhos que vêem este sol, mãos que tocam esta terra; numa palavra, ele sabe que o mundo que o cerca existe apenas como representação (...).”

O Mundo como Vontade e Representação, Schopenhauer

4.1 Introdução

São produzidos neutrinos em todas as fases evolutivas de uma estrela. Entretanto, devido às baixas seções de choque características de interação com a matéria estelar, da ordem de 10^{-44} cm², os neutrinos podem escapar livremente do interior das estrelas sem sofrer, praticamente, interação. Assim, por exemplo, o livre caminho médio para neutrinos de 1 MeV de energia é da ordem de grandeza de 10^{18} cm, muito maior, portanto, que o raio de uma estrela (uma gigante vermelha, por exemplo, tem raio da ordem de 10^{12} cm).

Em 1966, contudo, Colgate e White [1] levantaram a hipótese de que, nos instantes finais do colapso gravitacional de uma estrela massiva, as camadas externas ao caroço central da estrela pudessem ficar opacas aos neutrinos, devido à formação, nestas camadas, de núcleos com número de massa elevado. Em seu modelo, os autores supunham que os neutrinos produzidos pela captura eletrônica pudessem escapar livremente do

caroço estelar, pelo simples fato de que as taxas das reações

$$\nu_e + n \longrightarrow p + e^- \quad \text{e} \quad \nu_e + e^- \longrightarrow \nu_e + e^- , \quad (4.1.1)$$

devem diminuir progressivamente à medida que a densidade aumenta, ficando, portanto, crescentemente bloqueadas pelo Princípio de Exclusão de Pauli, que tende a restringir o espaço de fase acessível aos elétrons que aparecem nos canais de saída das reações mostradas acima. No entanto, a densidade das camadas externas ao caroço é baixa, e em tais sítios essas reações tornam-se possíveis. Portanto, em virtude da maior opacidade das camadas externas a neutrinos, ocorreria uma transferência de energia tanto pelas reações de espalhamento como pela absorção de neutrinos por núcleos. Tal energia transferida seria transportada para as camadas externas em forma de calor, levando o caroço a se esfriar e a envoltória a se aquecer. Com o aumento da temperatura, a pressão do gás aumentaria e o gradiente de pressão, gerando uma onda de choque, poderia, eventualmente, ocasionar uma explosão.

O trabalho citado de Colgate e White foi a primeira tentativa de simulação de colapso gravitacional e de explosão de supernova em computadores eletrônicos, onde os autores estabeleciam um possível mecanismo de explosão, o qual parecia ser o mecanismo definitivo. De fato, este trabalho trouxe um grande impulso à pesquisa em física de supernovas e, desde então, muitos cálculos de supernova, baseados na idéia de transporte de energia e de momento por neutrinos, foram desenvolvidos até que, em 1974, Freedman propôs a existência de correntes neutras em interações fracas, mediadas pelo bóson Z^0 [2]. Com a confirmação experimental da existência de correntes neutras em processos de interação fraca, os rumos da pesquisa em supernovas mudaram drasticamente, sobretudo pelo fato de que tais processos constituem-se, efetivamente, como tentaremos retratar mais adiante, numa fonte a mais de opacidade da matéria estelar a neutrinos.

Em 1975, Sato [2], usando o modelo padrão de Weinberg–Salam–Glashow para a interação fraca, e Mazurek [5], em 1976, mostraram que a matéria estelar torna-se fortemente opaca aos neutrinos mesmo durante a captura eletrônica, e que o processo de neu-

tronização fica fortemente inibido tanto pelo mar degenerado de neutrinos confinados, quanto pela captura de neutrinos por núcleos. Por outro lado, Epstein e Pethick [6] determinaram o valor crítico de densidade para o confinamento de neutrinos, considerando os espalhamentos neutrino-próton, neutrino-nêutron e neutrino-núcleo. Compararam o tempo gasto por um neutrino para escapar por difusão do caroço com o tempo característico de queda livre, e mostraram que o confinamento dos neutrinos no interior do caroço da estrela ocorre para densidades da ordem de 10^{11} – 10^{12} g/cm³, se forem considerados neutrinos com energias maiores que 10 MeV.

Reações com corrente neutra, como, por exemplo,



apresentam taxas de reação similares às reações induzidas por correntes com carga. Entretanto, uma diferença fundamental é que, no meio estelar, as taxas de reação com corrente neutra crescem com a densidade, pelo fato de não existirem elétrons nos estados finais. Além disto, as seções de choque para os processos de espalhamento coerentes de neutrinos por núcleos são bem maiores do que as seções de choque típicas, sendo proporcional a A^2 , onde A é o número de massa dos núcleos. Conseqüentemente, para núcleos com número de massa elevado, presumivelmente presentes nas regiões centrais da estrela nos instantes finais do colapso, o espalhamento coerente neutrino-núcleo deve ser a principal fonte de opacidade a neutrinos, o que pode levá-los a ficar confinados no caroço da estrela.

Como ilustração, consideremos o espalhamento coerente de neutrinos por núcleos de ⁵⁶Fe. A amplitude total de espalhamento de um neutrino por um núcleo com número de massa A [7] é dada por

$$F = \sum_{j=1}^A f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_j}, \quad (4.1.3)$$

onde \mathbf{k} é o número de onda inicial do neutrino, \mathbf{k}' o número de onda final e f é a amplitude de espalhamento entre o neutrino e um nucleon individual. Dizemos que

o espalhamento é coerente se $kR \ll 1$, onde R é o raio do núcleo (≈ 5 fm para o ^{56}Fe). A partir daí, podemos estimar o intervalo de energia dos neutrinos para que ocorra espalhamento coerente, pois $E_\nu = \hbar ck$, o que dá $E_\nu \ll 40$ MeV. De fato, nestas condições, a seção de choque para o espalhamento neutrino-núcleo[8] é dada por

$$\sigma \approx \frac{\sigma_0}{16} \left(\frac{E_\nu}{m_e c^2} \right)^2 A^2, \quad (4.1.4)$$

onde a seção de choque elementar σ_0 é

$$\sigma_0 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\hbar}{m_e c^2} \right)^{-4} \left(\frac{G_F}{m_e c^2} \right)^2. \quad (4.1.5)$$

Vemos da equação acima que a seção de choque fica igual a A^2 vezes a seção de choque elementar entre o neutrino e um nucleon individual. Este fator de elevação da seção de choque, combinado com as elevadas densidades atingidas durante o colapso gravitacional, levam a um livre caminho médio para os neutrinos incrivelmente menor do que os estimados para as demais reações.

Adotando-se o valor $G_F = 10^{-5} m_p^{-2}$ para a constante de Fermi, onde m_p é a massa do próton, obtém-se $\sigma_0 = 1,76 \times 10^{-44} \text{ cm}^2$. Para neutrinos com energia igual a 20 MeV, por exemplo, e fazendo-se $A = 56$, obtemos uma seção de choque total da ordem de 10^{-38} cm^2 .

Vamos estimar o valor do livre caminho médio dos neutrinos para um caroço de ^{56}Fe com densidade de massa igual a 10^{11} g/cm^3 e raio igual a 1.000 km. O número de núcleos de ^{56}Fe por unidade de volume (n_N) é, então, da ordem de 10^{33} cm^{-3} e o livre caminho médio ($\lambda = 1/n_N \sigma$) igual a 1 km. O número de colisões sofridas por cada neutrino (N) é dado por $D = \lambda \sqrt{N}$, onde D é a distância efetiva percorrida pelos neutrinos. Por outro lado, o tempo necessário para que os neutrinos escapem do caroço é $t = \lambda N/c$. Fazendo $D = 1.000$ km, obtemos $t \approx 3,0$ s. Notem que o valor encontrado é muito maior que a escala de tempo característica do colapso gravitacional, que é da ordem de 0,1 s, mostrando, assim, que durante o colapso gravitacional os neutrinos ficam efetivamente confinados no caroço, para densidades maiores que $\approx 10^{11} \text{ g/cm}^3$.

Uma consequência teórica imediata que o confinamento dos neutrinos acarreta, é a impossibilidade de se explicar a explosão de supernova com base no mecanismo de transporte de momento ou energia por neutrinos, como queriam Colgate e White, já que os neutrinos ficam presos no interior do caroço durante o colapso gravitacional da estrela.

Vamos investigar, nas próximas seções deste capítulo, os efeitos do confinamento de neutrinos sobre a equação de estado da matéria estelar fria, seja no regime de densidade subnuclear com nêutrons livres, seja no regime hadrônico. Na seção 4.2, apresentaremos a equação de estado obtida por Gudmundsson e Buchler [9] a partir da equação de estado de Baym, Bethe e Pethick, descrita no Capítulo 2, acrescida de um termo relativo à contribuição dos neutrinos para a pressão. Na seção 4.3, vamos propor uma equação de estado para a matéria hadrônica obtida a partir da QHD, em que a composição química é dada por nêutrons, prótons, elétrons, múons e neutrinos. Os neutrinos (os eletrônicos e os muônicos) serão autoconsistentemente incorporados ao cálculo da equação de estado como duas componentes leptônicas suplementares, em pé de igualdade com os demais férmions do sistema. No final deste trabalho, no Capítulo 6, iremos discutir os efeitos do confinamento de neutrinos sobre a dinâmica do colapso gravitacional.

4.2 O Regime Subnuclear com Neutrinos Confinados

Vamos admitir que os neutrinos eletrônicos degenerados se distribuem uniformemente, permeando a rede cristalina formada pelos núcleos. O primeiro efeito causado pelo confinamento dos neutrinos está em que as taxas de captura eletrônica e de neutronização diminuem, à medida que se preenche o mar de neutrinos, o que faz restringir o espaço de fase acessível aos nêutrons, em virtude do Princípio de Exclusão de Pauli.

Uma grandeza relevante para o cálculo da equação de estado é a fração leptônica, definida pela razão entre o número total de léptons e o número total de bárions do

sistema, ou seja,

$$Y_l(\varrho_B) = \frac{\varrho_l}{\varrho_B}, \quad (4.2.1)$$

onde ϱ_l e ϱ_B são, respectivamente, o número de léptons e o número de bárions por unidade de volume.

Assumindo-se para a densidade limiar de confinamento ϱ_c , conforme podemos ver na Tab. IV, o valor de $4,3 \times 10^{11}$ g/cm³, teremos que a primeira fase do colapso gravitacional, que antecede o confinamento, cobre totalmente o regime de densidade onde é válida a equação de estado de Baym, Pethick e Sutherland, de modo que, nesse regime, apenas os elétrons vão contribuir para a fração leptônica, que inicialmente diminui, em virtude da captura eletrônica. Em contrapartida, quando a matéria se torna opaca aos neutrinos, e estes confinados, a fração leptônica assume um valor fixo. Na Tab. V, constatamos que o valor da fração leptônica para a densidade limiar de confinamento é $Y_l(\varrho_c) = Y_l = 0,315$. Da Eq. (4.2.1), verificamos que

$$Y_l = \frac{\varrho_e + \varrho_{\nu_e}}{\varrho_B} = Y_e(\varrho_B) + Y_{\nu_e}(\varrho_B), \quad (4.2.2)$$

onde Y_e e Y_{ν_e} são as frações parciais de elétrons e de neutrinos eletrônicos, respectivamente. Da conservação da fração leptônica, podemos obter a população de neutrinos em função da densidade bariônica; de fato

$$\varrho_{\nu_e} = Y_{\nu_e} \varrho_B.$$

E, da Eq. (4.2.2), tiramos a relação

$$\varrho_{\nu_e} = (Y_l - Y_e) \varrho_B, \quad (4.2.3)$$

que fornece a dependência da densidade de neutrinos com a densidade bariônica ϱ_B .

A densidade de energia para o gás de neutrinos é dada por

$$\varepsilon_{\nu_e} = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F\nu_e}} \varepsilon_{\nu_e} d^3 k_{\nu_e}, \quad (4.2.4)$$

onde $k_{F_{\nu_e}}$ é o momento de Fermi dos neutrinos, γ ($= 1$) é a degenerescência de spin, $\epsilon_{\nu_e} = k$ a energia ($m_\nu = 0$) e k_{ν_e} o momento. Por integração direta, obtemos

$$\epsilon_\nu = \frac{1}{8\pi^2} k_{F_{\nu_e}}^4. \quad (4.2.5)$$

A pressão do gás de neutrinos é dada por

$$\begin{aligned} P_{\nu_e} &= \frac{\gamma}{(6\pi)^3} \int_0^{k_{F_{\nu_e}}} k_{\nu_e}^2 \frac{d\epsilon_{\nu_e}}{dk_{\nu_e}} d^3 k_{\nu_e} \\ &= \frac{1}{24\pi^2} k_{F_{\nu_e}}^4 = \frac{1}{4} \epsilon_{\nu_e} \varrho_{\nu_e}, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

e

$$\varrho_{\nu_e} = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{F_{\nu_e}}} k_{\nu_e}^2 d^3 k_{\nu_e} = \frac{1}{6\pi^2} k_{F_{\nu_e}}^3. \quad (4.2.7)$$

Combinando-se a equação anterior com a Eq. (4.2.3), podemos escrever o momento de Fermi dos neutrinos em termos de Y_l , Y_e e ϱ_B , obtendo-se a seguinte expressão para a densidade de energia:

$$\epsilon_{\nu_e} = \frac{1}{8\pi^2} [6\pi^2(Y_l - Y_e)\varrho_B]^{4/3}. \quad (4.2.8)$$

Vamos descrever, a partir de agora, a equação de estado obtida por Gudmundsson e Buchler para o regime subnuclear com nêutrons livres e neutrinos eletrônicos.

Consideremos o regime de densidade em que núcleos e nêutrons livres coexistem em equilíbrio *beta* com um gás de elétrons e neutrinos. O problema que se coloca é o de determinar-se a equação de estado para o estado fundamental de tal sistema, fixando-se a densidade bariônica ϱ_B . Com ϱ_B fixo, a densidade leptônica ϱ_l também é fixa, em virtude do confinamento dos neutrinos.

Sejam $\varrho_{(N,Z)}$ a densidade de núcleos com número de nêutrons N e número de prótons Z , ϱ_n a densidade de nêutrons livres, ϱ_e a densidade de elétrons e ϱ_ν a densidade de neutrinos. O estado fundamental pode ser determinado pela extremização da seguinte grandeza:

$$\begin{aligned} \Omega &= \epsilon_{(N,Z)}(N, Z, \varrho_n)\varrho_{(N,Z)} + \epsilon_n(\varrho_n) + \epsilon_e(\varrho_e) + \epsilon_\nu(\varrho_\nu) - \lambda_1 [(N + Z)\varrho_{(N,Z)} + \varrho_n] \\ &\quad - \lambda_2(\varrho_e - Z\varrho_{(N,Z)}) - \lambda_3(\varrho_e + \varrho_\nu), \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

em relação a ϱ_n , N , Z , $\varrho_{(N,Z)}$, ϱ_e e ϱ_ν , onde $\varepsilon_{(N,Z)}$ denota a energia do núcleo e ε_n , ε_e e ε_ν as densidades de energia dos nêutrons livres, dos elétrons e dos neutrinos, respectivamente. Os λ 's cumprem o papel de multiplicadores de Lagrange, e estão relacionados aos potenciais químicos. A minimização de Ω resulta nas equações:

$$\frac{\partial \varepsilon_n(\varrho_n)}{\partial \varrho_n} = \lambda_1 \equiv \mu_n, \quad (4.2.10)$$

onde $\mu_n(\varrho_n)$ é o potencial químico dos nêutrons ^(*),

$$\frac{\partial \varepsilon_{N,Z}(N, Z, \varrho_n)}{\partial N} = \mu_n, \quad (4.2.11)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{N,Z}(N, Z, \varrho_n)}{\partial Z} = \lambda_1 - \lambda_2 = \mu_p, \quad (4.2.12)$$

onde μ_p é o potencial químico dos prótons presentes no interior dos núcleos,

$$\varepsilon_{(N,Z)}(N, Z, \varrho_n) = \mu_n N + \mu_p Z, \quad (4.2.13)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_e(\varrho_e)}{\partial \varrho_e} = \lambda_2 + \lambda_3 \equiv \mu_e, \quad (4.2.14)$$

e

$$\frac{\partial \varepsilon_\nu(\varrho_\nu)}{\partial \varrho_\nu} = \lambda_3 \equiv \mu_\nu, \quad (4.2.15)$$

onde μ_e e μ_ν são os potenciais químicos dos elétrons e dos neutrinos, respectivamente.

Olhando-se as Eqs. (4.2.10) e (4.2.12), concluímos que μ_p , N e Z são completamente especificados por ϱ_n , podendo ser escolhido como o primeiro parâmetro independente. Por outro lado, as Eqs. (4.2.12) e (4.2.13) fornecem a familiar condição de equilíbrio *beta*

$$\mu_n - \mu_p(\mu_n) = \mu_e - \mu_\nu. \quad (4.2.16)$$

Escolhendo-se como segundo parâmetro independente a densidade ϱ_e , tem-se que

$$\mu_e(\varrho_e) = \mu_n - \mu_p(\mu_n) + \mu_\nu(\varrho_\nu). \quad (4.2.17)$$

^(*) A dependência de $\varepsilon_{(N,Z)}$ com ϱ_n não foi levada em conta pelos autores, nem a energia da rede.

A densidade de núcleos pode ser obtida da relação

$$\varrho_{(N,Z)} = \frac{\varrho_e}{Z}, \quad (4.2.18)$$

que exprime a neutralidade de carga da matéria estelar. Por último, temos a densidade bariônica, cuja expressão é dada por

$$\varrho_B = (N + Z)\varrho_{(N,Z)} + \varrho_n. \quad (4.2.19)$$

Pela Eq. (4.2.17) vemos que, se ϱ_n for fixo, um incremento em ϱ_ν , causado pelo confinamento dos neutrinos, leva a um aumento no potencial químico dos elétrons e, portanto, da densidade de elétrons ϱ_e . Conseqüentemente, isto implica em elevar-se tanto a densidade de núcleos $\varrho_{(N,Z)}$, pela Eq. (4.2.18), quanto a densidade de bárions ϱ_B .

Os resultados apresentados acima conduzem a três conclusões importantes: a) O tipo de nuclídeo presente no meio é basicamente determinado pelo potencial químico dos nêutrons, mas é independente da quantidade de neutrinos presentes; b) Os neutrinos confinados obrigam os núcleos a absorverem nêutrons livres, pois a razão $\varrho_{(N,Z)}/\varrho_B$ é crescente com ϱ_ν ; c) O confinamento dos neutrinos **retarda** o aparecimento de uma nova espécie (N, Z) , isto é, para um dado ϱ_B , a espécie nuclear presente é a mesma que existiria a uma densidade menor, mas com menos neutrinos confinados.

Os argumentos apresentados acima permitem extrapolar qualquer equação de estado, válida para o intervalo de densidade discutido aqui, e obtida sem incorporar o confinamento de neutrinos, em que $Y_l = Y_e$, para o caso em que $Y_l > Y_e$, correspondendo ao regime com confinamento de neutrinos. Para o regime sem neutrinos, os autores usaram os cálculos de Baym, Bethe e Pethick, já apresentados no Capítulo 2.

Das equações (4.2.18) e (4.2.19), podemos extrair a relação

$$\varrho_B = \varrho_{B0} + \left(\frac{N + Z}{Z} \right)_0 (\varrho_e - \varrho_{e0}), \quad (4.2.20)$$

onde o subscrito $\mathbf{0}$ serve para caracterizar as grandezas no regime livre de neutrinos, calculadas por Baym *et al.*. É fácil verificar, então, que a pressão é dada por

$$P = P_0 + \frac{1}{4}(\mu_e \varrho_e - \mu_{e0} \varrho_{e0} + \mu_{\nu_e} \varrho_{\nu_e}) , \quad (4.2.21)$$

onde P_0 é a pressão dada pela equação de estado de Baym, Bethe e Pethick, e que os potenciais químicos estão vinculados por

$$\mu_e - \mu_{\nu_e} = \mu_{n0} - \mu_{p0} = \mu_{e0} . \quad (4.2.22)$$

Das Eqs. (4.2.3) e (4.2.20), tem-se que

$$\varrho_{\nu_e} = (Y_l \zeta_0 - 1) \varrho_e + Y_l (\varrho_{B0} - \zeta_0 \varrho_{e0}) , \quad (4.2.23)$$

onde

$$\zeta_0 \equiv \left(\frac{N + Z}{Z} \right)_0 . \quad (4.2.24)$$

A Eq. (4.2.22) pode ser reescrita na forma

$$(k_{F_e}^2 + m_e^2)^{1/2} - k_{F_{\nu_e}} = \mu_{e0} , \quad (4.2.25)$$

onde

$$k_{F_e} = (3\pi^2 \varrho_e)^{1/3} , \quad (4.2.26)$$

é o momento de Fermi dos elétrons e

$$k_{F_{\nu_e}} = [6\pi^2 \varrho_{\nu_e} (\varrho_e)]^{1/3} , \quad (4.2.27)$$

o momento de Fermi dos neutrinos.

As Eqs. (4.2.23) e (4.2.25) fornecem, em conjunto, as densidades de elétrons e de neutrinos.

A equação de estado resultante está representada na Fig. 5.3, onde mostramos a pressão em função da densidade bariônica ϱ_B . À título de comparação, representamos

também, na mesma figura, a equação de estado de Baym, Bethe e Pethick. Observe como a equação de estado resulta ser sensivelmente mais **dura** com o confinamento dos neutrinos, no regime de densidade correspondente.

4.3 Regime Hadrônico

Vimos na seção anterior que o confinamento de neutrinos na fase subnuclear apresenta consequências significativas para a equação de estado. Portanto, vale a pena investigar qual a sua relevância para a fase hadrônica.

Para a matéria estelar, isto é, para a matéria de supernova propriamente dita, o regime hadrônico é alcançado no auge do colapso e durante a reversão do mesmo, quando a onda de choque é gerada. Assim, num lapso de tempo da ordem de milésimos de segundo, é determinada a ocorrência ou não de uma explosão de supernova, o que depende fortemente da equação de estado. Portanto, cabe incorporar-se os neutrinos confinados ao cálculo da equação de estado no regime onde é válida a QHD, e analisar-se suas consequências sobre as propriedades da matéria de supernova. No Capítulo VI, será investigado seus efeitos sobre a dinâmica de supernova e, em particular, como o confinamento de neutrinos afeta a geração da onda de choque. Esta seção constitui uma das contribuições originais do presente trabalho.

Vamos admitir, por simplicidade, que no regime de densidade hadrônico o setor bariônico seja preenchido apenas por nucleons, isto é, por prótons e nêutrons, o mesônico pelos mésons σ , ω e ρ e o leptônico pelos elétrons, múons e mais os respectivos neutrinos (*). Observe que esta composição para a matéria hadrônica é ainda simplificada quando a comparamos com a composição química da matéria presente no interior das estrelas de nêutrons.

(*) Mais adiante, mostraremos que para o estado fundamental deste sistema, isto é, para $T = 0$, a condição de minimização da energia livre de Helmholtz, aliada às reações de interação fraca que se manifestam na matéria estelar, permitem a presença apenas de neutrinos eletrônicos e antineutrinos muônicos no meio.

Esta simplificação na composição química se justifica, se atentarmos para o fato de que, no final do colapso gravitacional, isto é, no momento em que a matéria estelar atinge o ponto de máxima compressão e o caroço faz o *bounce*, a densidade pode assumir valores maiores que a densidade de saturação da matéria nuclear normal ($\rho_0 \approx 0,15 fm^{-3}$), mas não muito maiores. Em outros termos, nosso objetivo básico neste trabalho é prover o cálculo da dinâmica do colapso gravitacional, a ser discutido no próximo capítulo, de uma equação de estado realística e que seja válida para os valores de densidade de interesse para o problema de supernova.

Este ponto mais claro quando se analisar a dinâmica do colapso gravitacional no sexto capítulo, onde poderemos verificar que a matéria estelar, em geral, não chega a atingir as densidades limiares para a produção de partículas estranhas, como a Σ ou a Λ . Neste sentido, a equação de estado que apresentaremos a seguir é bastante realista para o objetivo que nos propomos aqui, que é o de analisar a dinâmica do colapso e discutir a formação de onda de choque via mecanismo de *bounce*.

Para descrever os mésons, introduzimos os seguintes operadores de campo: o campo escalar σ , o campo vetorial ω_μ e o campo vetorial \mathbf{e}_μ . O campo bariônico, por sua vez, será descrito pelo operador de campo Ψ_B ($B = n, p$) e os léptons pelo operador de campo Ψ_l ($l = e^-, \mu^-, \nu_e, \bar{\nu}_\mu$).

A densidade lagrangeana do sistema é

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\Psi}_B \left[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - \frac{1}{2} g_\rho \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}^\mu) - (m_B - g_\sigma \sigma) \right] \Psi_B \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3} b m_B (g_\sigma \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_\sigma \sigma)^4 \\ & - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{4} \mathbf{e}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{e}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\mu \\ & + \sum_l \bar{\Psi}_l (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_l) \Psi_l, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu} & \equiv \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu, \\ \mathbf{e}_{\mu\nu} & \equiv \partial_\mu \mathbf{e}_\nu - \partial_\nu \mathbf{e}_\mu - g_\rho (\mathbf{e}_\mu \times \mathbf{e}_\nu). \end{aligned}$$

Notemos a ausência de um acoplamento explícito entre bárions e léptons na lagrangeana mostrada acima. Contudo, o acoplamento entre estes campos pode ser estabelecido impondo-se para as soluções das equações de movimento o vínculo de equilíbrio *beta*.

As constantes de acoplamento g_σ , g_ω e g_ρ entre os distintos campos mesônicos com o campo bariônico, e as constantes adimensionais b e c , são ajustadas mediante algumas propriedades globais da matéria nuclear saturada, de mesma forma como se fez no capítulo anterior.

As equações de movimento para todos os campos são obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q_i / \partial x_\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0,$$

onde $q_i = \Psi_B, \Psi_l, \sigma, \omega_\mu, \rho^\mu$.

Ao aplicarmos a aproximação de campo médio às equações de movimento, como descrevemos no capítulo anterior, devemos substituir todos os campos mesônicos por seus respectivos valores esperados no estado fundamental. Impondo-se a eles a simetria de rotação e de translação, sobrevive, para o campo ω_μ , apenas o valor médio da componente temporal; da mesma forma, para o campo ρ_μ sobrevive apenas a componente temporal ρ_{03} associada ao méson ρ neutro. As outras componentes possuem valores médios identicamente nulos. Levando-se em conta estas observações, as equações de movimento ficam dadas por

$$m_\sigma^2 \sigma_0 = -g_\sigma b m_B (g_\sigma \sigma_0)^2 - g_\sigma c (g_\sigma \sigma_0)^3 + \frac{g_\sigma}{\pi^2} (m_B - g_\sigma \sigma_0) \times \left\{ \int_0^{k_{F_n}} k_B^2 [k_B^2 + (m_B - g_\sigma \sigma_0)^2]^{-1/2} dk_B + \int_0^{k_{F_p}} k_B^2 [k_B^2 + (m_B - g_\sigma \sigma_0)^2]^{-1/2} dk_B \right\}, \quad (4.3.2)$$

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega (\rho_n + \rho_p), \quad (4.3.3)$$

$$m_\rho^2 \rho_{03} = \frac{1}{2} g_\rho (\rho_p - \rho_n), \quad (4.3.4)$$

para os campos mesônicos condensados, onde k_{F_n} e k_{F_p} representam os momentos de

Fermi dos nêutrons e prótons, respectivamente,

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m_l] \Psi_l = 0, \quad (4.3.5)$$

para os léptons e

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{1}{2} g_\varrho \tau_3 \gamma^0 \varrho_{03} - g_\nu \gamma^0 \omega_0 - (m_B - g_s \sigma_0) \right] \Psi_B = 0, \quad (4.3.6)$$

para os bárions. As densidades ϱ_n e ϱ_p , presentes nas equações acima, estão definidas nas Eqs. (3.4.36–37). Observe que a equação de movimento para os léptons consiste simplesmente na equação de Dirac usual para férmions livres, refletindo o fato de que a lagrangeana (4.3.1) não contém termos de interação entre os campos bariônicos e leptônicos. Consequentemente, os léptons livres contribuirão para a pressão e para a densidade de energia como um gás ideal de Fermi, apenas.

Definindo-se a massa efetiva e a energia dos nucleons, respectivamente, por

$$m_B^* = m_B - g_\sigma \sigma_0,$$

e

$$E_B^* = [k_B^2 + m_B^{*2}]^{1/2},$$

a equação de movimento para m_B^* pode ser obtida de (4.3.2) e escrita como

$$m_B^* = m_B + \lambda_\sigma b m_B (m_B - m_B^*)^2 + \lambda_\sigma c (m_B - m_B^*)^3 - \frac{\lambda_\sigma}{\pi^2} m_B^* \left\{ \int_0^{k_{Fn}} \frac{k_B^2}{E_B^*} dk_B + \int_0^{k_{Fp}} \frac{k_B^2}{E_B^*} dk_B \right\}, \quad (4.3.7)$$

onde

$$\lambda_i \equiv (g_i/m_i)^2, \quad (i = \sigma, \omega, \varrho).$$

De acordo com o que foi prescrito no Capítulo 3, o valor esperado da densidade de energia no estado fundamental ($T = 0$) é dado por

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = & \frac{1}{2\lambda_\sigma}(m_B - m_B^*)^2 + \frac{1}{3}b m_B(m_B - m_B^*)^3 + \frac{1}{4}c(m_B - m_B^*)^4 \\
 & + \frac{\lambda_\omega}{2}(\varrho_n + \varrho_p)^2 + \frac{\lambda_\varrho}{8}(\varrho_p - \varrho_n)^2 + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F_n}} k_B^2 E_B^* dk_B \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F_p}} k_B^2 E_B^* dk_B + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F_e}} k_e^2 E_e dk_e + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_{F_\mu}} k_\mu^2 E_\mu dk_\mu \\
 & + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_{F_{\nu_e}}} k_{\nu_e}^3 dk_{\nu_e} + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{k_{F_{\bar{\nu}_\mu}}} k_{\bar{\nu}_\mu}^3 dk_{\bar{\nu}_\mu}, \tag{4.3.8}
 \end{aligned}$$

e o valor esperado da pressão por

$$\begin{aligned}
 P = & -\frac{1}{3}b m_B(m_B - m_B^*)^3 - \frac{1}{4}c(m_B - m_B^*)^4 - \frac{1}{2\lambda_\sigma}(m_B - m_B^*)^2 \\
 & + \frac{\lambda_\omega}{2}(\varrho_n + \varrho_p)^2 + \frac{\lambda_\varrho}{8}(\varrho_p - \varrho_n)^2 + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_{F_n}} \frac{k_n^4}{E_B^*} dk_n \\
 & + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_{F_p}} \frac{k_p^4}{E_B^*} dk_p + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_{F_e}} \frac{k_e^4}{E_e} dk_e + \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_{F_\mu}} \frac{k_\mu^4}{E_\mu} dk_\mu \\
 & + \frac{1}{6\pi^2} \int_0^{k_{F_{\nu_e}}} k_{\nu_e}^3 dk_{\nu_e} + \frac{1}{6\pi^2} \int_0^{k_{F_{\bar{\nu}_\mu}}} k_{\bar{\nu}_\mu}^3 dk_{\bar{\nu}_\mu}, \tag{4.3.9}
 \end{aligned}$$

onde $E_e = (k_e^2 + m_e^2)^{1/2}$ e $E_\mu = (k_\mu^2 + m_\mu^2)^{1/2}$ representam as energias dos elétrons e múons, respectivamente, e k_{F_i} , ($i = e, \mu, \nu_e, \bar{\nu}_\mu$), os momentos de Fermi dos léptons.

Resolvendo-se explicitamente as integrais do membro direito das Eqs. (4.3.8) e (4.3.9), a densidade de energia e a pressão ficam dadas explicitamente por

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = & \frac{1}{2}\lambda_\sigma(m_B - m_B^*)^2 + \frac{1}{3}b m_B(m_B - m_B^*)^3 + \frac{1}{4}c(m_B - m_B^*)^4 \\
 & + \frac{\lambda_\omega}{2}(\varrho_n + \varrho_p)^2 + \frac{\lambda_\varrho}{8}(\varrho_p - \varrho_n)^2 + \frac{1}{4\pi^2} \left\{ k_{F_n} E_n^{*3} + k_{F_p} E_p^{*3} \right. \\
 & \left. - \frac{m_B^{*2}}{2}(k_{F_n} E_n^* + k_{F_p} E_p^*) - \frac{m_B^{*4}}{2} \ln \left[\frac{(k_{F_n} + E_n^*)(k_{F_p} + E_p^*)}{m_B^{*2}} \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{4\pi^2} \left\{ k_{F_e} E_e^3 - \frac{m_e^2}{2} k_{F_e} E_e - \frac{m_e^4}{2} \ln \left(\frac{k_{F_e} + E_e}{m_e} \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{4\pi^2} \left\{ k_{F_\mu} E_\mu^3 - \frac{m_\mu^2}{2} k_{F_\mu} E_\mu - \frac{m_\mu^4}{2} \ln \left(\frac{k_{F_\mu} + E_\mu}{m_\mu} \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{8\pi^2} (k_{F_{\nu_e}}^4 + k_{F_{\bar{\nu}_\mu}}^4), \tag{4.3.10}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 P = & -\frac{1}{2}\lambda_\sigma(m_B - m_B^*)^2 - \frac{1}{3}b m_B(m_B - m_B^*)^3 - \frac{1}{4}c(m_B - m_B^*)^4 \\
 & + \frac{\lambda_\omega}{2}(\varrho_n + \varrho_p)^2 + \frac{\lambda_\varrho}{8}(\varrho_p - \varrho_n)^2 + \frac{1}{12\pi^2} \left\{ k_{F_n}^3 E_n^* + k_{F_p}^3 E_p^* \right. \\
 & \left. - \frac{3}{4}m_B^{*2}(k_{F_n} E_n^* + k_{F_p} E_p^*) + \frac{3}{4}m_B^{*4} \ln \left[\frac{(k_{F_n} + E_n^*)(k_{F_p} + E_p^*)}{m_B^{*2}} \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{12\pi^2} \left\{ k_{F_e}^3 E_e - \frac{3}{4}m_e^2 k_{F_e} E_e + \frac{3}{4}m_e^4 \ln \left(\frac{k_{F_e} + E_e}{m_e} \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{12\pi^2} \left\{ k_{F_\mu}^3 E_\mu - \frac{3}{4}m_\mu^2 k_{F_\mu} E_\mu + \frac{3}{4}m_\mu^4 \ln \left(\frac{k_{F_\mu} + E_\mu}{m_\mu} \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{24\pi^2} (k_{F_{\nu_e}}^4 + k_{F_{\bar{\nu}_\mu}}^4) . \tag{4.3.11}
 \end{aligned}$$

Mediante (4.3.7), obtemos para a massa efetiva

$$\begin{aligned}
 m_B^* = & m_B + \lambda_\sigma b m_B(m_B - m_B^*)^2 + \lambda_\sigma c(m_B - m_B^*)^3 \\
 & - \frac{\lambda_\sigma}{2\pi^2} m_B^* \left\{ k_{F_n} E_n^* + k_{F_p} E_p^* - m_B^{*2} \ln \left[\frac{(k_{F_n} + E_n^*)(k_{F_p} + E_p^*)}{m_B^{*2}} \right] \right\} . \tag{4.3.12}
 \end{aligned}$$

As Eqs. (4.3.10)–(4.3.12) especificam completamente a equação de estado do sistema. No entanto, tais equações só ganham sentido se os momentos de Fermi de todas as partículas do sistema forem univocamente determinados como funções, por exemplo, da densidade bariônica.

Sendo assim, devemos investigar de que forma o acoplamento entre léptons e bárions pode ser consistentemente incorporado à solução das equações de movimento. Podemos começar fazendo uma listagem dos principais processos de interação fraca que podem ocorrer na matéria estelar: a captura eletrônica



a absorção de neutrinos eletrônicos por nêutrons



e o decaimento *beta*

$$n \longrightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e . \quad (4.3.15)$$

Contudo, na matéria estelar, os processos (4.3.13) e (4.3.14) ocorrem em equilíbrio químico, podendo ser sintetizadas por uma única equação de equilíbrio

$$p + e^{-} \longleftrightarrow n + \nu_e . \quad (4.3.16)$$

Quando a densidade bariônica atinge um certo valor limiar, tal que o potencial químico dos elétrons torna-se maior que a massa de repouso do múon, isto é,

$$\mu_e \geq m_\mu = 105 \text{ MeV} , \quad (4.3.17)$$

abre-se o seguinte canal de decaimento para os elétrons:

$$e^{-} \longleftrightarrow \mu^{-} + \nu_e + \bar{\nu}_\mu . \quad (4.3.18)$$

Também os múons podem, a princípio, decair

$$\mu^{-} \longleftrightarrow e^{-} + \bar{\nu}_e + \nu_\mu . \quad (4.3.19)$$

Temos que considerar ainda o decaimento dos nêutrons em múons, via

$$n \longleftrightarrow p + \mu^{-} + \bar{\nu}_\mu . \quad (4.3.20)$$

Os processos de interação fraca descritos acima estão submetidos aos seguintes vínculos: a conservação do número leptônico, que se traduz pelas equações

$$Y_{l_e} = \frac{\varrho_e + \varrho_{\nu_e} - \varrho_{\bar{\nu}_e}}{\varrho_B} = Y_l = \text{const.} , \quad (4.3.21)$$

e

$$Y_{l_\mu} = \frac{\varrho_\mu + \varrho_{\nu_\mu} - \varrho_{\bar{\nu}_\mu}}{\varrho_B} = 0 , \quad (4.3.22)$$

a conservação do número bariônico, dada pela equação

$$\varrho_B = \varrho_n + \varrho_p , \quad (4.3.23)$$

e a condição de neutralidade de carga da matéria estelar,

$$\varrho_p = \varrho_e + \varrho_\mu . \quad (4.3.24)$$

Atribuindo-se um valor fixo a ϱ_B , teremos, no total, oito variáveis e quatro equações de vínculo: ϱ_n , ϱ_p , ϱ_e , ϱ_μ , ϱ_{ν_e} , $\varrho_{\bar{\nu}_e}$, ϱ_{ν_μ} e $\varrho_{\bar{\nu}_\mu}$, das quais quatro são independentes, podendo ser escolhidas, por exemplo, ϱ_p , ϱ_μ , ϱ_{ν_e} , $\varrho_{\bar{\nu}_\mu}$.

A energia livre de Helmholtz por unidade de volume é dada por

$$f = \sum_i \mu_i \varrho_i - P , \quad (4.3.25)$$

onde μ_i é o potencial químico da i -ésima espécie. A minimização de f resulta em

$$\begin{aligned} \delta f &= \mu_n \delta \varrho_n + \mu_p \delta \varrho_p + \mu_e \delta \varrho_e + \mu_\mu \delta \varrho_\mu + \mu_{\nu_e} \delta \varrho_{\nu_e} \\ &\quad + \mu_{\bar{\nu}_e} \delta \varrho_{\bar{\nu}_e} + \mu_{\nu_\mu} \delta \varrho_{\nu_\mu} + \mu_{\bar{\nu}_\mu} \delta \varrho_{\bar{\nu}_\mu} \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

As Eqs. (4.3.21)–(4.3.24) podem ser expressas numa forma mais conveniente:

$$\delta \varrho_e + \delta \varrho_{\nu_e} - \delta \varrho_{\bar{\nu}_e} = 0 , \quad (4.3.27)$$

$$\delta \varrho_\mu + \delta \varrho_{\nu_\mu} - \delta \varrho_{\bar{\nu}_\mu} = 0 , \quad (4.3.28)$$

$$\delta \varrho_n = -\delta \varrho_p , \quad (4.3.29)$$

$$\delta \varrho_e + \delta \varrho_\mu = \delta \varrho_p . \quad (4.3.30)$$

Substituindo-as na Eq. (4.3.26) e arrumando-se adequadamente os termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned} &(\mu_p + \mu_e - \mu_n - \mu_{\nu_e}) \delta \varrho_p + (\mu_{\nu_e} + \mu_{\bar{\nu}_e}) \delta \varrho_{\bar{\nu}_e} + \\ &(\mu_\mu + \mu_{\nu_e} - \mu_e - \mu_{\nu_\mu}) \delta \varrho_\mu + (\mu_{\nu_\mu} + \mu_{\bar{\nu}_\mu}) \delta \varrho_{\bar{\nu}_\mu} = 0 , \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

que fornece as seguintes equações de equilíbrio químico:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_n + \mu_{\nu_e} , \quad (4.3.32)$$

$$\mu_\mu + \mu_{\nu_e} = \mu_e + \mu_{\nu_\mu} , \quad (4.3.33)$$

$$\mu_{\nu_e} = -\mu_{\bar{\nu}_e} , \quad (4.3.34)$$

$$\mu_{\nu_\mu} = -\mu_{\bar{\nu}_\mu} . \quad (4.3.35)$$

A função de distribuição dos neutrinos eletrônicos é dada por

$$n_{\nu_e} = \{ \exp [(\epsilon_{\nu_e} - \mu_{\nu_e})/kT] + 1 \}^{-1} , \quad (4.3.36)$$

enquanto que a função de distribuição para os antineutrinos eletrônicos é

$$n_{\bar{\nu}_e} = \{ \exp [(\epsilon_{\bar{\nu}_e} + \mu_{\nu_e})/kT] + 1 \}^{-1} , \quad (4.3.37)$$

onde usamos a Eq. (4.3.34). Observe que, dadas as características do sistema que estamos estudando, no qual, por suposto, já existem neutrinos eletrônicos, temos que $\mu_{\nu_e} > 0$. Fazendo-se agora o limite $\mu_{\nu_e}/kT \rightarrow \infty$ nas duas equações anteriores, verificamos, usando-se a Eq. (2.2.2), que a densidade de antineutrinos eletrônicos é nula. A interpretação física deste resultado é que, se o sistema encontra-se estritamente à temperatura zero, o processo de decaimento mostrado na Eq. (4.3.15) – o decaimento do nêutron – fica bloqueado, em consequência do Princípio de Exclusão de Pauli. Contudo, à medida que a temperatura aumenta, os níveis de energia para os antineutrinos eletrônicos passam a ser gradativamente ocupados.

Analisemos o caso dos neutrinos muônicos. Eles obedecem às mesmas distribuições anteriores, isto é,

$$n_{\nu_\mu} = \{ \exp [(\epsilon_{\nu_\mu} + \mu_{\bar{\nu}_\mu})/kT] + 1 \}^{-1} , \quad (4.3.38)$$

e

$$n_{\bar{\nu}_\mu} = \{ \exp [(\epsilon_{\bar{\nu}_\mu} - \mu_{\bar{\nu}_\mu})/kT] + 1 \}^{-1} , \quad (4.3.39)$$

onde usamos a Eq. (4.3.35).

Agora, entretanto, se dá o oposto: a grandeza positiva, neste caso, é $\mu_{\bar{\nu}_\mu}$ pois a reação (4.3.18) acontece antes que (4.3.19), já que $m_e < m_\mu$, de forma que, no limite $\mu_{\bar{\nu}_\mu}/kT \rightarrow \infty$, obtemos $n_{\nu_\mu} \rightarrow 0$. Portanto, para $T = 0$, o processo que fica inibido é o decaimento do múon, dado pela Eq. (4.3.19).

Por definição, o potencial químico da i -ésima espécie é

$$\mu_i \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_i}, \quad (4.3.40a)$$

onde $i = n, p, e, \mu, \nu_e, \bar{\nu}_\mu$. Mas, se $T = 0$, $\rho_i = \gamma k_{F_i}^3 / 6\pi^2$; logo,

$$\mu_i = \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_{F_i}} \frac{\partial k_{F_i}}{\partial \rho_i} = \frac{2\pi^2}{\gamma k_{F_i}^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_{F_i}}. \quad (4.3.40b)$$

Os potenciais químicos dos elétrons e múons são dados simplesmente por

$$\mu_e = \frac{\pi^2}{k_{F_e}^2} \frac{1}{\pi^2} k_{F_e}^2 E_e = (k_{F_e}^2 + m_e^2)^{1/2}, \quad (4.3.41)$$

$$\mu_\mu = \frac{\pi^2}{k_{F_\mu}^2} \frac{1}{\pi^2} k_{F_\mu}^2 E_\mu = (k_{F_\mu}^2 + m_\mu^2)^{1/2}, \quad (4.3.42)$$

que são as correspondentes energias de Fermi dessas partículas. Para os neutrinos, $\mu_{\nu_e} = k_{F_{\nu_e}}$ e $\mu_{\bar{\nu}_\mu} = k_{F_{\bar{\nu}_\mu}}$.

Para se determinar os potenciais químicos dos nêutrons e prótons, devemos ter em mente que ε é função da massa efetiva m_B^* , a qual, por seu turno, é uma função dos momentos de Fermi k_{F_n} e k_{F_p} . Assim, o potencial químico dos nêutrons é dado por

$$\begin{aligned} \mu_n = \frac{\pi^2}{k_{F_n}^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial k_{F_n}} = \frac{\pi^2}{k_{F_n}^2} \left\{ -\frac{1}{\lambda_\sigma} (m_B - m_B^*) m_B^{*'} - b m_B (m_B - m_B^*)^2 m_B^{*'} \right. \\ \left. - c (m_B - m_B^*)^3 m_B^{*'} + \frac{k_{F_n}^2}{\pi^2} \left[\lambda_\omega (\rho_n + \rho_p) - \frac{1}{4} \lambda_\omega (\rho_p - \rho_n) \right] + \frac{1}{\pi^2} k_{F_n}^2 E_n^* \right. \\ \left. + \frac{m_B^*}{\pi^2} \int_0^{k_{F_n}} \frac{k_B^2}{E_B^*} m_B^{*'} dk_B + \frac{m_B^*}{\pi^2} \int_0^{k_{F_p}} \frac{k_B^2}{E_B^*} m_B^{*'} dk_B \right\}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mu_n = & \lambda_\omega(\varrho_n + \varrho_p) - \frac{\lambda_\varrho}{4}(\varrho_p - \varrho_n) + \frac{\pi^2}{k_{F_n}^2} \left\{ \frac{1}{\pi^2} k_{F_n}^2 E_n^* \right. \\ & + \frac{m_B^{* \prime}}{\lambda_\sigma} \left[-\lambda_\sigma(m_B - m_B^*) - \lambda_\sigma b m_B (m_B - m_B^*)^2 - \lambda_\sigma c (m_B - m_B^*)^3 \right. \\ & \left. \left. + \frac{\lambda_\sigma}{\pi^2} m_B^* \left(\int_0^{k_{F_n}} \frac{k_B^2}{E_B^*} dk_B + \int_0^{k_{F_p}} \frac{k_B^2}{E_B^*} dk_B \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

onde

$$m_B^{* \prime} \equiv \frac{\partial m_B^*}{\partial k_{F_n}}.$$

Notemos, contudo, que o termo entre as chaves presente na última equação é identicamente nulo, em virtude da Eq. (4.3.7). Logo,

$$\mu_n = \left(\lambda_\omega - \frac{\lambda_\varrho}{4} \right) \varrho_p + \left(\lambda_\omega + \frac{\lambda_\varrho}{4} \right) \varrho_n + (k_{F_n}^2 + m_B^{*2})^{1/2}. \quad (4.3.43)$$

Fazendo-se um cálculo semelhante, obtemos a seguinte expressão para o potencial químico dos prótons:

$$\mu_p = \left(\lambda_\omega + \frac{\lambda_\varrho}{4} \right) \varrho_p + \left(\lambda_\omega - \frac{\lambda_\varrho}{4} \right) \varrho_n + (k_{F_p}^2 + m_B^{*2})^{1/2}. \quad (4.3.44)$$

Subtraindo-se (4.3.43) de (4.3.44), obtemos

$$\mu_n - \mu_p = \frac{1}{2} \lambda_\varrho (\varrho_n - \varrho_p) + (k_{F_n}^2 + m_B^{*2})^{1/2} - (k_{F_p}^2 + m_B^{*2})^{1/2},$$

As equações de balanço (4.3.32) e (4.3.33), que governam o equilíbrio químico do sistema, podem ser reescritas na forma

$$\frac{1}{2} \lambda_\varrho (\varrho_n - \varrho_p) + (k_{F_n}^2 + m_B^{*2})^{1/2} - (k_{F_p}^2 + m_B^{*2})^{1/2} - (k_{F_e}^2 + m_e^2)^{1/2} - k_{F_{\nu_e}} = 0, \quad (4.3.45)$$

e

$$(k_{F_\mu}^2 + m_\mu^2)^{1/2} - (k_{F_e}^2 + m_e^2)^{1/2} + k_{F_{\nu_e}} + k_{F_{\nu_\mu}} = 0, \quad (4.3.46)$$

As duas equações anteriores devem ser simultaneamente resolvidas pelo método de autoconsistência, fixando-se a densidade bariônica ϱ_B e a fração leptônica total Y_l , o que possibilita obter-se a composição química do sistema. Observe, contudo, que as duas equações acima envolvem seis variáveis, das quais duas são independentes: por exemplo, ϱ_e e ϱ_μ . As demais variáveis estão relacionadas pelos vínculos

$$\varrho_e + \varrho_{\nu_e} = Y_l \varrho_B ,$$

que sai da Eq. (4.3.21), e

$$\varrho_\mu = \varrho_{\bar{\nu}_\mu} ,$$

que sai da Eq. (4.3.22) e os vínculos dados por (4.3.23) e (4.3.24).

Suponhamos agora que os neutrinos produzidos nos processos descritos pelas Eqs. (4.3.15-16) e (4.3.18-20) possam escapar livremente do sistema, isto é, o caso limite em que não existe o confinamento de neutrinos. Neste contexto, segundo as Eqs. (4.3.21–24), as equações de equilíbrio químico passam a ser

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e , \tag{4.3.47}$$

$$\mu_e = \mu_\mu , \quad (\text{se } \mu_e \geq m_\mu) , \tag{4.3.48}$$

com as quais obtemos a seguinte equação de equilíbrio:

$$\frac{1}{2} \lambda_\varrho (\varrho_n - \varrho_p) + (k_n^2 + m_B^{*2})^{1/2} - (k_p^2 + m_B^{*2})^{1/2} - (k_e^2 + m_e^2)^{1/2} = 0 . \tag{4.3.49}$$

A Eq. (4.3.48) fornece uma relação entre ϱ_e e ϱ_μ , dada por

$$\varrho_\mu = \left[\left(\frac{1}{3\pi^2} \right)^{2/3} (m_e^2 - m_\mu^2) + \varrho_e^{2/3} \right]^{3/2} . \tag{4.3.50}$$

As demais variáveis presentes na Eq. (4.3.49) estão relacionadas pelos vínculos de conservação do número bariônico e conservação da carga. Assim, temos a liberdade de expressar, também, ϱ_p em função apenas de ϱ_e , e ϱ_n em função de ϱ_B e ϱ_e , e resolver-se

a Eq. (4.3.49) pelo método da autoconsistência para o parâmetro independente ρ_e . Com isso, podemos obter a população de nêutrons, prótons, elétrons e múons do sistema, a uma dada densidade ρ_B fixa.

Conhecidas as populações relativas das espécies presentes para cada valor de ρ_B , a pressão e a densidade de energia são obtidas pelas Eqs. (4.3.11) e (4.3.10), fazendo-se simplesmente $k_{F_{\nu_e}} = k_{F_{\bar{\nu}_\mu}} = 0$. Com este procedimento, definimos completamente a equação de estado para o sistema sem neutrinos.

4.4 Resultados e Conclusões

Usando-se o conjunto de valores para as constantes de acoplamento e outros parâmetros, retirados da Ref. [11], para a solução das equações de movimento, que estão listados na Tab. VI, obtemos os seguintes resultados, que passamos a discutir.

A Fig. 4.1, mostra as populações relativas de partículas obtidas para o caso limite em que os neutrinos não estão confinados no sistema. Observe que, quando o potencial químico dos elétrons atinge o valor igual a massa de repouso do múon, os múons começam a ser produzidos. O limiar de densidade para a produção de múons, neste caso, corresponde a um valor menor que a densidade de saturação da matéria nuclear normal. Já na Fig. 4.2, mostramos os mesmos tipos de curvas para o caso em que os neutrinos estão confinados no sistema, com fração leptônica igual a 0,315. Observe que a densidade limiar para a produção de múons é sensivelmente maior ($\rho \approx 2\rho_0$) que no caso anterior, isto é, o confinamento dos neutrinos tem o efeito de retardar a produção de múons. Isto se deve ao fato de que o acesso ao espaço de fase para os neutrinos eletrônicos produzidos pela reação (4.3.18), fica fortemente bloqueado pelo princípio de exclusão de Pauli, restringindo, assim, a produção de múons. Como consequência, uma quantidade maior de nêutrons deve decair, no sentido de preservar o valor constante da fração leptônica Y_l , e tornando a matéria mais rica em prótons do que no caso anterior. Por outro lado, os resultados mostram que o isospin total do sistema é maior no

primeiro caso do que no segundo, em que os neutrinos estão confinados, o que, eventualmente, pode afetar o valor da densidade limiar para a produção de partículas estranhas carregadas, como, por exemplo, a Σ^- .

O campo escalar σ é muito pouco sensível ao valor da fração leptônica, como podemos ver na Fig. 4.3, que mostra o comportamento da massa efetiva dos bárions, m_B^* , em função da densidade bariônica, para três valores de Y_l fixos. Da mesma forma, o campo vetorial ω , por ser proporcional à densidade bariônica total, não é afetado pelo confinamento dos neutrinos. Em resumo, o setor mesônico isoescalar é muito pouco sensível à fração leptônica eletrônica do sistema.

Tabela VI

K	m_B^*/m_B	$(g_\sigma/m_\sigma)^2$	$(g_\omega/m_\omega)^2$	$(g_\rho/m_\rho)^2$	b	c
300	0,78	9,148	4,820	4,791	0,003478	0,01328

— As constantes de acoplamento usadas neste trabalho. K é a incompressibilidade, em MeV, e m_B^* a massa efetiva para $\rho = \rho_0 = 0,153 \text{ fm}^{-3}$. A energia de ligação por núcleon é $-16,3 \text{ MeV}$ e $a_4 = 32,5 \text{ MeV}$. Os coeficientes $(g_i/m_i)^2$ estão em unidades de fm^2 e as constantes b e c são adimensionais. Adaptado da Ref. [11].

O estudo do comportamento da velocidade do som na matéria estelar comprimida, é de importância fundamental na formação e propagação de ondas de choque durante a explosão de uma supernova. Neste sentido, mostramos na Fig. 4.4 a influência do confinamento dos neutrinos sobre a velocidade do som do meio, definida por

$$v_s = \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right)_S^{1/2} .$$

Outro parâmetro importante é o índice adiabático Γ , definido na Eq. (1.4.2), e cujo comportamento em função da densidade, e para diferentes valores da fração leptônica eletrônica, está representado na Fig. 4.5. Observe que na região de interesse para o problema das supernovas, isto é, na estreita faixa de densidade em torno da densidade

de saturação ρ_0 , o confinamento dos neutrinos exerce uma influência dramática sobre o índice adiabático.

O mesmo acontece com a equação de estado. O confinamento dos neutrinos torna a equação de estado mais **dura** na região de baixas densidades, como podemos ver na Fig. 4.6. Entretanto, este efeito é revertido para altas densidades, onde a equação de estado, com o confinamento, é nitidamente mais **mole**.

Na Fig. 4.7 mostramos como a incorporação dos neutrinos ao sistema afeta o valor da incompressibilidade K , definida pela Eq. (3.2.49), calculado para a densidade de saturação da matéria nuclear saturada. A curva cheia mostra o comportamento de K para vários valores crescentes da fração leptônica eletrônica Y_l comparado com o valor de K para o caso em que os neutrinos estão ausentes (linha tracejada). Podemos constatar que, no regime de confinamento, a incompressibilidade é uma função decrescente da fração leptônica eletrônica. O ponto marcado sobre a curva cheia corresponde ao valor realístico da fração leptônica eletrônica $Y_l = 0,315$, com o qual se obtém $K \approx 195$ MeV, significativamente menor do que no caso em que os neutrinos estão ausentes, para o qual $K = 219$ MeV.

Este resultado nos remete a uma conclusão importante, pois, como vimos na Introdução, a explosão de uma supernova via o mecanismo de explosão direta requer, como salienta Brown [12], um valor da incompressibilidade da matéria estelar para a densidade de saturação da matéria nuclear sensivelmente menor do que o valor dessa mesma grandeza medida para a matéria nuclear normal, que se diferencia da matéria estelar pelo fato de não conter léptons.

4.5 Conclusões

Investigamos neste trabalho as consequências do confinamento de neutrinos sobre as propriedades da matéria nuclear no contexto de uma teoria quântica relativística, a QHD. Os neutrinos foram incorporados e tratados de um modo completamente consis-

tente, sendo o acoplamento entre os campos leptônicos e bariônicos introduzido através do vínculo de equilíbrio *beta* imposto sobre o sistema de partículas. Mostramos que a composição química do sistema depende dramaticamente da fração leptônica eletrônica Y_l , enquanto que os campos mesônicos isoescalares são relativamente insensíveis a esta grandeza. No regime de baixas densidades, comparada com a densidade de saturação da matéria nuclear, que é a região relevante para a física de supernovas, mostramos que a equação de estado torna-se mais **dura** quando neutrinos são incluídos. Entretanto, para altas densidades este efeito é revertido.

Verificamos que a incompressibilidade da matéria nuclear é menor quando os neutrinos estão confinados do que quando estes estão ausentes. Assim, as tentativas de parametrização da equação de estado da matéria de supernova, através dos resultados coletados em reações de íons pesados, merecem ser questionadas, uma vez que este trabalho estabelece que o confinamento de neutrinos afeta dramaticamente o valor da incompressibilidade. Portanto, este parece ser mais um aspecto importante em que os neutrinos cumprem um papel relevante no cenário da física de supernovas, o que diz respeito à incompressibilidade.

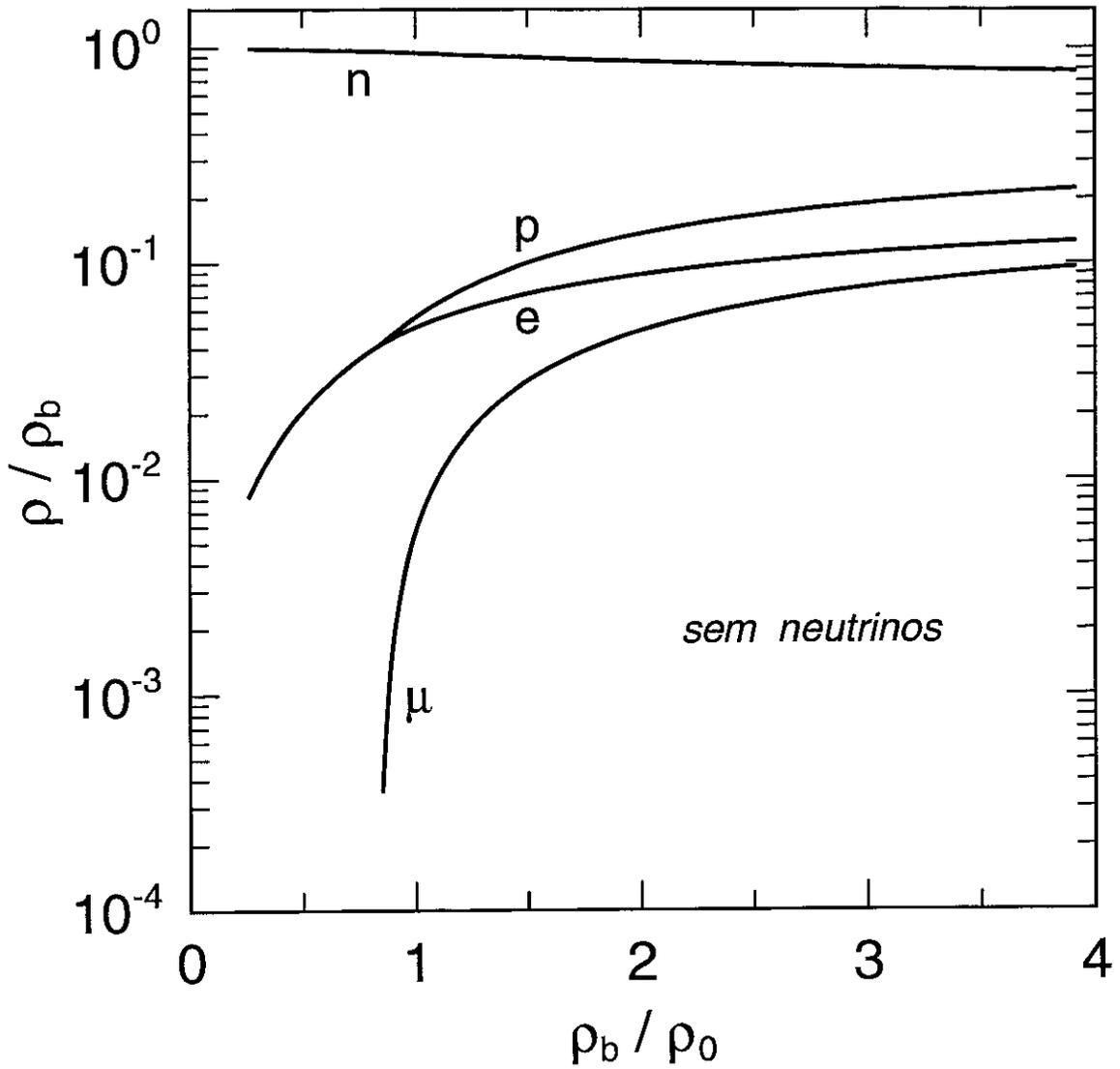


Fig. 4.1 – População relativa de partículas em função da densidade bariônica ρ_B , em unidades da densidade da matéria nuclear normal $\rho_0 = 0,15$ bárions/ fm^3 , para o caso em que não há neutrinos no sistema.

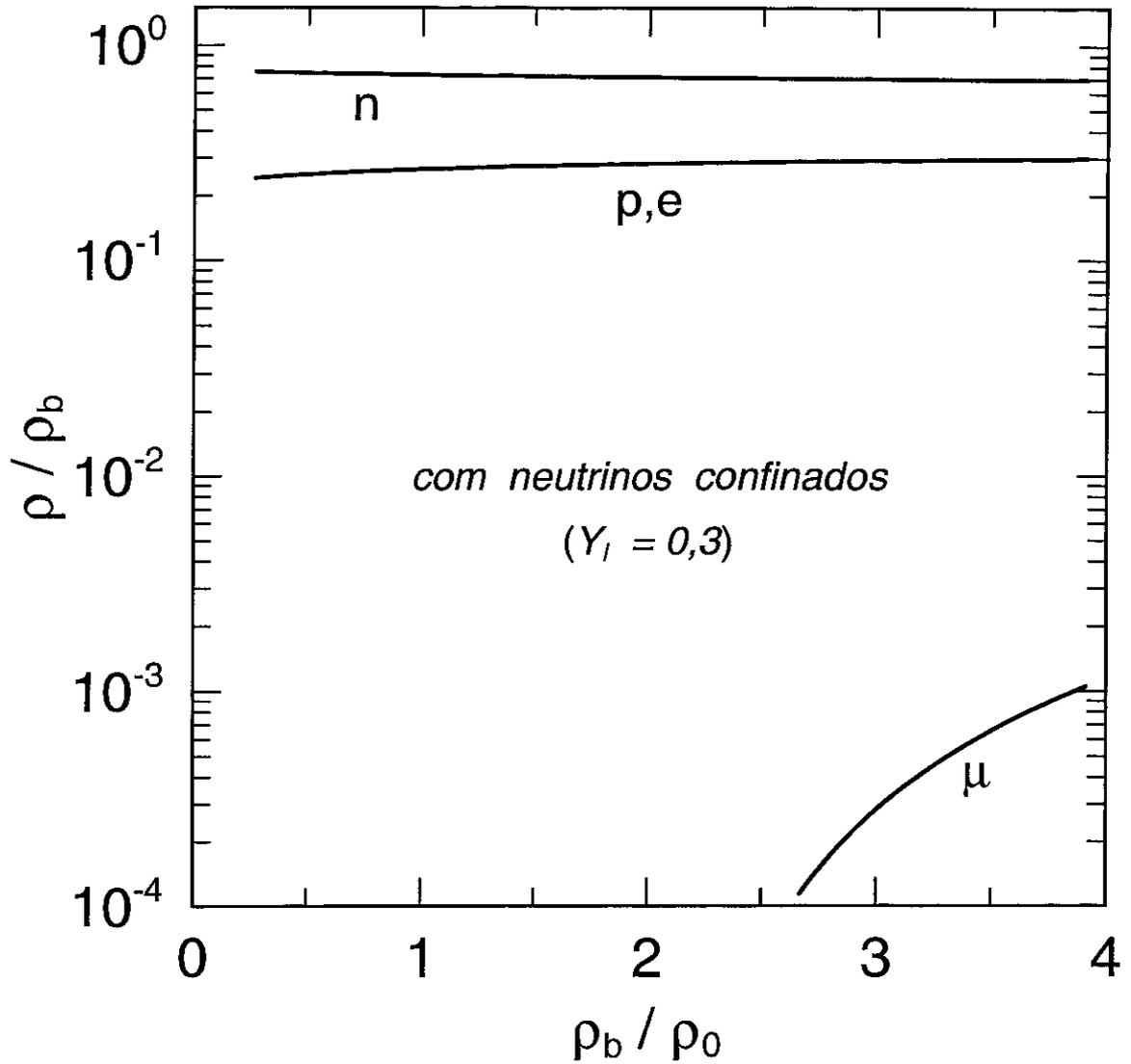


Fig. 4.2 – População relativa de partículas em função da densidade bariônica ρ_B em unidades de ρ_0 , para o caso em que os neutrinos estão confinados com fração leptônica típica em colapso de supernova $Y_l = 0,315$.

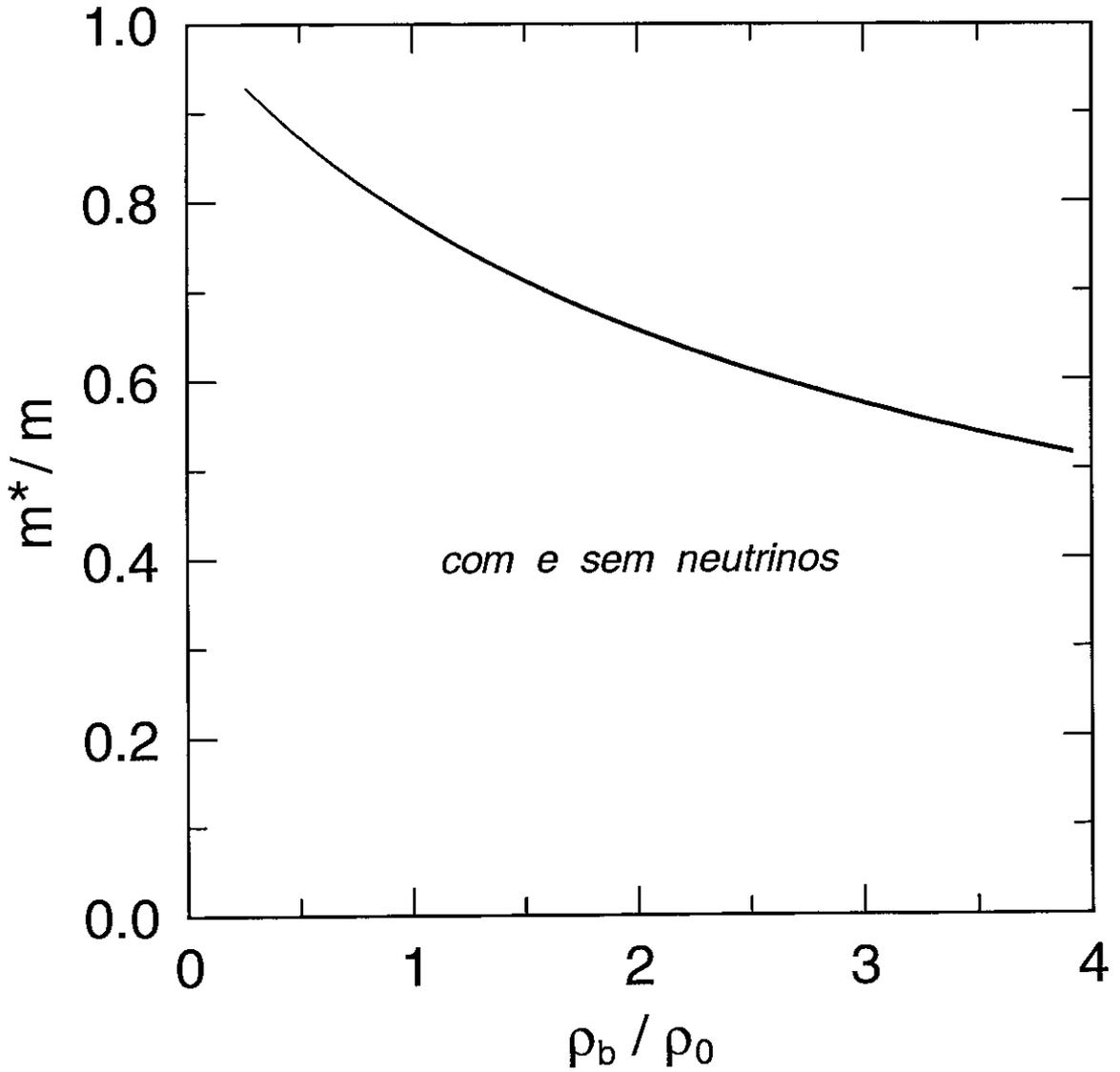


Fig. 4.3 – Massa efetiva dos bárions, em unidades da massa de repouso livre, em função da densidade bariônica em unidades de ρ_0 . Observe que existem três curvas na figura, correspondendo a $Y_l = 0, 2$ e $0, 3$, para os neutrinos confinados, e o caso oposto.

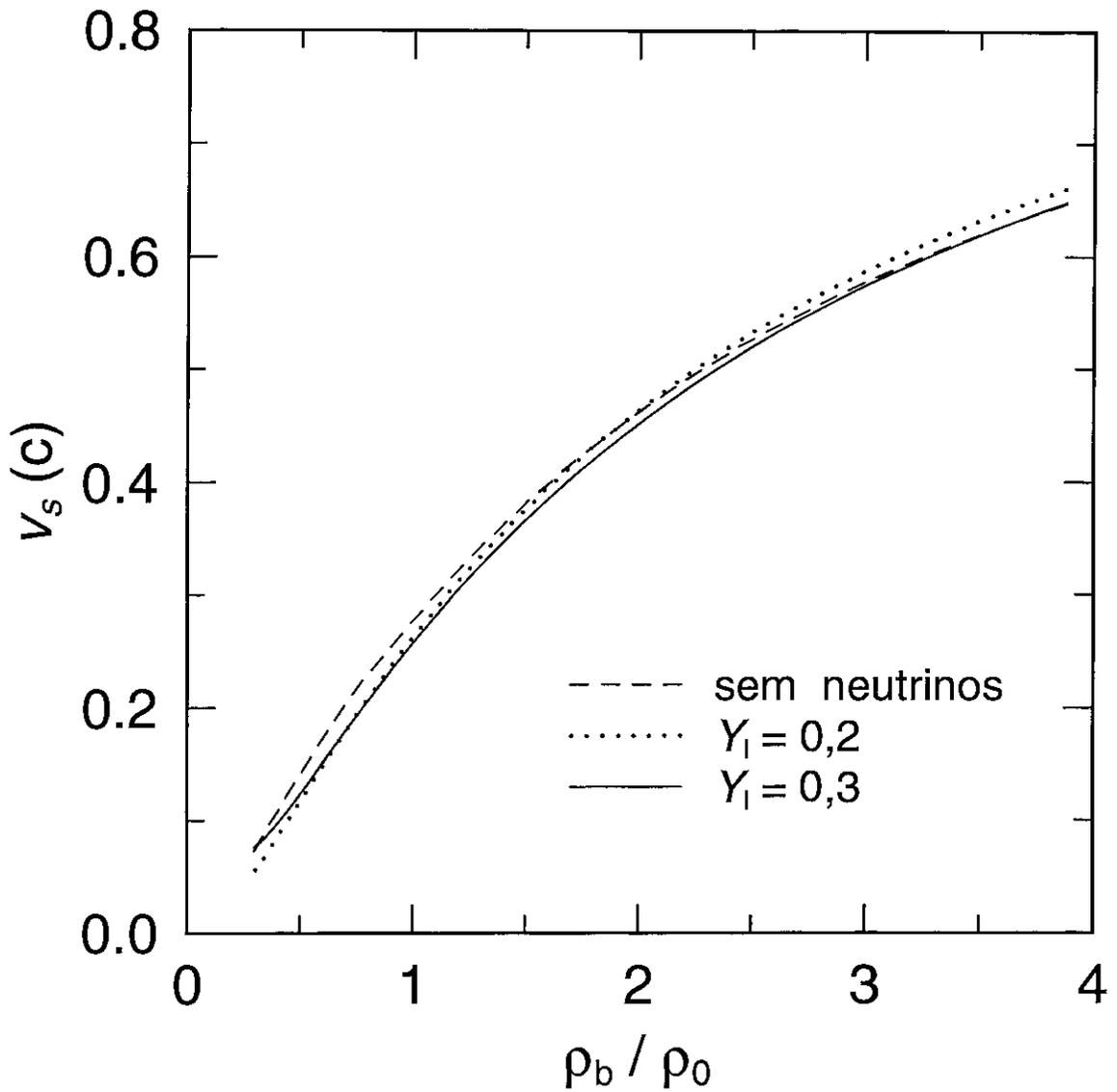


Fig. 4.4 – Velocidade do som em unidades da velocidade da luz c em função da densidade bariônica, em unidades de ρ_0 , para os mesmos valores da fração eletrônica da Fig. 4.4.

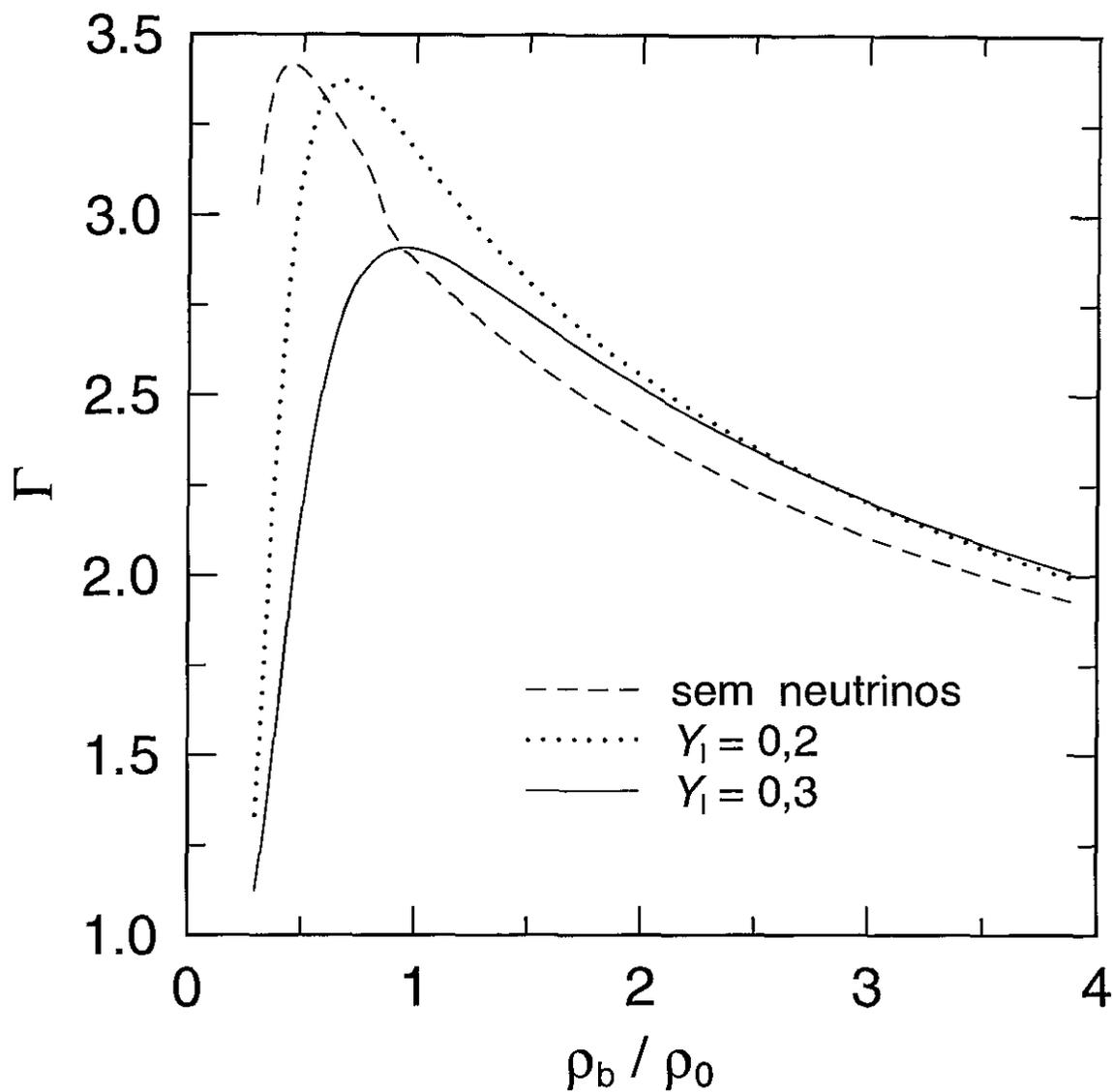


Fig. 4.5 – Índice adiabático em função da densidade bariônica, em unidades de ρ_0 .

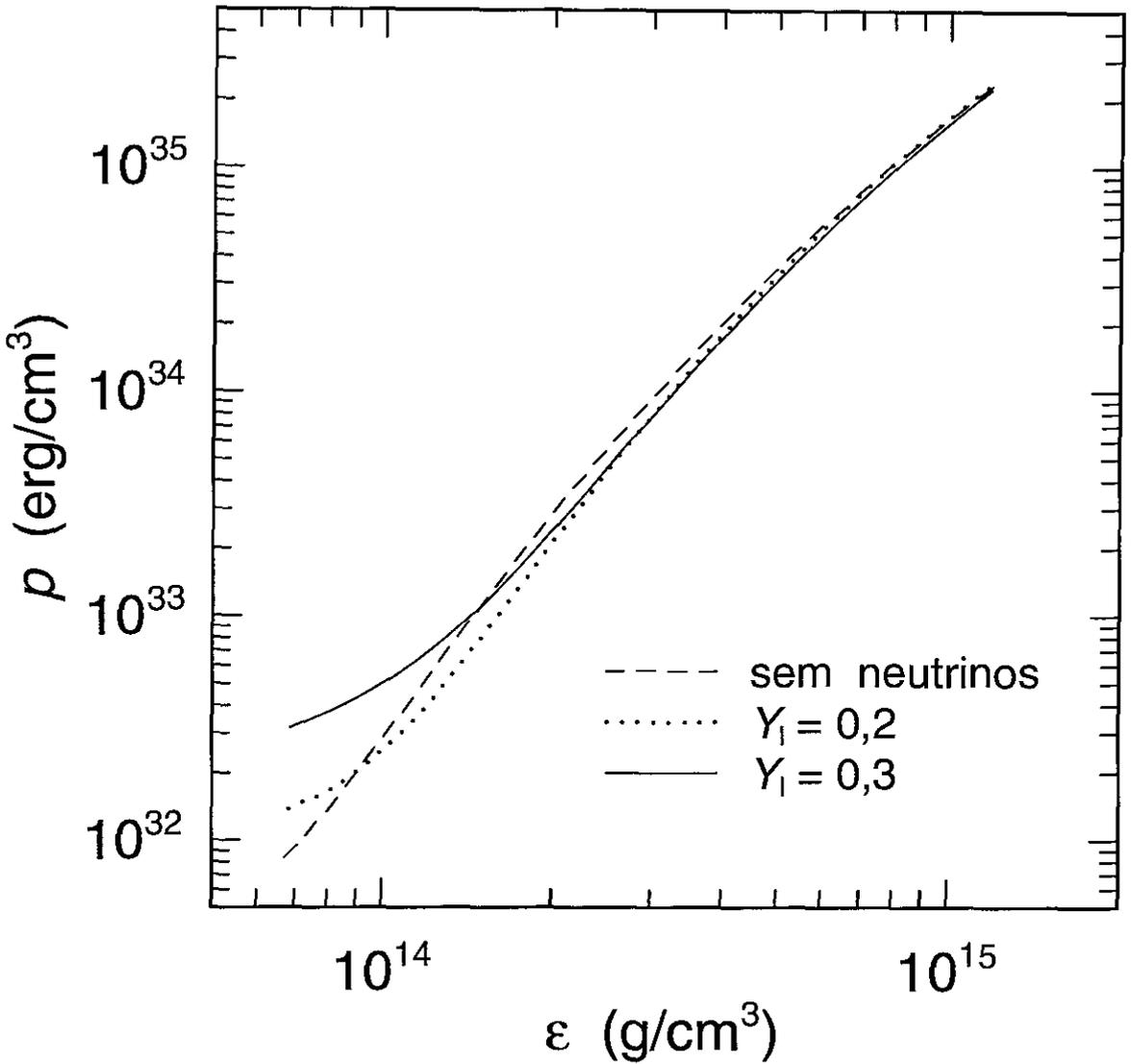


Fig. 4.6 – Equação de estado para alguns valores de Y_1 comparada com o caso em os neutrinos estão ausentes no sistema.

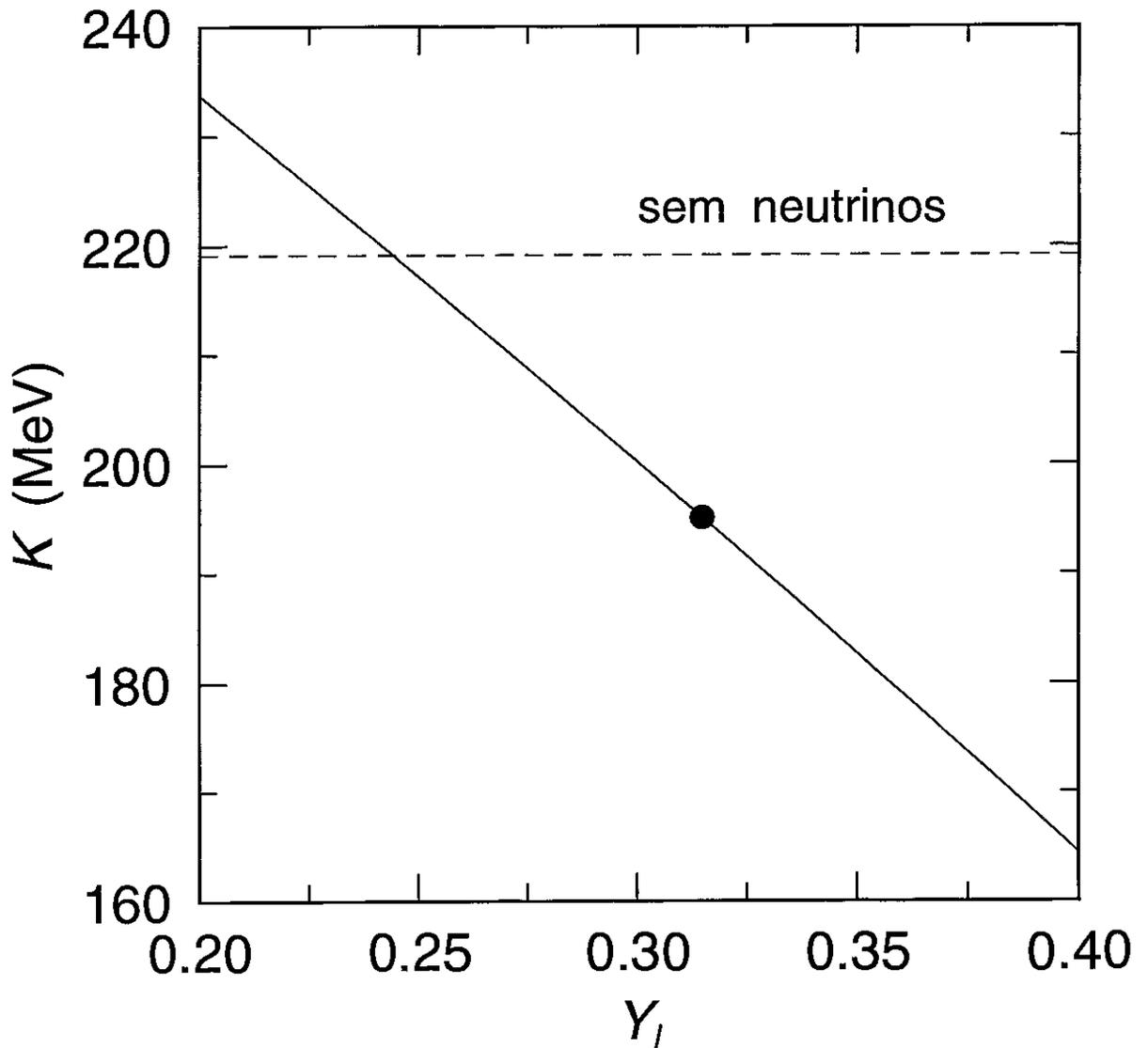


Fig. 4.7 – Incompressibilidade K em $\varrho_B = \varrho_0$, em função de Y_l . A curva tracejada corresponde ao caso em que os neutrinos estão ausentes. O ponto sobre a curva cheia indica o valor de K para o valor típico $Y_l = 0,315$.

Referências

- [1] Colgate, S.A. e White, R.H., *Astrophys. J.*, **143** (1966), 626.
- [2] Freedman, D.Z., *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 1389.
- [3] Sato, K., *Progr. Theor. Phys.*, **53** (1975), 595.
- [4] Sato, K., *Progr. Theor. Phys.*, **54** (1975), 1325.
- [5] Mazurek, T.J., *Astrophys. J.*, **221** (1976), L87.
- [6] Epstein, R.I. e Pethick, C.J., *Astrophys. J.*, **243** (1981), 1003.
- [7] Vautherin, D., “*Nuclear Astrophysics of Dense Matter*”, Notas de Aula, Università degli Studi di Trento, Povo, (1991).
- [8] Tubbs, D.L. e Schramm, D.N., *Astrophys. J.*, **201** (1975), 467.
- [9] Gudmundsson, E.H. e Buchler, J.R., *Astrophys. J.* **238** (1980), 717.
- [10] Glendenning, N.K., *Astrophys. J.*, **293** (1985), 470.
- [11] Glendenning, N.K. e Moszkowski, S.A., *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991), 2414.
- [12] Brown, G., *Phys. Rep.* **163** (1988), 1.

Descrição Lagrangeana do Colapso Gravitacional a Duas Camadas: Transferência de Massa

“In recent years the study of supernovas has benefited from a close interaction between analytic theory and computer simulation. The first speculations about supernova mechanisms were put forward decades ago, but they could not be worked out in detail until the computers needed for numerical simulation became available. The results of the computations, on the other hand, cannot be understood except in the context of an analytic model.”

H. Bethe e G. Brown

5.1 Introdução

Entre os mecanismos capazes de ocasionar uma explosão de supernova, sobre os quais discutimos na seção 1.10, o mais simples, tanto do ponto de vista físico quanto do ponto de vista computacional, é o mecanismo de *bounce*, e sua simplicidade está em não depender explicitamente de processos microscópicos específicos, mas apenas das propriedades globais da matéria estelar durante o colapso.

O *bounce* é um movimento súbito de expansão do caroço da estrela, provocado por uma mudança muito rápida na equação de estado da matéria estelar nos instantes finais do colapso. Em frações de segundo, a matéria estelar transita do regime subnuclear ao regime hadrônico de densidade, e a equação de estado torna-se dura. Essa mudança das

características da equação de estado pode ser traduzida, por exemplo, pelo comportamento do índice adiabático em função da densidade, como já assinalamos na seção 1.10, e é capaz de causar uma violenta inversão do colapso. Neste sentido, o que desempenha o papel decisivo e determina a possibilidade ou não de uma explosão, no mecanismo de *bounce*, é a equação de estado da matéria estelar no regime hadrônico. Advém daí a importância que tem para a Astrofísica Nuclear o estudo das propriedades da matéria nuclear densa.

A equação de estado da matéria estelar hadrônica já foi estudada no capítulo anterior. Neste capítulo, vamos apresentar um formalismo que permite descrever, de forma simples, os aspectos globais que caracterizam a dinâmica do colapso gravitacional e a explosão de supernova, onde poderemos verificar que o mecanismo de *bounce* constitui-se num mecanismo realmente eficiente de explosão.

Antes disso, porém, vamos descrever rapidamente o tratamento que é usualmente empregado em cálculos hidrodinâmicos de colapso gravitacional e explosão de supernovas, que em linhas gerais é o seguinte: O caroço da pré-supernova é dividido em muitas camadas ou zonas, especificadas por suas massas, raios, densidades, temperaturas, etc., e sobre tal sistema são aplicadas as equações da hidrodinâmica. As equações de movimento resultantes são aproximadas por um conjunto equivalente de equações, denominado de equações de diferenças finitas [1], em que as variáveis locais são discretizadas, possibilitando a integração numérica do sistema original de equações. No entanto, para que se obtenham soluções estáveis dessas equações de movimento, é necessário implementar-se um código numérico que contenha um número elevado de malhas, em geral da ordem de centenas ou milhares. Além disso, para se contornar o problema inevitável do aparecimento de descontinuidades excessivamente grandes nas variáveis e que, em consequência disto, a solução numérica divirja e perca significado físico (por exemplo, não ficar conservada a energia), utiliza-se um recurso puramente matemático, que é a pseudo-viscosidade de VonNeumann–Richtmyer [2]. A *pseudo-viscosidade* tem as mesmas dimensões de pressão e entra nas equações de movimento

como um termo dissipativo artificial.

A *pseudo-viscosidade* é definida de tal forma que ela assume valores desprezíveis nas regiões homogêneas do fluido, mas tem um valor grande nas regiões do meio próximas de onde tende a se formar uma descontinuidade numérica, isto é, nas camadas altamente comprimidas. O resultado prático que se obtém é uma suavização da frente de onda de choque, uma suavização simulada por um mecanismo dissipativo que, na verdade, nada tem a ver com processos dissipativos reais como é o caso, por exemplo, da própria viscosidade hidrodinâmica. Entretanto, não obstante a sua natureza puramente numérica, a *pseudo-viscosidade* se consagrou, ao longo de mais de quatro décadas, como um procedimento realmente engenhoso e capaz de permitir o tratamento numérico de formação e propagação de ondas de choque. Como o problema da onda de choque é um dos mais candentes em física de supernovas, é claro que, na falta de um outro tratamento, a *pseudo-viscosidade* tem sido amplamente utilizada nos cálculos de colapso gravitacional.

Chamamos a atenção – e isto é a base da motivação para o formalismo que vamos apresentar mais adiante – para o fato de que, paradoxalmente, a eficácia da *pseudo-viscosidade* em poder tratar a propagação de perturbações em um meio contínuo, descrito por equações hidrodinâmicas, consiste em transformar uma onda de choque – que é uma descontinuidade cuja espessura, na realidade, é da ordem do livre caminho médio de uma molécula do meio – em uma “onda de choque” muito suavizada, onde a espessura da frente de onda pode conter várias camadas. Este fato, por si só, define, portanto, limites de razoabilidade para a *pseudo-viscosidade*, quando aplicada em cálculos de colapso gravitacional.

Por outro lado, o formalismo hidrodinâmico apresenta a desvantagem de requerer o tratamento numérico de um grande número de variáveis, encarecendo tremendamente o custo computacional das simulações, além de introduzir incertezas nos cálculos.

Em 1992, Rodrigues, Duarte, Kodama e Ávila [3], propuseram um modelo semi-analítico efetivo para descrever a dinâmica do colapso gravitacional adiabático e o

mecanismo de *bounce*, cujos aspectos básicos são os seguintes: O caroço da pré-supernova é dividido em camadas homogêneas, com massas fixas, especificadas por seus raios e densidades médias. Para a descrição da dinâmica do sistema, é construída uma lagrangeana efetiva, assumindo-se como coordenadas generalizadas os raios das camadas. A partir da lagrangeana efetiva, são obtidas analiticamente as equações de movimento, que são integradas numericamente.

Cabe notar que existe uma diferença marcante entre esta abordagem e a que foi descrita mais acima: por um lado, as equações da hidrodinâmica são equações diferenciais parciais, as quais, de partida, devem ser aproximadas por um conjunto de equações de diferenças finitas, possibilitando uma solução numérica das equações de movimento; tal aproximação é tanto melhor quanto maior for o número de camadas. Por outro lado, na descrição lagrangeana efetiva, as equações de movimento são integradas numericamente, sem a necessidade de introduzir-se aproximações prévias, sendo possível, a princípio, fazer cálculos para um número arbitrário de camadas (por exemplo, duas), sem comprometer em nada a precisão ou a estabilidade da solução numérica, o que não ocorre no formalismo hidrodinâmico usual, onde existe a forte restrição de que o número de camadas deve ser grande.

Contudo, devemos salientar que, a despeito das diferenças descritas acima, de natureza estritamente numérica, as duas abordagens são representações essencialmente equivalentes, no sentido de que, tomando-se o limite hidrodinâmico nas equações de movimento obtidas pelo formalismo lagrangeano efetivo, isto é, fazendo-se o número de camadas tender ao infinito e a massa das camadas tender a zero, recuperam-se as equações da hidrodinâmica.

Neste trabalho, propomos estender o modelo de camadas efetivas citado acima, no sentido de torná-lo mais realístico e capaz de melhor reproduzir os mecanismos hidrodinâmicos de transferência de massa e energia, que entram em operação durante a formação e propagação de uma onda de choque.

Para compatibilizar a representação **global** descrita anteriormente com o meca--

nismo **local** de formação de ondas de choque, aumentamos o número de graus de liberdade do sistema, através da introdução da massa de cada camada como uma variável dinâmica do sistema, isto é, como uma coordenada generalizada cuja evolução temporal, assim como a dos raios, é regida pelo *princípio de mínima ação*. Tentaremos mostrar que a introdução da massa como um grau de liberdade adicional do sistema permite, de fato, representar o processo de formação de ondas de choque durante o *bounce*, sendo respeitadas explicitamente as condições de Hugoniot–Rankine [4].

As condições de Hugoniot–Rankine expressam as leis de conservação local do fluxo de massa, momento e energia através da descontinuidade que caracteriza uma onda de choque. Em nossa descrição, com efeito, as leis de conservação do momento e da energia de cada camada já estão naturalmente embutidas no cálculo lagrangeano. A conservação da massa pode ser incorporada ao formalismo usando-se a equação da continuidade.

Como um exemplo simples e instrutivo de aplicação do formalismo (*), podemos pensar a explosão de uma supernova como um processo no qual, em frações de segundo, o caroço inicial da pré-supernova separa-se em dois subsistemas: um caroço denso remanescente – uma estrela de nêutrons – e uma camada externa, violentamente ejetada. A maneira mais simples possível de descrever-se o processo consiste em desmembrarmos o caroço da pré-supernova, desde o início do colapso, em duas camadas homogêneas, cada qual descrita por seus raios, massa, densidade média, pressão e densidade de energia interna. Como graus de liberdade efetivos do sistema, serão considerados os raios e as massas das duas camadas, que servirão de coordenadas generalizadas.

O campo de velocidade no interior de cada camada é obtido a partir da equação da continuidade, com o qual podemos determinar a expressão da energia cinética das camadas. É construída uma lagrangeana efetiva para o sistema contendo, além da energia

(*) Neste trabalho, vamos apresentar as equações de movimento e alguns resultados preliminares para o cálculo com duas camadas. O formalismo, assim como o código numérico para um número arbitrário de camadas está, no momento, em fase de conclusão, como fruto de nossa colaboração com Vitor d'Ávila (ON), S.B. Duarte (UFPB) e Marcello Chiapparini (TANDAR–CBPF).

cinética, a autoenergia gravitacional de ambas as camadas, a energia de interação gravitacional entre elas e a energia interna. Da lagrangeana efetiva assim obtida, deduzimos analiticamente as equações de movimento, que são integradas numericamente. Além de proporcionar uma descrição simples do colapso gravitacional, como comprovaremos, o formalismo que vamos descrever mais adiante oferece possibilidade de podermos determinar-se, com precisão, a energia disponível para a onda de choque gerada no instante do *bounce*.

5.2 Descrição do Formalismo

Como ilustra a Fig. 5.1, dividimos o caroço esférico da pré-supernova em duas camadas concêntricas: uma camada interna dada por uma esfera de raio R_1 e massa m_1 , e uma camada externa limitada interiormente pela superfície esférica de raio R_1 e exteriormente pela superfície de raio R_2 , cuja massa é m_2 . O sistema está submetido ao vínculo

$$m_1 + m_2 = M = \text{const.}, \quad (5.2.1)$$

onde m é a massa total do caroço. No caso de duas camadas, este vínculo reduz o número de graus de liberdade para apenas três, representados por R_1 , R_2 e m_1 .

Supondo-se que as duas camadas são homogêneas, a densidade de massa de cada uma delas é dada por

$$\rho_1 = \frac{3m_1}{4\pi R_1^3}, \quad (5.2.2)$$

$$\rho_2 = \frac{3(m - m_1)}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)}, \quad (5.2.3)$$

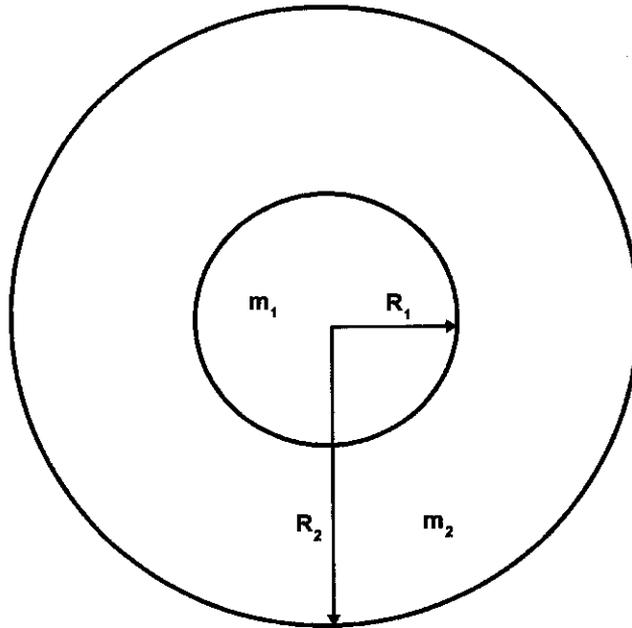


Fig. 5.1 – Caroço da pré-supernova dividido em duas camadas homogêneas, de massas variáveis m_1 e m_2 , delimitadas pelos raios R_1 e R_2 . O caroço possui massa constante igual a M .

Desprezando-se eventuais perdas de energia durante o colapso gravitacional (como, por exemplo, o fluxo de neutrinos), podemos escrever a lagrangeana do sistema

$$\begin{aligned} L &= L \left(R_1, R_2, m_1, \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{m}_1 \right) \\ &= K - W - \mathcal{E}, \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

onde K denota a energia cinética do sistema, W a energia potencial gravitacional e \mathcal{E} a energia interna.

Calculemos, primeiramente, a energia cinética do sistema. Paratanto, precisamos determinar o campo de velocidade do fluido compressível, o que pode ser feito usando-se a equação da continuidade. Devido a simetria esférica do problema, a equação da

continuidade se escreve, neste caso, como

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 \rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 .$$

Pelo que foi exposto acima, ρ_1 e ρ_2 são independentes de r , mas dependem implicitamente do tempo. Assim, aplicando-se a equação anterior à camada 1 e integrando-se, obtemos

$$v_1(r) = \left(\frac{\dot{R}_1}{R_1} - \frac{\dot{m}_1}{3m_1} \right) r , \quad (5.2.5)$$

e, para a camada 2,

$$v_2(r) = -\frac{\dot{\rho}_2}{3\rho_2} + \frac{b}{r^2} , \quad (5.2.6)$$

onde b é uma constante de integração. Para obter a Eq. (5.2.5), usamos a condição de contorno $v_1(r=0) = 0$. Observe também que o campo de velocidade da camada 1 é linear em r , isto é, ela forma um caroço homólogo.

O fluxo de massa através da superfície de separação esférica S_1 , definida pelo raio R_1 , é ditado, igualmente, pela lei da conservação da massa, que na forma integral se escreve:

$$\dot{m}_1 = - \int_{S_1} \rho_2 u_2(R_1) dS_1 , \quad (5.2.7)$$

onde $S_1 = 4\pi R_1^2$ e

$$u_2(R_1) \equiv v_2(R_1) - \dot{R}_1 , \quad (5.2.8)$$

é a velocidade da camada 2 em relação à descontinuidade $r = R_1$. Podemos usar esta equação para determinar b . Com este procedimento, encontramos a seguinte expressão para o campo de velocidade da camada 2

$$v_2(r) = \frac{R_2^2 \dot{R}_2 - R_1^2 \dot{R}_1}{R_2^3 - R_1^3} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) + \frac{\dot{m}_1}{3m_2} \left(r - \frac{R_2^3}{r^2} \right) + \frac{R_1^2}{r^2} \dot{R}_1 . \quad (5.2.9)$$

É imediato verificar que

$$v_1(R_1) = \dot{R}_1 - \frac{\dot{m}_1}{4\pi R_1^2 \rho_1} , \quad (5.2.10)$$

$$v_2(R_1) = \dot{R}_1 - \frac{\dot{m}_1}{4\pi R_1^2 \varrho_2}, \quad (5.2.11)$$

e

$$v_2(R_2) = \dot{R}_2. \quad (5.2.12)$$

Observe nas Eqs. (5.2.10) e (5.2.11) que a presença de um fluxo de massa através da superfície S_1 acarreta, necessariamente, uma descontinuidade no campo de velocidade, justamente em $r = R_1$. É esta descontinuidade no campo de velocidade, acompanhada ainda da descontinuidade na pressão e na densidade das camadas, que caracteriza a formação de uma onda de choque, como vimos no primeiro capítulo. Em outras palavras, a introdução da massa como uma variável dinâmica e cuja evolução temporal é regida pelo *princípio de mínima ação*, permite-nos, como mostraremos no próximo capítulo, uma descrição efetiva do processo de formação de ondas de choque. Por outro lado, é fácil ver que na interface R_1

$$\Delta v = v_1(R_1) - v_2(R_1) = \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \frac{\dot{m}_1}{4\pi R_1^2}.$$

Assim, vemos que a descontinuidade no campo de velocidade se anula apenas em dois casos distintos: se $\varrho_1 = \varrho_2$ ou $\dot{m}_1 = 0$, o que é autoconsistente com o conceito de onda de choque (veja a Fig. 5.2). Porém, se Δv for muito grande, então $\dot{m}_1 \gg 0$ e $\varrho_1 > \varrho_2$, e uma onda de choque é formada. Lembremos que existe também uma descontinuidade na pressão, pois ela é uma função monotônica crescente da densidade.

Eliminando-se \dot{m}_1 nas Eqs. (5.2.10,11), obtemos a lei de conservação da massa através da descontinuidade, dada por

$$\varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2, \quad (5.2.13)$$

onde u_1 e u_2 são as velocidades relativas definidas do mesmo modo que na Eq. (5.2.8). A última equação corresponde à condição de Hugoniot–Rankine para a lei de conservação do fluxo de massa através da superfície S_1 .

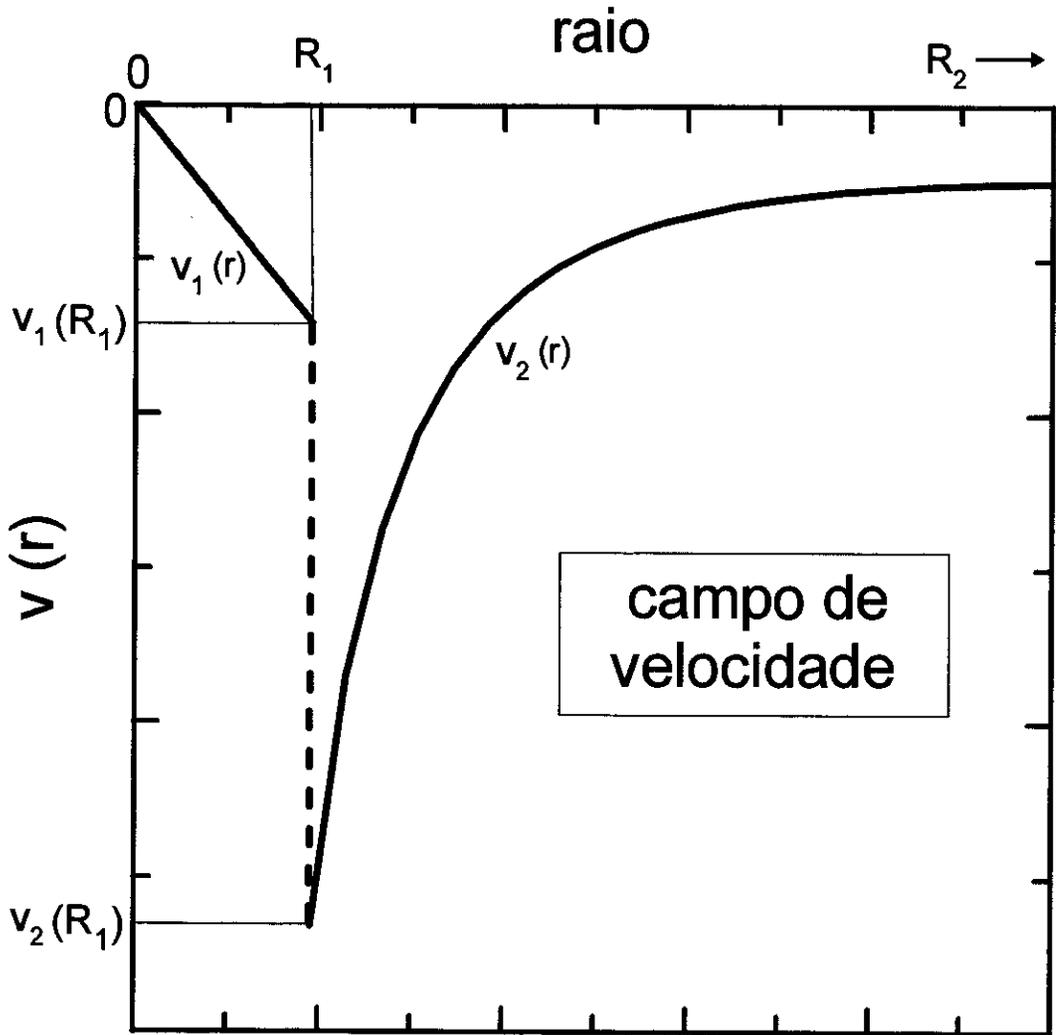


Fig. 5.2 – Representação esquemática do campo de velocidade no interior das duas camadas. Note que a descontinuidade do campo de velocidade em $r = R_1$ aparece devido a introdução da massa como uma variável dinâmica.

Conhecido o campo de velocidade de cada camada, a energia cinética pode ser determinada através da expressão

$$K_i = \frac{1}{2} \int_{V_i} \rho_i v_i^2(r) dV, \quad (5.2.14)$$

onde V_i é o volume de cada subsistema. Portanto, a energia cinética total do sistema é dada pela seguinte forma quadrática:

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{v} | \mathbf{M} | \mathbf{v} \rangle, \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

onde K_1 e K_2 representam as energias cinéticas da camada 1 e da camada 2, respectivamente,

$$|\mathbf{v}\rangle \equiv \begin{pmatrix} \dot{R}_1 \\ \dot{R}_2 \\ \dot{m}_1 \end{pmatrix}, \quad (5.2.16)$$

e \mathbf{M} é uma matriz simétrica definida por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.2.17)$$

cujos elementos de matriz são

$$M_{11} = \frac{3}{5} \left[\frac{5x^3 + 6x^2 + 3x + 1}{(1 + x + x^2)^3} m_2 + m_1 \right], \quad (5.2.18a)$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{9}{10} x^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{(1 + x + x^2)^3} m_2, \quad (5.2.18b)$$

$$M_{13} = M_{31} = -\frac{1}{5} \left[3(x - 1) \frac{5x^3 + 6x^2 + 3x + 1}{3(1 + x + x^2)^2} + 1 \right] R_1, \quad (5.2.18c)$$

$$M_{22} = \frac{3}{5} x^3 \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 5}{(1 + x + x^2)^3} m_2, \quad (5.2.18d)$$

$$M_{23} = M_{32} = -\frac{3}{5} x^2 \langle x - 1 \rangle \frac{x^2 + 3x + 1}{2(1 + x + x^2)^2} R_1, \quad (5.2.18e)$$

$$M_{33} = \frac{1}{15} \left[\frac{(x - 1)^2}{m_2} \frac{5x^3 + 6x^2 + 3x + 1}{(1 + x + x^2)} + \frac{1}{m_1} \right] R_1^2, \quad (5.2.18f)$$

onde a variável adimensional x é definida pela razão

$$x \equiv \frac{R_2}{R_1} . \quad (5.2.19)$$

A energia potencial gravitacional é composta de três termos, a saber: a autoenergia gravitacional da camada 1, dada por

$$W_1 = - \int_0^{R_1} \frac{Gm_1(r)}{r} dm_1 , \quad (5.2.20)$$

onde G é a constante da gravitação universal, a autoenergia gravitacional da camada 2

$$W_2 = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Gm_2(r)}{r} dm_2 , \quad (5.2.21)$$

e a energia de interação gravitacional entre as duas camadas

$$W_{int.} = - \int_{R_1}^{R_2} Gm_1 \frac{dm_2(r)}{r} . \quad (5.2.22)$$

O resultado final é

$$W = - \frac{3}{5} \frac{G}{R_1} \left[m_1^2 + f(x)m_2^2 + \frac{5}{2} g(x)m_1m_2 \right] , \quad (5.2.23)$$

onde

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{2x^3 + 4x^2 + 6x + 3}{(1 + x + x^2)^2} , \quad (5.2.24)$$

e

$$g(x) = \frac{x + 1}{1 + x + x^2} . \quad (5.2.25)$$

Resta, apenas, conhecer o termo de energia interna do sistema, que pode ser determinada a partir da densidade de energia interna por unidade de volume ε , de modo a que possamos escrever

$$\mathcal{E} = \frac{m_1\varepsilon_1}{\varrho_1} + \frac{m_2\varepsilon_2}{\varrho_2} , \quad (5.2.26)$$

onde ε_1 e ε_2 representam a densidade volumétrica de energia interna da camada 1 e da camada 2, respectivamente. Entretanto, a densidade de energia deve ser especificada

por uma equação de estado, que nos forneça seu valor como uma função da densidade bariônica. Este tópico será abordado na seção 5.4.

5.3 Equações de Movimento

Da lagrangeana (5.2.4) podemos deduzir as equações de Euler-Lagrange correspondentes às equações de movimento para as três coordenadas generalizadas usadas para descrever a evolução dinâmica do sistema, sendo dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (5.3.1)$$

onde $q_k = R_1, R_2, m_1$ e $v_k = \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{m}_1$. Explicitamente, temos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial v_k} \right) = \frac{\partial K}{\partial q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} (W + \mathcal{E}). \quad (5.3.2)$$

Os termos de força oriundos da energia cinética, presentes na equação acima, são dados por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial v_k} \right) = \frac{d}{dt} \langle k | \mathbf{M} | \mathbf{v} \rangle, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.3.3)$$

onde

$$|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.3.4)$$

e

$$\frac{\partial K}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_k, \quad (5.3.5)$$

sendo

$$\mathcal{F}_k \equiv \sum_{i,j} \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \right) v_i v_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.3.6)$$

Os termos correspondentes à força gravitacional e à força hidrostática serão analisados posteriormente.

O cálculo explícito das Eqs. (5.3.3) e (5.3.5) envolvem as seguintes derivadas dos elementos de matriz de \mathbf{M} , definidos em (5.2.18),

$$\dot{M}_{11} = \frac{1}{R_1} M'_{11} \dot{R}_2 - \frac{x}{R_1} M'_{11} \dot{R}_1 + \frac{1}{m_2} \left(\frac{3}{5} m - M_{11} \right) \dot{m}_1, \quad (5.3.7a)$$

$$\dot{M}_{12} = \frac{1}{R_1} M'_{12} \dot{R}_2 - \frac{x}{R_1} M'_{12} \dot{R}_1 - \frac{1}{m_2} M_{12} \dot{m}_1, \quad (5.3.7b)$$

$$\dot{M}_{13} = \frac{1}{R_1} M'_{13} \dot{R}_2 + \frac{1}{R_1} (M_{13} - x M'_{13}) \dot{R}_1, \quad (5.3.7c)$$

$$\dot{M}_{22} = \frac{1}{R_1} M'_{22} \dot{R}_2 - \frac{x}{R_1} M'_{22} \dot{R}_1 - \frac{1}{m_2} M_{22} \dot{m}_1, \quad (5.3.7d)$$

$$\dot{M}_{23} = \frac{1}{R_1} M'_{23} \dot{R}_2 + \frac{1}{R_1} (M_{23} - x M'_{23}) \dot{R}_1, \quad (5.3.7e)$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{33} &= \frac{1}{R_1} M'_{33} \dot{R}_2 + \frac{1}{R_1} (2M_{33} - x M'_{33}) \dot{R}_1 \\ &+ \frac{1}{m_2} \left(M_{33} - \frac{1}{15} m \frac{R_1^2}{m_1^2} \right) \dot{m}_1, \end{aligned} \quad (5.3.7f)$$

onde

$$M'_{11} = -\frac{9}{5} m_2 x^2 \frac{5x^2 + 8x + 2}{(1 + x + x^2)^4}, \quad (5.3.8a)$$

$$M'_{12} = -\frac{9}{5} m_2 x \frac{x^4 + 4x^3 - 4x - 1}{(1 + x + x^3)^4}, \quad (5.3.8b)$$

$$M'_{13} = -\frac{9}{5} x^2 \frac{x^2 + 3x + 1}{(1 + x + x^2)^3} R_1, \quad (5.3.8c)$$

$$M'_{22} = \frac{9}{5} m_2 x^2 \frac{2x^2 + 8x + 5}{(1 + x + x^2)^4}, \quad (5.3.8d)$$

$$M'_{23} = -\frac{9}{5} x \frac{x^5 + 3x^4 + 11x^3 + 8x^2 - 6x - 2}{2(1 + x + x^2)^3} R_1, \quad (5.3.8e)$$

$$M'_{33} = \frac{3}{5m_2} x^2 \frac{5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4}{(1 + x + x^2)^2} R_1^2, \quad (5.3.8f)$$

sendo

$$M'_{ij} \equiv \frac{\partial M_{ij}}{\partial x}.$$

As equações de movimento para R_1 , R_2 e m_1 podem ser escritas na forma

$$M_{11}\ddot{R}_1 + M_{12}\ddot{R}_2 + M_{13}\ddot{m}_1 = Q_1 + B_1 + H_1, \quad (5.3.9)$$

$$M_{12}\ddot{R}_1 + M_{22}\ddot{R}_2 + M_{23}\ddot{m}_1 = Q_2 + B_2 + H_2, \quad (5.3.10)$$

$$M_{13}\ddot{R}_1 + M_{23}\ddot{R}_2 + M_{33}\ddot{m}_1 = Q_3 + B_3 + H_3, \quad (5.3.11)$$

onde

$$\begin{aligned} Q_1 = \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{2} x M'_{11} \dot{R}_1^2 - \frac{1}{2} (2M'_{12} + x M'_{22}) \dot{R}_2^2 + \frac{1}{2} (2M_{33} - x M'_{33}) \dot{m}_1^2 \right. \\ \left. - M'_{11} \dot{R}_1 \dot{R}_2 - \frac{R_1}{m_2} \left(\frac{3}{5} m - M_{11} \right) \dot{m}_1 \dot{R}_1 \right. \\ \left. + \left(\frac{R_1}{m_2} M_{12} + M_{23} - M'_{13} - x M'_{23} \right) \dot{m}_1 \dot{R}_2 \right], \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

$$\begin{aligned} Q_2 = \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{2} (M'_{11} + 2x M'_{12}) \dot{R}_1^2 - \frac{1}{2} M'_{22} \dot{R}_2^2 + \frac{1}{2} M'_{33} \dot{m}_1^2 + x M'_{22} \dot{R}_1 \dot{R}_2 \right. \\ \left. + \left(\frac{R_1}{m_2} M_{12} - M_{23} + M'_{13} + x M'_{23} \right) \dot{m}_1 \dot{R}_1 + \frac{R_1}{m_2} M_{22} \dot{m}_1 \dot{R}_2 \right], \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

$$\begin{aligned} Q_3 = \left[\frac{1}{2} \frac{1}{m_2} \left(\frac{3}{5} m - M_{11} \right) - \frac{1}{R_1} (M_{13} - x M'_{13}) \right] \dot{R}_1^2 \\ - \frac{1}{R_1} \left(M'_{23} + \frac{1}{2} \frac{R_1}{m_2} M_{22} \right) \dot{R}_2^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{m_2} \left(M_{33} - \frac{1}{15} m \frac{R_1^2}{m_1^2} \right) \dot{m}_1^2 \\ - \frac{1}{R_1} \left(\frac{R_1}{m_2} M_{12} + M_{23} + M'_{13} - x M'_{23} \right) \dot{R}_1 \dot{R}_2 \\ - \frac{1}{R_1} (2M_{33} - x M'_{33}) \dot{m}_1 \dot{R}_1 - \frac{1}{R_1} M'_{33} \dot{m}_1 \dot{R}_2, \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

representam as forças generalizadas dependentes das velocidades, derivadas da energia cinética.

Por sua vez, o conjunto de forças gravitacionais é formado pelas expressões

$$B_1 = -\frac{\partial W}{\partial R_1} = -\frac{3}{5} \frac{G}{R_1^2} \left[m_1^2 + f_1(x) m_2^2 + \frac{5}{2} g_1(x) m_1 m_2 \right], \quad (5.3.15)$$

$$B_2 = -\frac{\partial W}{\partial R_2} = -\frac{3}{5} \frac{G}{x^2 R_1^2} \left[f_2(x) m_2^2 + \frac{5}{2} g_2(x) m_1 m_2 \right], \quad (5.3.16)$$

$$B_3 = -\frac{\partial W}{\partial m_1} = \frac{3}{5} \frac{G}{R_1} \left[2(m_1 - f(x) m_2) + \frac{5}{2} g(x) (m_2 - m_1) \right], \quad (5.3.17)$$

onde

$$f_1(x) = \frac{3}{2} \frac{x^2 + 3x + 1}{(1 + x + x^2)^3}, \quad (5.3.18)$$

$$f_2(x) = x^3 \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 5}{(1 + x + x^2)^3}, \quad (5.3.19)$$

$$g_1(x) = \frac{2x + 1}{(1 + x + x^2)^2}, \quad (5.3.20)$$

$$g_2(x) = x^3 \frac{x + 2}{(1 + x + x^2)^2}. \quad (5.3.21)$$

Resta determinarmos ainda as forças hidrostáticas. Para a primeira equação de movimento, temos

$$H_1 = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial R_1} = -\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V_1} \frac{\partial V_1}{\partial R_1} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V_2} \frac{\partial V_2}{\partial R_1} \right),$$

Observando que $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V} = -P$, onde P é a pressão, obtemos

$$H_1 = 4\pi(P_1 - P_2)R_1^2. \quad (5.3.22)$$

Com um cálculo semelhante, é fácil ver que

$$H_2 = 4\pi P_2 R_2^2. \quad (5.3.23)$$

Para o cálculo de H_3 , convém escrevermos a energia interna na forma alternativa

$$\mathcal{E} = m_1 \epsilon_1(\rho_1) + m_2 \epsilon_2(\rho_2), \quad (5.3.24)$$

onde, aqui, $\epsilon_1(\rho_1)$ e $\epsilon_2(\rho_2)$ denotam a energia interna específica de cada camada. Temos então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m_1} &= \epsilon_1 + m_1 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial m_1} - \epsilon_2 + m_2 \frac{\partial \epsilon_2}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial m_1} \\ &= \epsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} - \epsilon_2 - \frac{P_2}{\rho_2}, \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

onde v_1 e v_2 são os volumes específicos das camadas.

Em termos da densidade volumétrica de energia, podemos escrever

$$H_3 = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial m_1} = \frac{\varepsilon_2 + P_2}{\varrho_2} - \frac{\varepsilon_1 + P_1}{\varrho_1} . \quad (5.3.26)$$

Logo

$$H_3 = h_2 - h_1 , \quad (5.3.27)$$

onde h_1 e h_2 denotam as entalpias específicas das camadas 1 e 2, respectivamente.

As equações (5.3.9)–(5.3.11) formam um sistema de equações diferenciais acopladas e não-lineares, que podem ser representadas simbolicamente pela equação

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{F} , \quad (5.3.28)$$

com

$$\mathbf{a} \equiv \begin{pmatrix} \ddot{R}_1 \\ \ddot{R}_2 \\ \ddot{m}_1 \end{pmatrix} , \quad (5.3.29)$$

e

$$\mathbf{F} \equiv \begin{pmatrix} Q_1 + B_1 + H_1 \\ Q_2 + B_2 + H_2 \\ Q_3 + B_3 + H_3 \end{pmatrix} . \quad (5.3.30)$$

Observe que a Eq. (5.3.28) nos remete à familiar segunda lei de Newton. Assim, as acelerações podem ser obtidas através da equação matricial

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} , \quad (5.3.31)$$

onde \mathbf{M}^{-1} é a matriz inversa de \mathbf{M} . A última equação permite-nos integrar numericamente as equações de movimento. Paratanto, usamos o método de integração numérica de Runge–Kutta–Fehlberg descrito na referência [5].

5.4 Equação de Estado

Para que possamos integrar as equações de movimento obtidas na seção anterior, e que descrevem a evolução dinâmica do colapso gravitacional, precisamos especificar a

equação de estado da matéria estelar como função da densidade de massa, sendo que, nas duas primeiras, devemos entrar com a pressão de cada camada enquanto que, na terceira, além da pressão, precisamos entrar também com a densidade de energia interna das camadas.

Indicamos na Tab. VII as equações de estado usadas neste trabalho para os três regimes de densidade pelos quais passa a matéria estelar durante o colapso. Para o regime subnuclear sem nêutrons livres, usaremos a equação de Baym, Pethick e Sutherland (BPS), descrita na seção 2.4; para o subnuclear com nêutrons livres sem neutrinos confinados usaremos a equação de estado de Baym, Bethe e Pethick (BBP), mostrada na seção 2.5. Para o regime subnuclear com nêutrons livres e neutrinos confinados, vamos usar a equação de estado de Gudmundsson e Buchler (GB), que foi apresentada na seção 4.2. Por fim, vamos usar para o regime hadrônico a equação de estado proposta na seção 4.3, obtida a partir da QHD.

Fazendo-se a evolução dinâmica para as mesmas configurações, mas usando-se as duas equações de estado, uma sem neutrinos e outra com neutrinos confinados, permitirá estudarmos de que forma o confinamento de neutrinos pode afetar a dinâmica do colapso gravitacional e a energia da onda de choque emergente durante o *bounce*.

Antes de prosseguirmos, convém observarmos, porém, que aquelas equações de estado foram obtidas tendo por base um cálculo relativístico para a determinação da densidade de energia interna, isto é, elas contém explicitamente a energia de repouso das partículas. Não haveria problema algum em se empregar diretamente aquelas equações de estado se o formalismo proposto aqui fosse, também, relativístico. Entretanto as equações de movimento, assim como o cálculo da energia gravitacional, não contemplam nenhuma correção relativística, tendo sido obtidas a partir da aproximação newtoniana.

Para compatibilizar as duas descrições, o que fizemos foi o seguinte: Primeiramente, com os valores de pressão listados nas Tabs. IV e V, e os resultados obtidos no Capítulo 4, podemos obter, por interpolação numérica, uma curva contínua da pressão em função da densidade bariônica, cobrindo-se, como é desejável, todas as regiões de densidade.

Tabela VII

Região	Densidade (g/cm ³)	Estrutura	Equação de Estado
I	$2 \times 10^3 < \rho < 4,3 \times 10^{11}$	rede cristalina; núcleos leves e gás de elétrons.	BPS
II	$4,3 \times 10^{11} < \rho < 3 \times 10^{13}$	rede cristalina; núcleos pesados, gás de elétrons relativísticos e gás de nêutrons (\pm neutrinos).	BBP e GB
III	$3 \times 10^{13} < \rho < 5 \times 10^{15}$	nucleons relativísticos, mésons, muons, elétrons (\pm neutrinos).	Este trabalho (QHD)

— *Equações de estado usadas neste trabalho para os três regimes de densidade: Equação de estado BPS para o regime subnuclear sem nêutrons livres (I); equação de estado para o regime subnuclear com nêutrons livres (II) com (GB) e sem (BBP) neutrinos confinados; equação de estado para o regime supranuclear (III) com e sem neutrinos confinados (QHD) propostas neste trabalho.*

Ora, sabemos que a pressão e a densidade de energia estão termodinamicamente relacionadas por

$$P = n_B^2 \frac{\partial(\varepsilon/n_B)}{\partial n_B} . \tag{5.4.1}$$

Integrando-se a equação acima, obtemos a seguinte expressão

$$\varepsilon/n_B = \int_{\ln n_{B_0}}^{\ln n_B} \frac{P}{n_B} d \ln n_B + \varepsilon/n_{B_0} , \tag{5.4.2}$$

que nos fornece a energia por bárion em função da densidade bariônica (isto é, do número de bárions por unidade de volume). A integral que aparece no segundo membro é resolvida numericamente, sendo n_{B_0} uma densidade fixa de referência para a qual adotamos o valor de $0,6295 \times 10^{28} \text{ cm}^{-3}$. A constante de integração ε/n_{B_0} corresponde ao valor da energia por bárion em $n_B = n_{B_0}$ para um gás de elétrons, excluindo-se a energia de repouso destes últimos.

Com o procedimento descrito acima, conseguimos obter uma curva para a densidade de energia termodinamicamente consistente, permitindo sua aplicação ao nosso

formalismo. Na Fig. 5.3 mostramos a curva interpolada da pressão, dividida pela densidade bariônica, em função do logaritmo da densidade bariônica, para as três regiões de densidade.

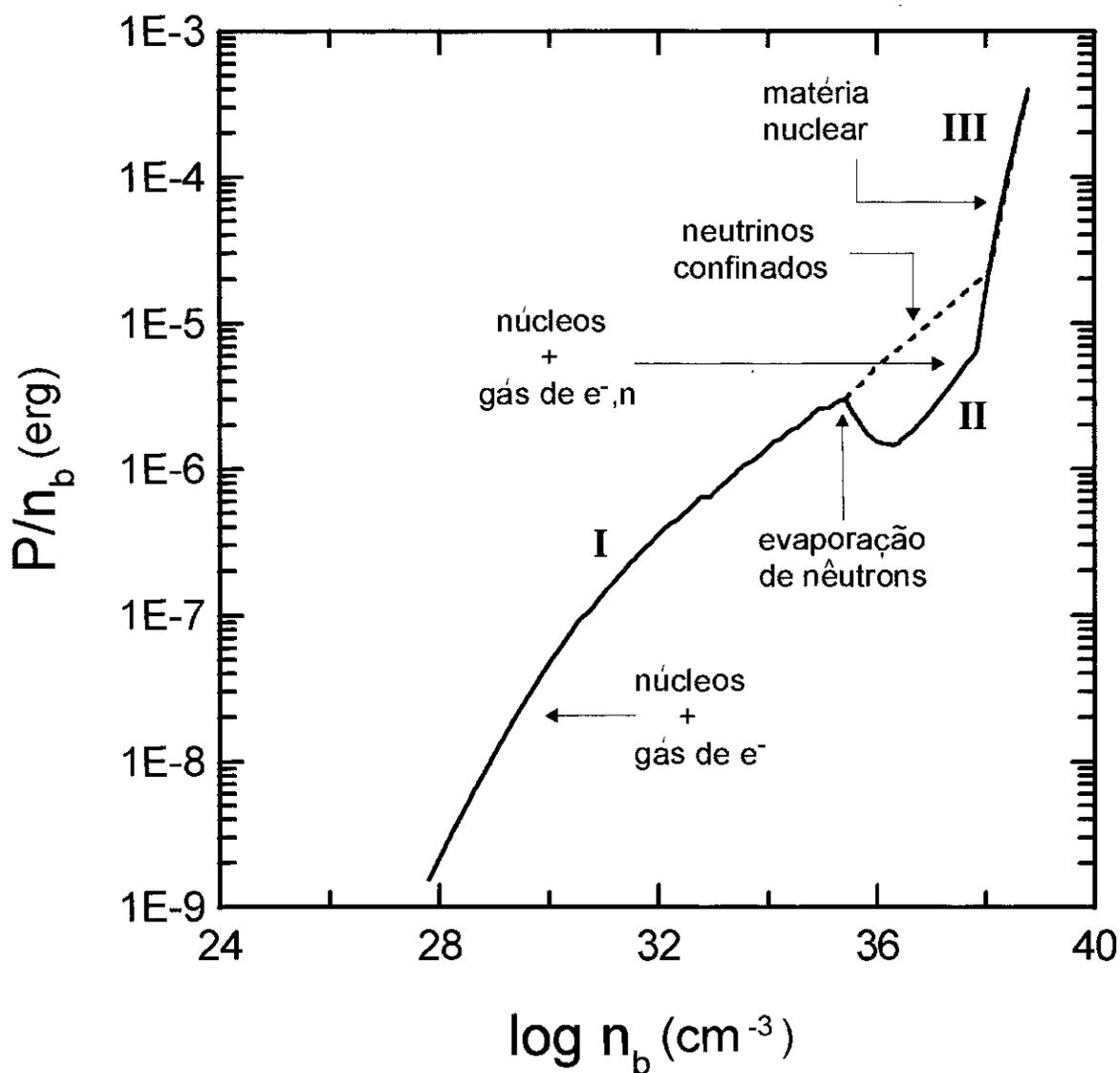


Fig. 5.3 – Pressão versus densidade nos três regimes de densidade.

5.5 Condição Inicial

Para realizarmos o cálculo da evolução dinâmica do colapso gravitacional, ditada pela equação (5.3.31), precisamos determinar a condição inicial do sistema, isto é, especificar os valores das coordenadas generalizadas R_1 , R_2 e m_1 , e das velocidades generalizadas \dot{R}_1 , \dot{R}_2 e \dot{m}_1 no instante $t = 0$.

Isto equivale a definirmos um modelo bastante simplificado para o caroço da pré-supernova. Tal modelo será especificado pela massa total do caroço, m , constante ao longo da evolução temporal, pelos raios que limitam as duas camadas e pela partição inicial de massa entre elas. Quanto à composição química, vamos assumir, ainda por simplicidade, que ambas as camadas são compostas por núcleos de ^{56}Fe , distribuídos numa rede cristalina, e imersos num gás de elétrons degenerados. Estas condições são suficientes para que tenhamos um caroço altamente instável contra contrações gravitacionais, pelo simples fato de o índice adiabático situar-se em torno de $4/3$. Em síntese, o modelo de caroço de pré-supernova que estamos propondo aqui assemelha-se, bastante, com uma anã-branca composta de ^{56}Fe .

Para uma configuração em equilíbrio estático, a energia cinética é nula ($\dot{R}_1 = \dot{R}_2 = \dot{m}_1 = 0$). Portanto, a energia total do sistema descrito acima é dada simplesmente por

$$H = W + \mathcal{E} , \quad (5.5.1)$$

onde W é a energia gravitacional do caroço, dada pela Eq. (5.2.23), e \mathcal{E} a energia interna, que é obtida integrando-se numericamente a Eq. (5.4.2) no volume. Fixando-se m , podemos determinar os raios iniciais e a partição de massa entre as duas camadas minimizando-se a energia total do caroço em relação a R_1 , R_2 e m_1 , isto é, resolvendo-se simultaneamente as equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial R_1} \delta R_1 &= 0 , \\ \frac{\partial H}{\partial R_2} \delta R_2 &= 0 , \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial m_1} \delta m_1 = 0 .$$

Na prática, o que fizemos foi minimizar a energia por métodos numéricos, do seguinte modo: fixamos uma massa m para o caroço e escolhemos valores arbitrários para R_1 , R_2 , compatíveis com as dimensões de uma anã-branca, juntamente com m_1 e m_2 . Uma sub-rotina apropriada é utilizada para determinar-se as coordenadas R_1 , R_2 e m_1 do mínimo absoluto da superfície gerada por H , conseguindo-se assim a configuração de equilíbrio.

Para a construção da configuração inicial, foi usada uma equação de estado de um gás de elétrons degenerados com fração elétron-próton constante e igual à do ^{56}Fe ($= 0,46$), sem incluir a energia de repouso dos elétrons. Tal equação de estado está dada essencialmente pela Eq. (2.2.18) mais a correção da rede dada na Eq. (2.3.5), sendo ligeiramente diferente da equação de estado de Baym, Pethick e Sutherland.

5.6 Acionamento do Colapso Gravitacional

Descrevemos na última seção de que maneira preparamos a condição inicial (de equilíbrio instável) usando com este fim a equação de estado de um gás de elétrons puro com fração leptônica constante e igual à do ^{56}Fe .

Dada a condição inicial do problema, como fazer para acionar o colapso gravitacional, isto é, como dar a partida na evolução dinâmica do sistema. O procedimento que usamos para tanto foi o de "ligar" a equação de estado de Baym, Pethick e Sutherland à configuração de equilíbrio. Tal mudança na equação de estado é suficiente para, fixando-se as densidades e as massas das duas camadas, se obter uma redução tanto da densidade de energia interna quanto da fração leptônica das camadas, causando uma despressurização do gás. Como o sistema é instável ($\Gamma \approx 4/3$), o equilíbrio hidrostático é então rompido em favor da força gravitacional. Com isso, tem início o colapso gravitacional.

A integração numérica das equações de movimento permitem acompanhar a evolução dinâmica do sistema desde o início do colapso até alguns centésimos de segundo após o *bounce* e a reflexão da segunda camada. Este e outros resultados obtidos com o formalismo descrito aqui, serão apresentados e analisados no próximo capítulo.

Referências

- [1] Richtmyer, R.D., “*Difference Methods for Initial-Value Problem*”, Interscience Publishers, Inc., New York (1957).
- [2] VonNeumann, J. e Richtmyer, R.D., *J. Ap. Phys.*, **21** (1950), 232.
- [3] Rodrigues, H., Duarte, S.B., Kodama, T. e d’Avila, V., *Astrophys. Spa. Sci.*, **194** (1992), 313.
- [4] Zeldovich, Y.B. e Raizer, Y.P., “*Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*”, Academic Press, Inc. (1970).
- [5] Burden, L.R., Faires, J.D. e Reynolds, A.C., “*Numerical Analysis*”, Prindle, Weber & Schmidt, editors, Boston–Massachusetts (1984).

Resultados e Conclusões

” Mas existem mundos novos! Estão envoltos uns sobre os outros, como as camadas de uma cebola. O mundo onde existimos é apenas uma dessas camadas.”

A Arte do Sonhar, Carlos Castaneda

6.1 Evolução Dinâmica

Acionada a implosão do caroço pelo mecanismo de captura eletrônica, a evolução temporal subsequente do sistema será governada pelas equações de movimento (5.3.9–11), obtidas através da representação lagrangeana efetiva, e com as quais podemos obter, a cada passo da integração numérica dessas equações, os valores de R_1 , R_2 e m_1 , e de suas respectivas velocidades e acelerações, em cada instante de tempo t .

Para o melhor entendimento e clareza do que vamos expor a seguir, convém, antes de mais nada, separarmos todo o processo da dinâmica em duas fases: a fase de colapso gravitacional, que se caracteriza por ser um processo adiabático, isentrópico e, em nosso caso, também isotérmico (aproximação $T = 0$), e a fase pós-*bounce*, na qual predominam certos processos dissipativos, como, por exemplo, a dissociação de núcleos, processos estes que se estabelecem durante a propagação da onda de choque gerada no *bounce*, os quais, a rigor, não podem ser negligenciados. Como mencionamos na introdução deste trabalho, tais processos dissipativos podem, eventualmente, reduzir drasticamente a intensidade da onda de choque, atenuando-a de tal modo que ela não consiga ocasionar

uma explosão. Queremos dizer com isso que, após o *bounce*, a aproximação de temperatura zero, adotada neste trabalho, não se apresenta como uma descrição razoável do fenômeno. Os resultados que vamos apresentar aqui devem, portanto, ser analisados com esta ressalva: a de que a aproximação adiabática com $T = 0$ não é realista para o período pós-*bounce*. Contudo, isto não afeta em nada a validade do formalismo proposto aqui.

Como um exemplo de aplicação deste formalismo, vamos considerar o colapso gravitacional de um caroço de $1,24M_{\odot}$, composto de núcleos de ^{56}Fe e um gás de elétrons degenerados, e apresentar alguns resultados sobre a sua dinâmica. A minimização da energia total desse sistema nos fornece a seguinte estrutura (i. e., a condição inicial): $R_1 \approx 8,0 \times 10^8$ cm, $R_2 \approx 1,3 \times 10^9$ cm e $m_1 \approx 0,76M_{\odot}$. Observe que, a grosso modo, esta configuração de pré-supernova corresponde a uma anã branca de ferro, e que $1,24M_{\odot}$ é justamente o limite de Chandrasekhar para um caroço composto de ^{56}Fe .

Como já mencionamos na sessão 5.6, a "chave" para acionar o colapso consiste em se reduzir tanto a pressão como o número de elétrons do sistema, pela mudança da equação de estado. Com isso, o equilíbrio hidrostático é desfeito em favor da força gravitacional, ou seja, em $t = 0$ as forças generalizadas B_i e H_i , presentes no lado direito das equações de movimento assumem valores não nulos, levando o sistema a entrar em colapso.

Mostramos na Fig. 6.1a a evolução dos raios R_1 e R_2 em relação ao tempo para esta configuração, caracterizando um evento de explosão. Podemos ver que, no início, as duas camadas implodem; depois, todo o material da camada 1 (o caroço homólogo) inverte repentinamente o sentido de movimento (*bounce*), se expande rapidamente e colide com a segunda camada. Isto pode ser visto mais claramente ainda na Fig. 6.1b, onde mostramos em detalhe o processo de inversão (observem a mudança na escala de tempo).

Após o desacoplamento da camada 2, o caroço homólogo fica realizando oscilações periódicas de amplitude constante, com massa, raio médio e densidade média carac-

terísticos de uma estrela de nêutrons.

As duas figuras anteriores mostram que o formalismo apresentado aqui representa satisfatoriamente um mapeamento a três graus de liberdade do mecanismo de *bounce*. Os elementos básicos desse processo são os seguintes: no momento em que o caroço homólogo faz o *bounce*, é formada ali uma forte onda de choque, que se propaga supersonicamente sobre a camada 2, até alcançar a superfície R_2 , invertendo também o sentido de movimento desta última. Voltaremos a este ponto na próxima seção. Salientemos também que nem todo o material inicialmente contido na camada 2 é ejetado, pois, como mostraremos mais adiante, um parte significativa desse material é transferida para a camada 1 durante o processo crítico de *bounce*.

Na Fig. 6.2, mostramos as densidades características atingidas durante o *bounce*, para as duas camadas, como função da massa total do caroço, portanto, para diversas configurações iniciais. No gráfico de baixo, as duas curvas representam as densidades da camada 1, em unidades da densidade de saturação da matéria nuclear ρ_0 , alcançadas no *bounce*, usando-se as duas equações de estado, isto é, com e sem neutrinos confinados. No gráfico de cima, mostramos as densidades da camada 2 no *bounce*, em unidades de 10^{11} g/cm³. Podemos ver que, no instante do *bounce*, o material da camada 1 sempre atinge o regime de matéria nuclear, ao passo que a camada 2 fica ainda no regime subnuclear.

Observe que as densidades máximas alcançadas pela camada 1 são mais elevadas no caso em que os neutrinos não são confinados (curva tracejada), situando-se num valor em torno de duas vezes a densidade de saturação da matéria nuclear. Por outro lado, o confinamento dos neutrinos (curva cheia) altera sensivelmente a densidade de *bounce*, baixando-a para algo em torno de 1,5 vezes ρ_0 .

A Fig. 6.3 representa a evolução dinâmica para um caroço de $1,075M_\odot$. Temos, neste caso, um evento tipicamente não explosivo, no qual os raios das camadas ficam indefinidamente realizando oscilações quase periódicas e praticamente em fase. As densidades máximas atingidas pelas camadas durante cada oscilação são muito menores que

a densidade da matéria nuclear, ficando dentro do regime de densidade onde é válida a equação de estado de Bayn, Pethick e Sutherland. Contudo, não foi possível estudar detalhadamente o surgimento de certas estruturas mostradas pelas duas curvas. Por outro lado, verificamos que caroços de ferro com massas menores que $\approx 1,08M_{\odot}$ não explodem. Entretanto, acreditamos que este limite inferior de massa deva depender fortemente da equação de estado que é implementada nos cálculos.

Mostramos na Fig 6.4 a evolução da massa da camada 1 em relação ao tempo. Durante o colapso, m_1 oscila levemente em torno do seu valor inicial, sofrendo um salto significativo durante o *bounce*, quando então atinge um valor constante de aproximadamente $1,06M_{\odot}$, após o desacoplamento da camada 2. Notemos que o processo de transferência de massa da camada 2 para a camada 1, ocorre durante um intervalo de tempo curtíssimo, em torno do instante em que se dá o *bounce*. Esse fluxo intenso de material da camada 2 para a camada 1, através da interface de raio R_1 , está associado precisamente à formação da onda de choque durante o *bounce*. Este ponto será discutido mais adiante.

Um outro resultado interessante de ser visto está mostrado na Fig. 6.5, onde representamos separadamente a evolução das energias totais de cada camada em relação ao tempo. Podemos ver que, após o *bounce*, a camada 1 transfere uma grande quantidade de energia para a camada 2, da ordem de 30 foe (*). As oscilações presentes em ambas as curvas indicam que os dois subsistemas ainda interagem entre si após o *bounce*, e refletem as oscilações harmônicas da camada 1. Na Fig. 6.6 mostramos em detalhe o processo de transferência de energia para o mesmo evento.

Com base nos dois últimos resultados apresentados acima, podemos dizer que a natureza global do processo de explosão de uma supernova é bem descrita pelo nosso formalismo, e que esse processo consiste basicamente em um desmembramento do caroço inicial em dois subsistemas, ou seja, uma camada interna (a proto-estrela de nêutrons) ligada gravitacionalmente, e uma camada externa ejetada, mais rarefeita. Para que isto

(*) 1 foe = 10^{51} erg.

ocorra, é necessário que a camada externa transfira massa suficiente para a camada interna, e que esta transfira uma grande quantidade de energia para a camada externa.

6.2 Formação de Onda de Choque

Passamos a discutir agora o processo de formação da onda de choque. Na Fig. 6.7, por exemplo, está representada a evolução temporal da velocidade relativa das partículas da camada 1 localizadas em $r = R_1$ ($u_1 = v_1(R_1) - \dot{R}_1$), em unidades da velocidade do som da camada 1. Na figura estão indicados os instantes do *bounce* da camada 1 (t_1) e da ejeção da camada 2 (t_2). Observe que a velocidade da interface de separação R_1 é subsônica em relação ao meio material contido no interior da camada 1. Entretanto, podemos ver na Fig. 6.8, onde mostramos a velocidade relativa $u_2 = v_2(r = R_1) - \dot{R}_1$ em função do tempo, que a mesma interface se propaga sobre a camada 2 com velocidade supersônica. Isto significa que a própria interface R_1 constitui-se na frente da onda de choque, refletindo o fato de que o *bounce* ocorre quando o material no interior da camada 1 e, portanto, atrás da interface R_1 , está no regime supranuclear, com densidade várias ordens de grandeza maior do que a densidade do material localizado à frente da interface de separação.

Na Fig. 6.9, mostramos o comportamento das mesmas grandezas discutidas acima para um caroço de $1,075M_\odot$, e que corresponde a um evento não explosão, já apresentado anteriormente. Observe que, neste caso, a velocidade relativa da interface em relação aos dois meios é sempre subsônica, ou seja, não há formação de onda de choque.

Podemos ter uma idéia da propagação da onda de choque através da camada 2, analisando-se o gráfico dos campos de velocidade das duas camadas para instantes de tempo sucessivos e próximos ao instante em que ocorre o *bounce*. Assim, mostramos na Fig. 6.10 o comportamento do campo de velocidades ao longo do caroço, em função da posição r , para dez (10) instantes de tempo sucessivos: dois (t_1 e t_2), imediatamente anteriores ao *bounce*, e sete ($t_4 \cdots t_{10}$) após o *bounce*. Observe como, logo após o *bounce*,

a descontinuidade R_1 se propaga (supersonicamente) sobre o material da camada 2, enquanto esta continua em colapso. A curva correspondente ao instante t_{10} mostra o instante da inversão do raio R_2 .

Devemos lembrar, contudo, a discussão que fizemos no início do capítulo anterior. Trata-se do fato de que uma onda de choque real se caracteriza também por uma descontinuidade elevada do campo de velocidade através da descontinuidade R_1 , isto é, quando se passa de um lado para outro da interface, ou da frente da onda de choque.

De fato, mostramos que isto só é possível, no contexto da aproximação de camadas homogêneas proposto neste trabalho, fazendo-se com que a massa de cada camada seja uma variável dinâmica, isto é, permitindo-se que a massa de uma camada possa fluir através da interface. Já vimos na Fig. 6.4 que a transferência de massa da camada 2 para a camada 1 ocorre realmente durante o *bounce*, ou seja, no momento da formação da onda de choque. Alternativamente, mostramos na Fig. 6.13 a evolução temporal de \dot{m}_1 . Se o leitor quiser, pode voltar à seção 5.2 e verificar que o gradiente de velocidade através da interface R_1 é diretamente proporcional a \dot{m}_1 . Observe na figura que o pico na taxa de transferência de massa para a camada 1 se dá justamente durante o primeiro *bounce* do caroço central, e que ela cai depois rapidamente a zero, assim que a camada 2 se desacopla da camada 1, caracterizando, portanto, uma onda de choque.

6.3 Consequências do Confinamento de Neutrinos

Vamos apresentar agora as principais consequências do confinamento dos neutrinos sobre a dinâmica do colapso e sobre a formação da onda de choque.

Mostramos na Fig.6.11 a variação da massa da camada 1 ao longo do tempo, para duas situações distintas: a curva cheia representa a evolução de m_1 usando-se a equação de estado com neutrinos confinados, enquanto que a curva tracejada representa os resultados para o caso oposto, onde os neutrinos estão ausentes. Podemos ver que,

até o instante do *bounce*, as duas curvas coincidem, mas separam-se nitidamente no final do processo, quando a camada 2 já se desacoplou da camada 1. Observe que a massa final da camada 1 é aproximadamente 10% maior quando o confinamento dos neutrinos é levado em conta, o que corresponde aproximadamente a $0,1M_{\odot}$. De fato, quando os neutrinos estão confinados, temos no final do processo uma estrela de nêutrons com uma massa maior. Por outro lado, o confinamento leva a que a onda de choque tenha que atravessar uma quantidade menor de material, isto é, o material contido na camada 2. Portanto, se processos dissipativos forem levados em conta, como, por exemplo, a quebra de núcleos desse material, a onda de choque final terá aproximadamente ≈ 2 fo e a mais de energia já que, como mencionamos na Introdução, segundo algumas estimativas [1] a onda de choque dissipa esta mesma quantidade de energia para cada $\approx 0,1M_{\odot}$ de material atravessado por ela. Assim, o confinamento dos neutrinos favorece ainda mais a transferência de massa e a possibilidade de explosão, ainda que processos dissipativos sejam adequadamente levados em conta.

A Fig. 6.12 representa a evolução temporal da energia total da camada 2 para as duas situações opostas descritas acima. Podemos ver que, se os neutrinos estão ausentes do sistema, a energia final da camada 2 é maior, refletindo simplesmente o fato de que, neste caso, a camada tem uma massa final também maior, como verificamos na figura anterior.

A influência do confinamento dos neutrinos sobre a formação da onda de choque pode ser vista também na Fig. 6.13, onde mostramos a evolução temporal da taxa de transferência de massa (\dot{m}_1) para os dois casos. A equação de estado com neutrinos confinados oferece um pico maior para \dot{m}_1 (o *bounce* ocorre em instantes ligeiramente diferentes, para ambos os casos), significando que, neste caso, a onda de choque nascente é mais intensa.

A Fig. 6.14 mostra as massas finais obtidas para a camada 1, após o desacoplamento da camada 2, para várias configurações iniciais, onde a dinâmica do colapso e da explosão foi realizada para vários corozos, variando-se apenas as suas massas totais. Vemos se

afirmar novamente a tendência geral do confinamento de neutrinos permitir sempre uma massa final para a camada 1 maior do que quando os neutrinos estão ausentes.

Finalmente, mostramos na Fig. 6.15 a intensidade da onda de choque nascente, isto é, a potência da onda de choque emergente por unidade de área, calculada no instante do *bounce* para várias configurações iniciais, com massas totais diferentes, e usando as duas equações de estado. Aqui se manifesta claramente uma forte e dramática influência do confinamento dos neutrinos sobre o processo de explosão: com o confinamento, a onda de choque gerada durante o *bounce* se apresenta muito mais intensa.

6.4 Conclusões

Assumindo-se uma configuração de pré-supernova simples, apresentamos um formalismo lagrangeano efetivo para a descrição da dinâmica do colapso gravitacional, a duas camadas.

Este trabalho mostrou, em primeiro lugar, que efeitos puramente mecânicos são energeticamente capazes de causar a inversão do colapso, gerando uma intensa onda de choque na superfície do caroço homólogo. Estabelece, também, um modelo simples para o cálculo da intensidade da onda de choque gerada pelo *bounce* do caroço homólogo.

O formalismo lagrangeano efetivo apresentado aqui, para apenas duas camadas homogêneas, não obstante sua simplicidade básica, consegue reproduzir bem o que o fenômeno de explosão de supernova apresenta de mais global, isto é, o desmembramento da configuração inicial – um caroço degenerado de Fe – em dois subsistemas: um estrela de nêutrons e uma camada ejetada.

Este trabalho apresenta como contribuição original, por outro lado, a introdução das massas das camadas como variáveis dinâmicas efetivas do problema. A introdução dessas novas variáveis possibilita que se acompanhe a formação da onda de choque, e que se possa tratá-la como uma descontinuidade real, ou seja, como um fenômeno

não-linear. Mostrou-se que o processo de geração da onda de choque está intimamente ligado ao processo de transferência de massa entre as camadas.

Frisemos ainda que as equações de movimento obtidas com este formalismo foram resolvidas numericamente, sem a necessidade de introduzir-se parâmetros ou qualquer aproximação, com rigososa e explícita conservação da energia total do sistema.

Neste trabalho, propomos também uma equação de estado para o regime hadrônico de densidade, obtida a partir da QHD, onde os graus de liberdade fundamentais para a descrição da matéria de supernova são incorporados, com um acoplamento explícito entre os campos bariônicos e mesônicos, além do campo leptônico. Dada a relevância do confinamento dos neutrinos para o problema de supernovas, os neutrinos foram incorporados ao cálculo da equação de estado, visando a se investigar o efeito do confinamento de neutrinos sobre a dinâmica de supernova, usando a aproximação de temperatura zero.

Mostramos, com efeito, que o confinamento de neutrinos exerce uma influência dramática sobre o processo de formação da onda de choque, onde vimos que, com neutrinos confinados, a onda de choque gerada no *bounce* torna-se muito mais intensa, como consequência do fato de que a equação de estado com neutrinos confinados é mais **dura** do que aquela em que os neutrinos não estão presentes, como discutimos no Capítulo 4 . Portanto, existem efeitos causados pelo confinamento de neutrinos, como principalmente o apontado acima, que não podem ser negligenciados nos cálculos de colapso gravitacional e de explosão de supernova.

Salientemos, entretanto, que a aproximação de adiabaticidade e temperatura zero usada neste trabalho, válida para o período de colapso, onde os neutrinos estão confinados, deixa de ser razoável para o período posterior ao *bounce*. Após o *bounce*, torna-se fundamental incluir-se os processos dissipativos que acompanham a onda de choque, enquanto ela se propaga, como o transporte de neutrinos, a dissociação de núcleos, o forte aquecimento do material comprimido pela onda de choque e a consequente elevação da entropia do sistema, causada por estes processos. Neste sentido, a solução das equações

de movimento deixam de ser realistas nos instantes seguintes ao *bounce*.

Como perspectivas de prosseguimento a este trabalho, propomos estender o formalismo proposto aqui para um sistema com um número arbitrário de camadas homogêneas e massas variáveis, o que permitirá se realizar cálculos de colapso gravitacional sem a necessidade de se introduzir parâmetros arbitrários, como, por exemplo, a pseudo-viscosidade, como é feito usualmente nos cálculos hidrodinâmicos de colapso. Tal formalismo, o de várias camadas, está numa fase bastante adiantada [2], e resultados preliminares poderão ser obtidos em breve.

Um código numérico para várias camadas, aumentando o número de graus de liberdade efetivos do sistema, possibilitará uma simulação numérica adequada da propagação da onda de choque, e então introduzir-se novos ingredientes físicos, como, por exemplo, os mecanismos dissipativos mencionados anteriormente. Neste caso, será necessário trabalhar-se com uma equação de estado que apresente uma dependência também com a temperatura, além da densidade. Neste sentido, seria interessante estender-se os cálculos da equação de estado, proposta no presente trabalho, para um sistema com temperatura finita.

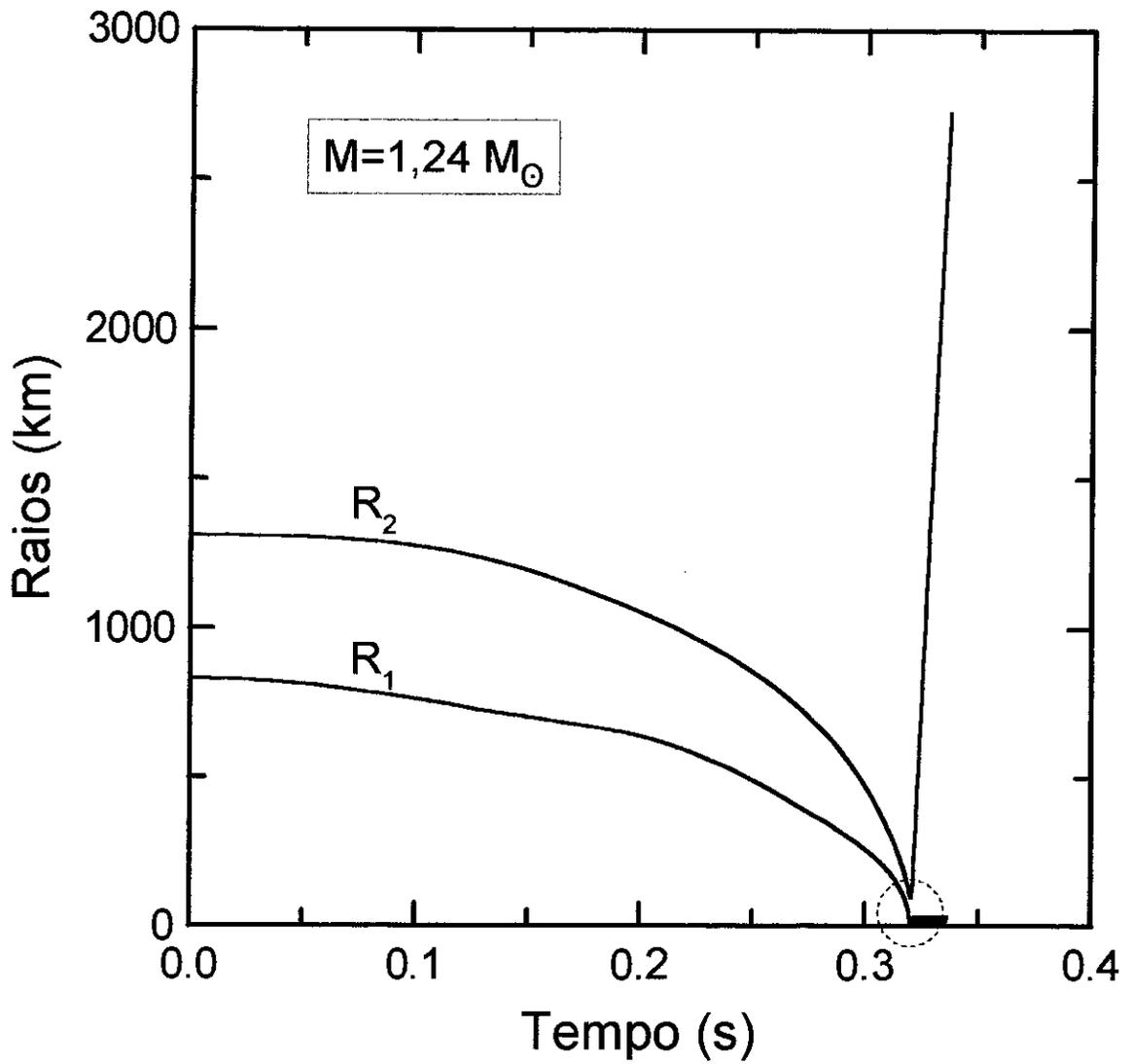


Fig. 6.1a – Evolução temporal dos raios das duas camadas para um núcleo com massa total igual a $1,24M_{\odot}$. Na simulação foi usada a equação de estado com neutrinos ausentes. O detalhe dentro do retângulo tracejado é mostrado na figura seguinte.

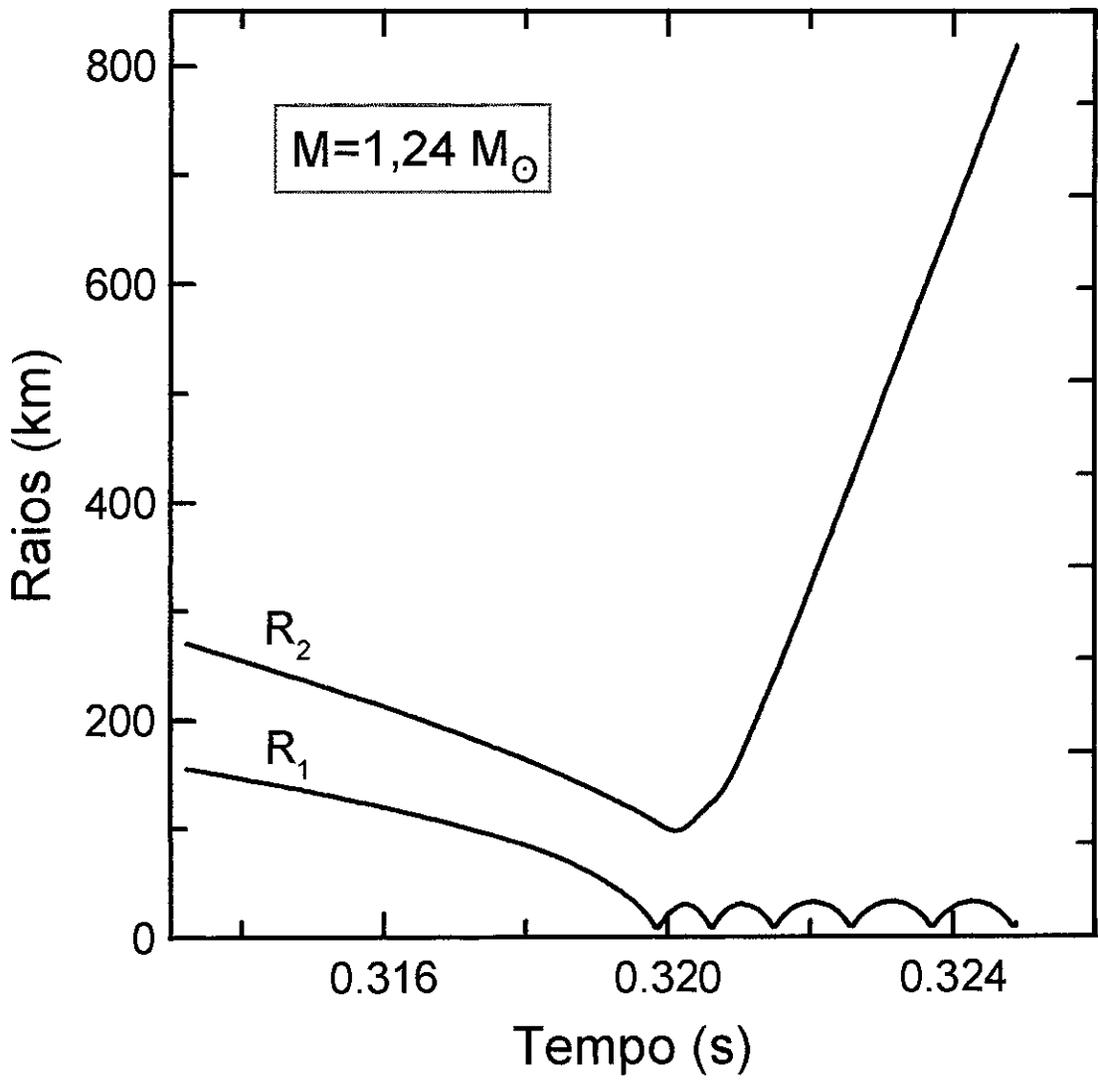


Fig. 6.1b – Detalhe da figura anterior, mostrando as oscilações do caroço homólogo remanescente.

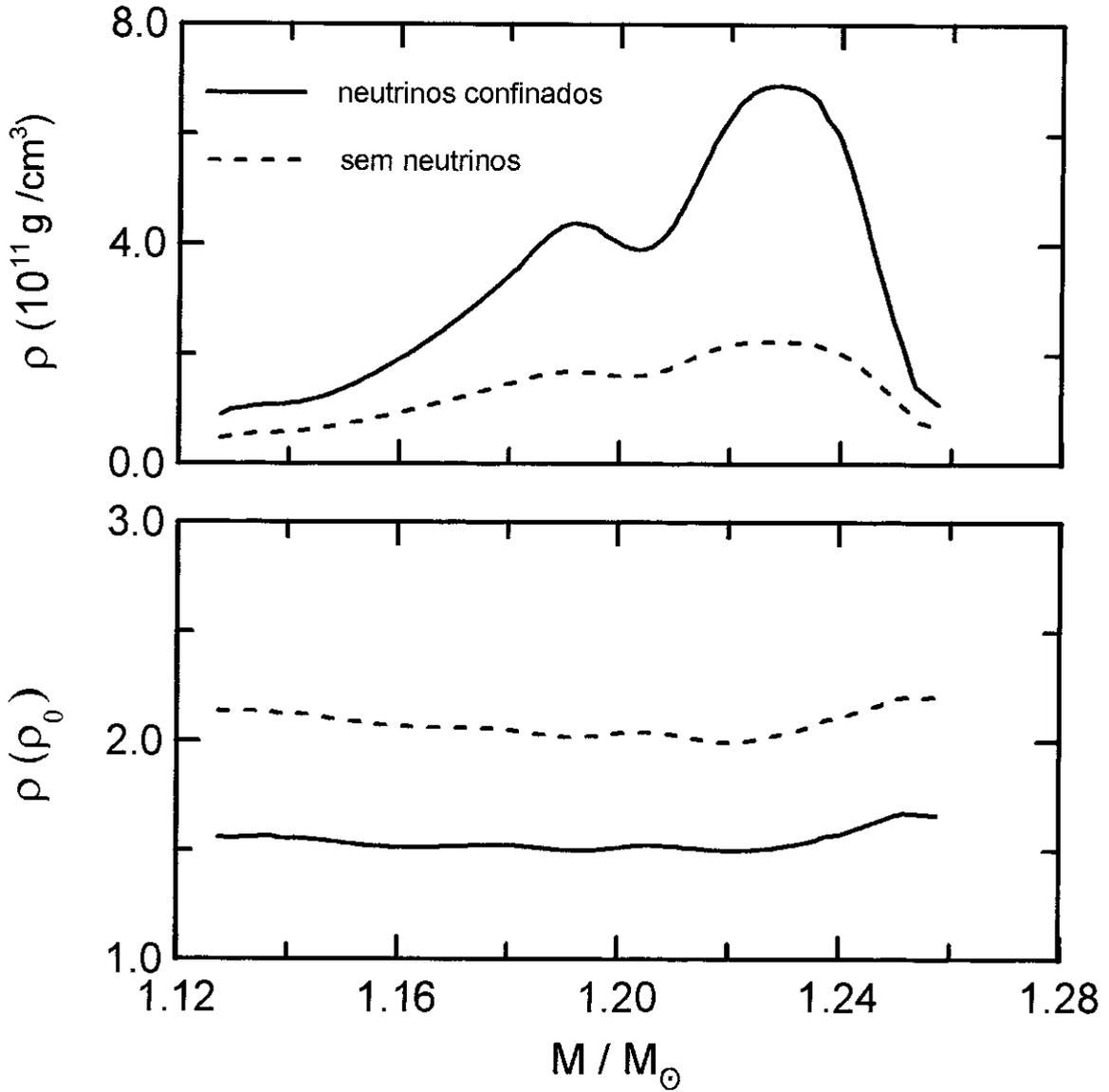


Fig. 6.2 – Valores de densidades alcançados pelas duas camadas durante o *bounce*. Para a camada 1, o *bounce* sempre ocorre no regime supranuclear, enquanto que, para a camada 2, ele ocorre sempre no regime subnuclear, com densidades várias ordens de grandeza menores que a camada 1.

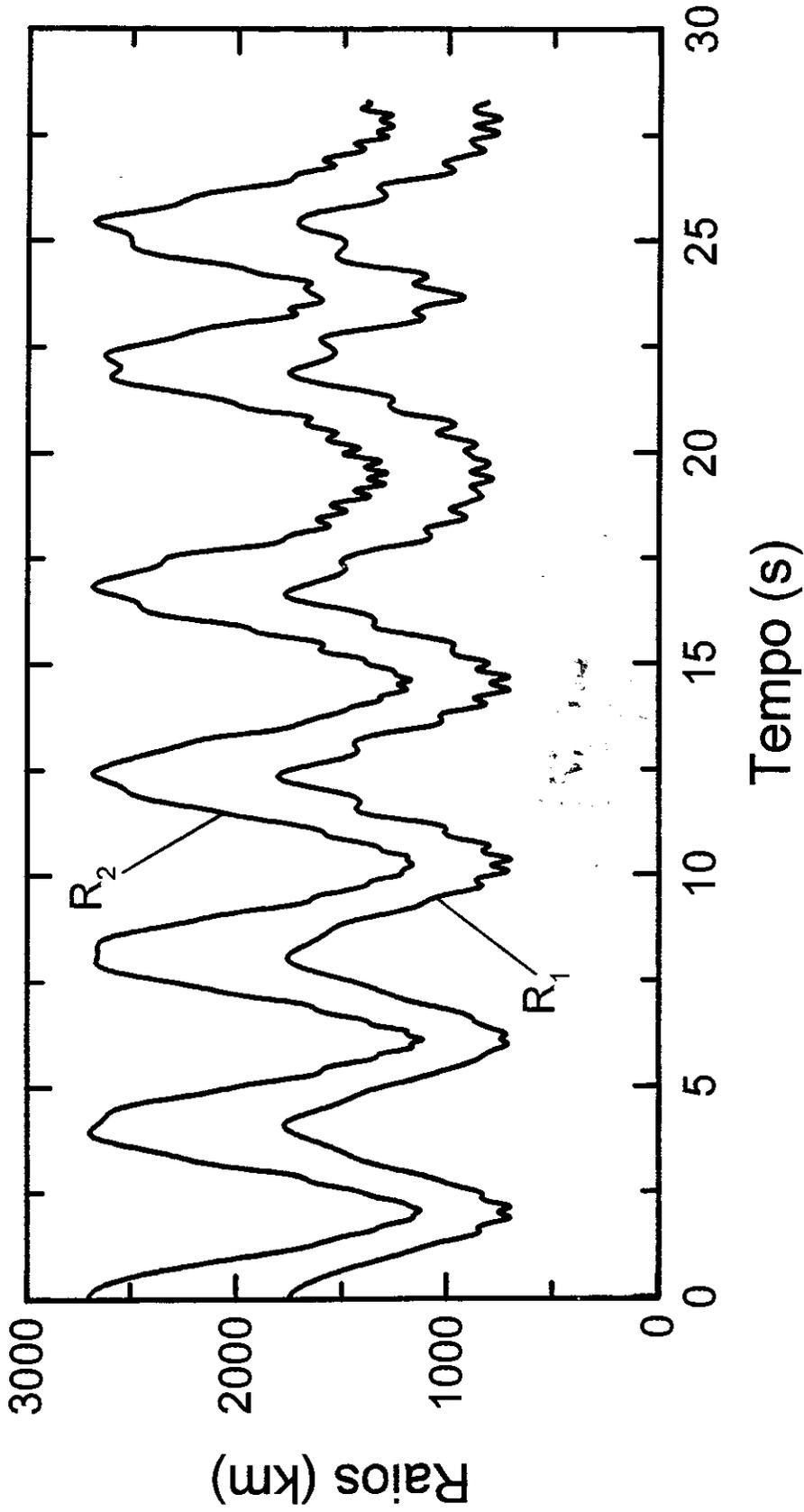


Fig. 6.3 - Evolução temporal dos raios para um carvão com massa total igual a $1,075 M_{\odot}$, caracterizando um evento não explosivo.

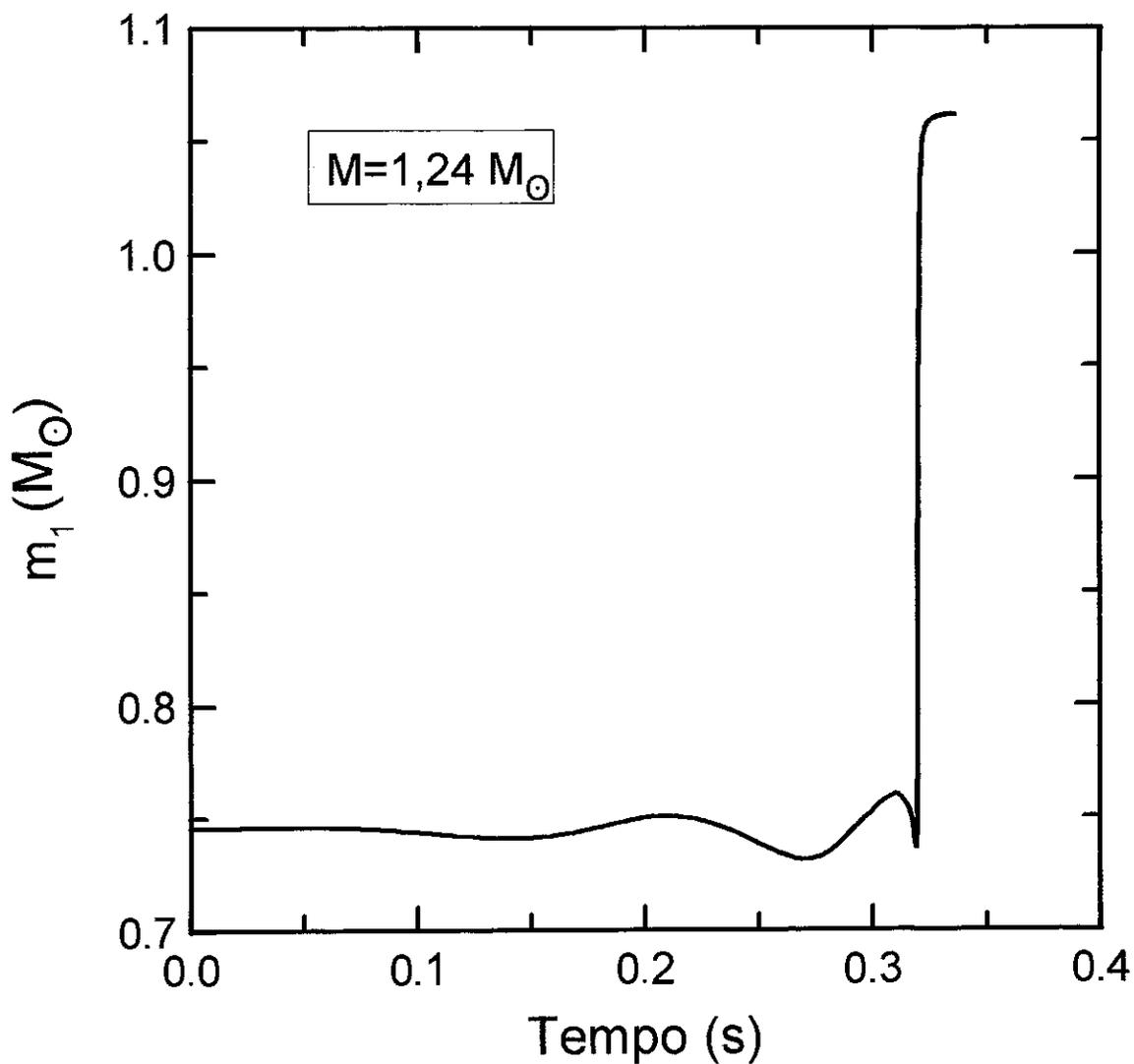


Fig. 6.4 – Evolução da massa da camada 1 (m_1), em unidades de massas solares, em função do tempo, obtida da dinâmica de um caroço com massa total de $1,24M_\odot$. A explosão se caracteriza, claramente, por uma sensível e explícita transferência de massa da camada 2 para a camada 1. Neste exemplo, usamos a equação de estado sem neutrinos. Observe que a transferência de massa ocorre durante o a formação da onda de choque formada no instante do *bounce*.

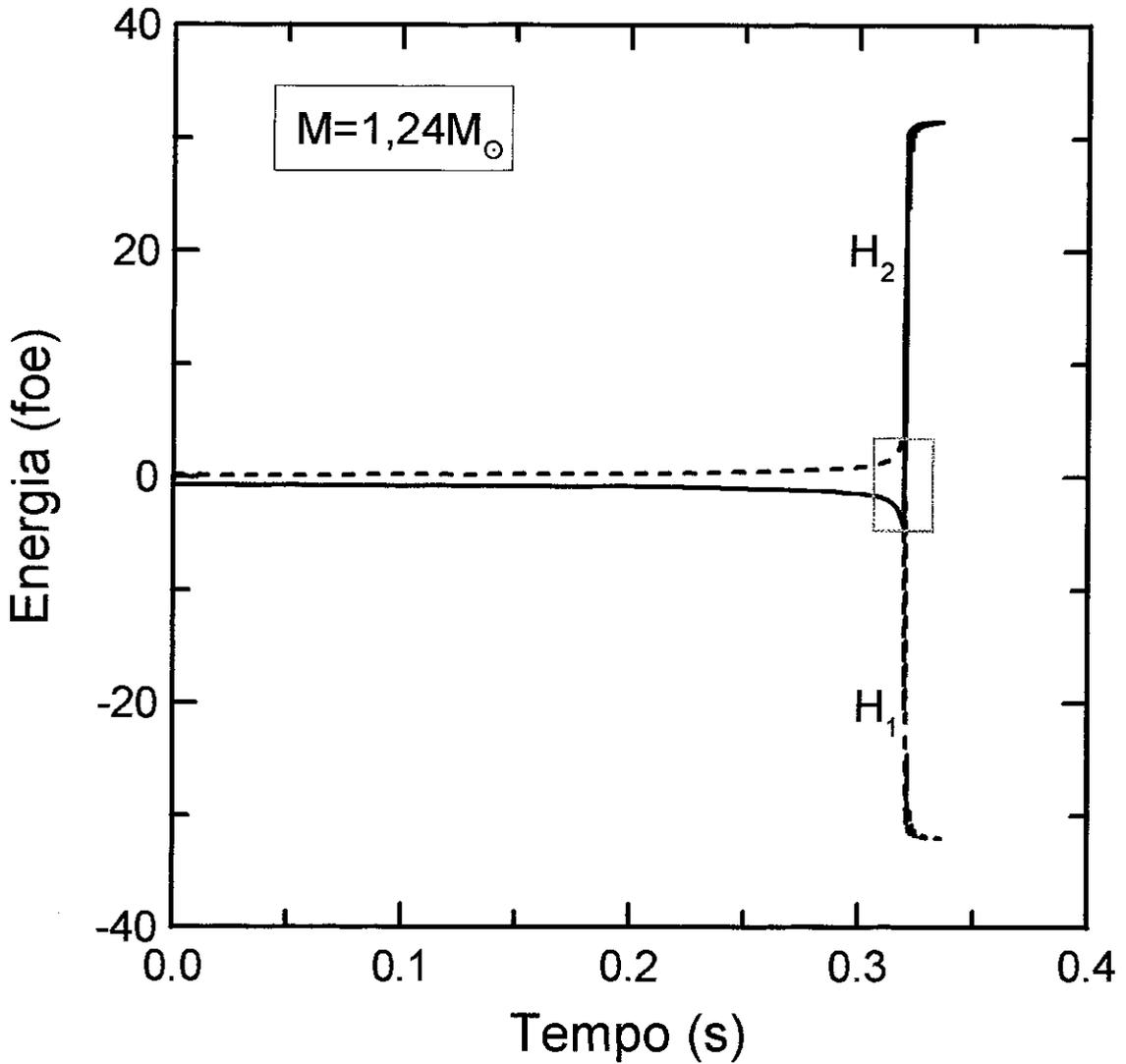


Fig. 6.5 – Transferência de energia da camada 1 para a camada 2. As duas curvas representam a evolução temporal das energias totais das duas camadas, em unidades de *foe* ($1 \text{foe} = 10^{51} \text{ g/cm}^3$): H_1 (curva tracejada) e H_2 (curva cheia). Após o desacoplamento da camada 2, resta um caroço denso com energia de ligação característica de uma estrela de nêutrons. O detalhe dentro do retângulo está mostrado na figura seguinte.

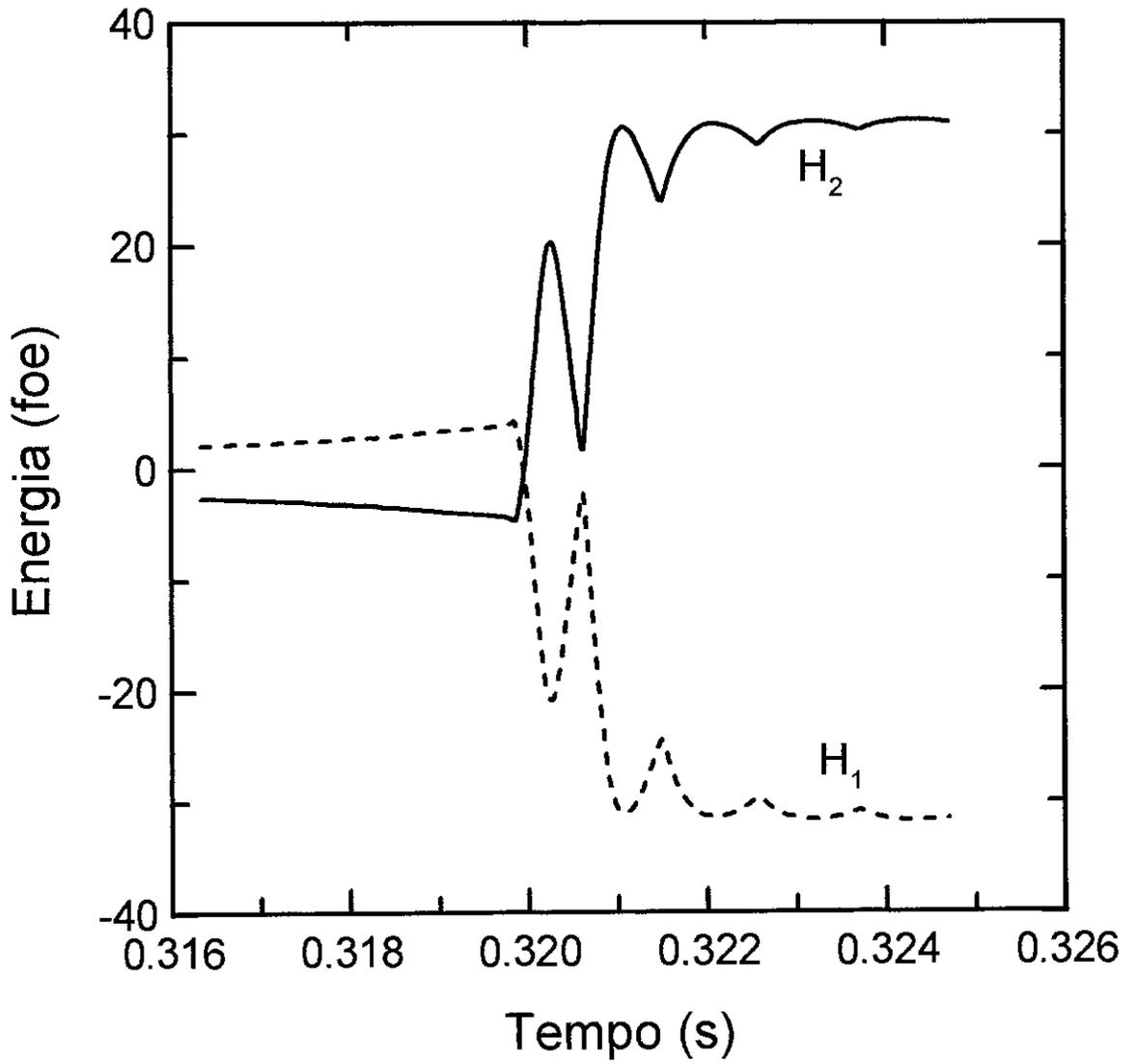


Fig. 6.6 – Detalhe da figura anterior. Note a mudança na escala do eixo dos tempos.

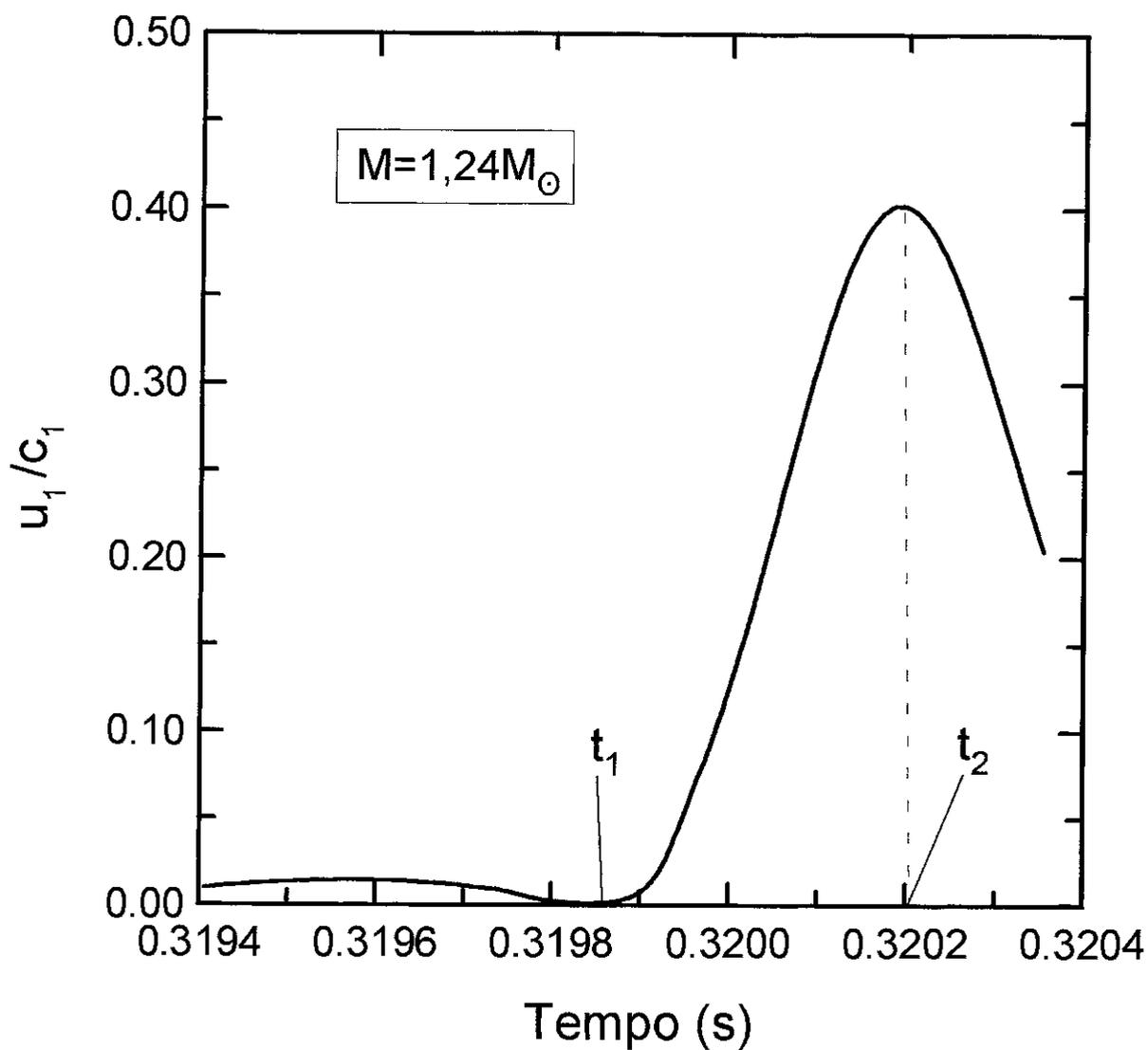


Fig. 6.7 – Velocidade da descontinuidade R_1 em relação a camada 1, em unidades da velocidade do som da mesma camada (c_1). Durante todo o processo ela é sempre subsônica. t_1 e t_2 indicam, respectivamente, os instantes do *bounced* caroço homogêneo e da inversão da camada 2. Neste caso, foi usada a equação de estado sem neutrinos.

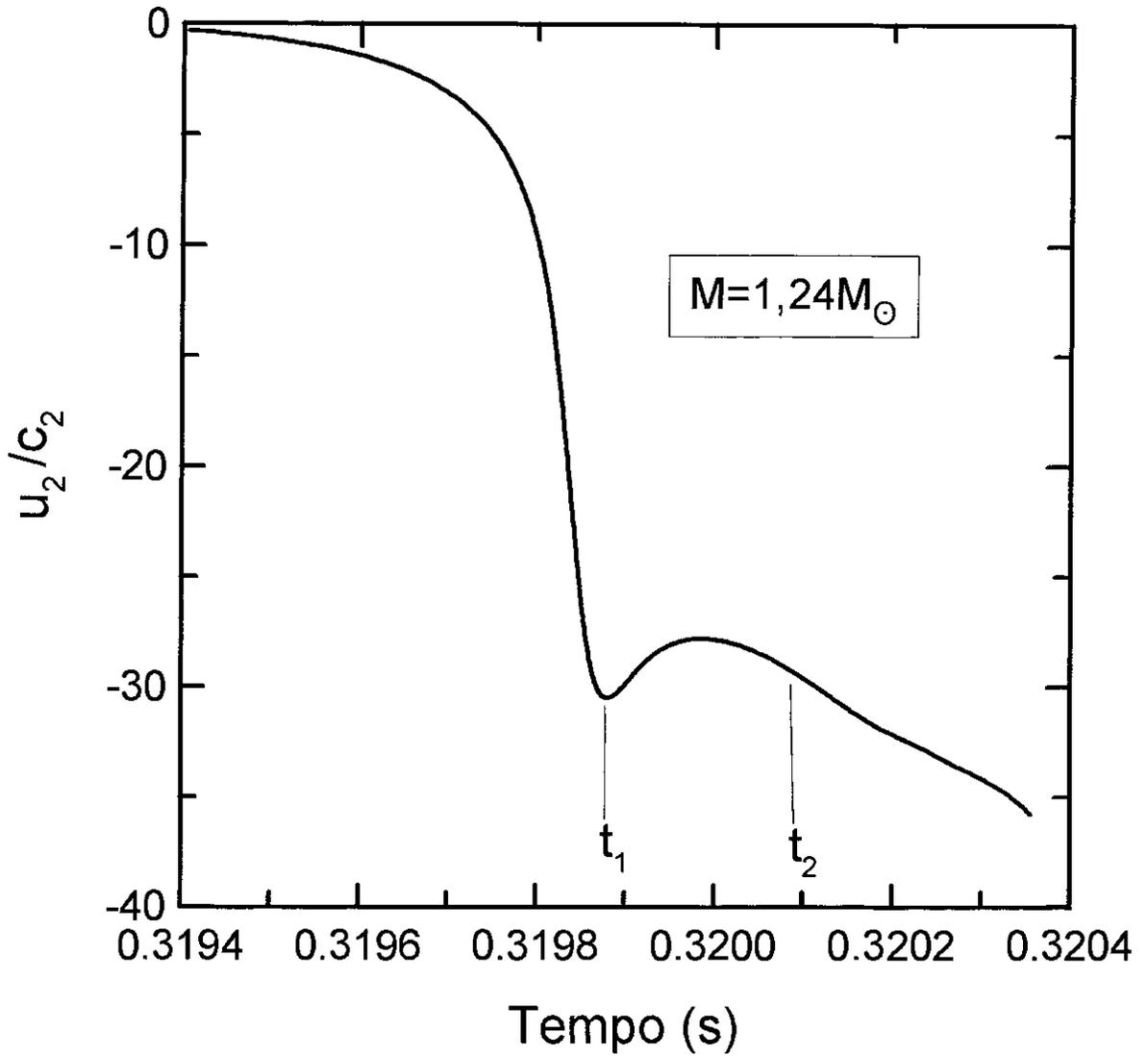


Fig. 6.8 – O mesmo que a figura anterior, relativamente a camada 2. Neste caso, vemos que a descontinuidade R_1 se propaga supersonicamente sobre a camada 2, caracterizando a onda de choque.

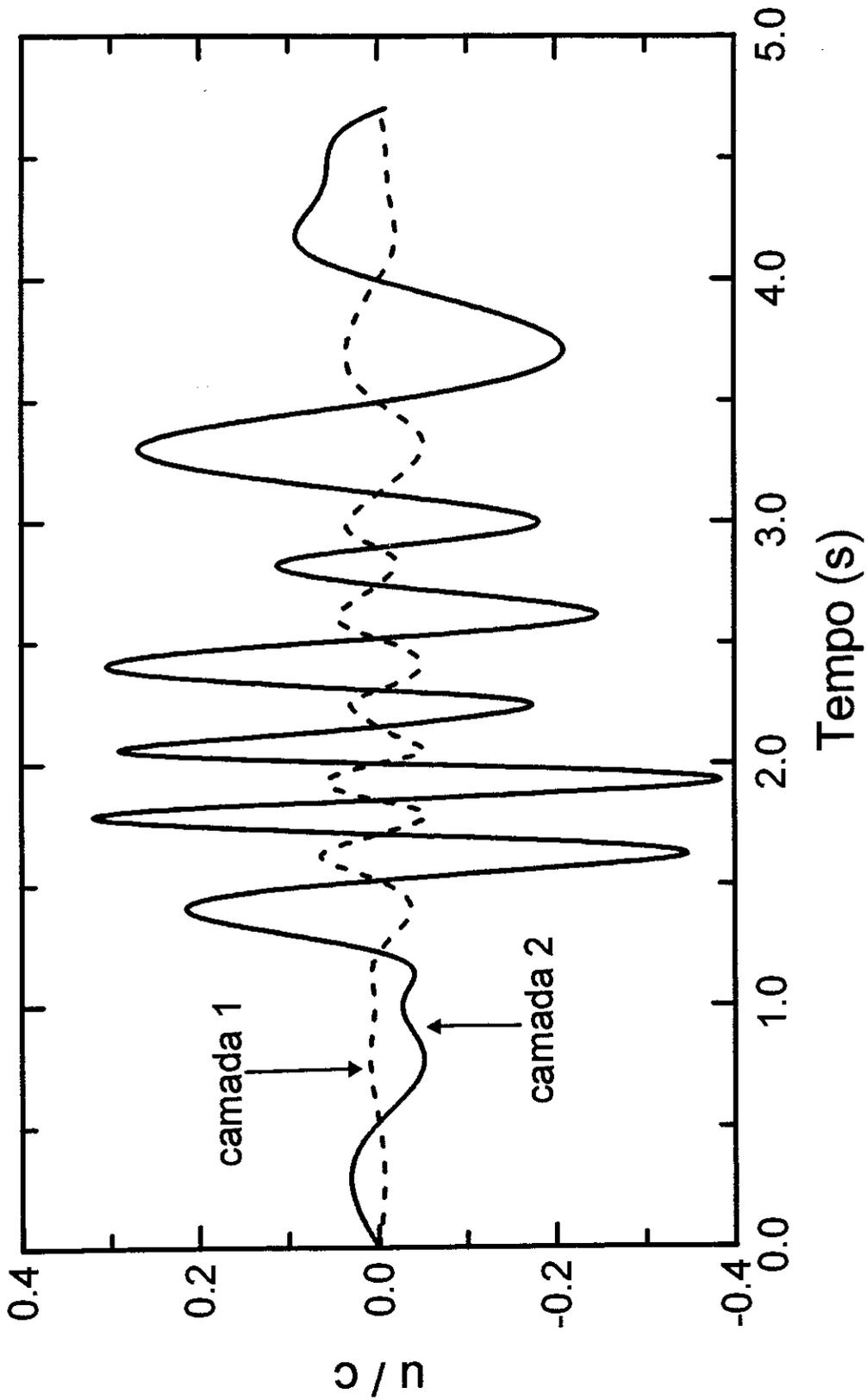


Fig. 6.9 - Velocidade relativa da descontinuidade R_1 em relação às duas camadas, em unidades das respectivas velocidades do som. A figura mostra que para um evento não explosivo, a velocidade da descontinuidade é sempre subsônica em relação às duas camadas, não caracterizando uma onda de choque.

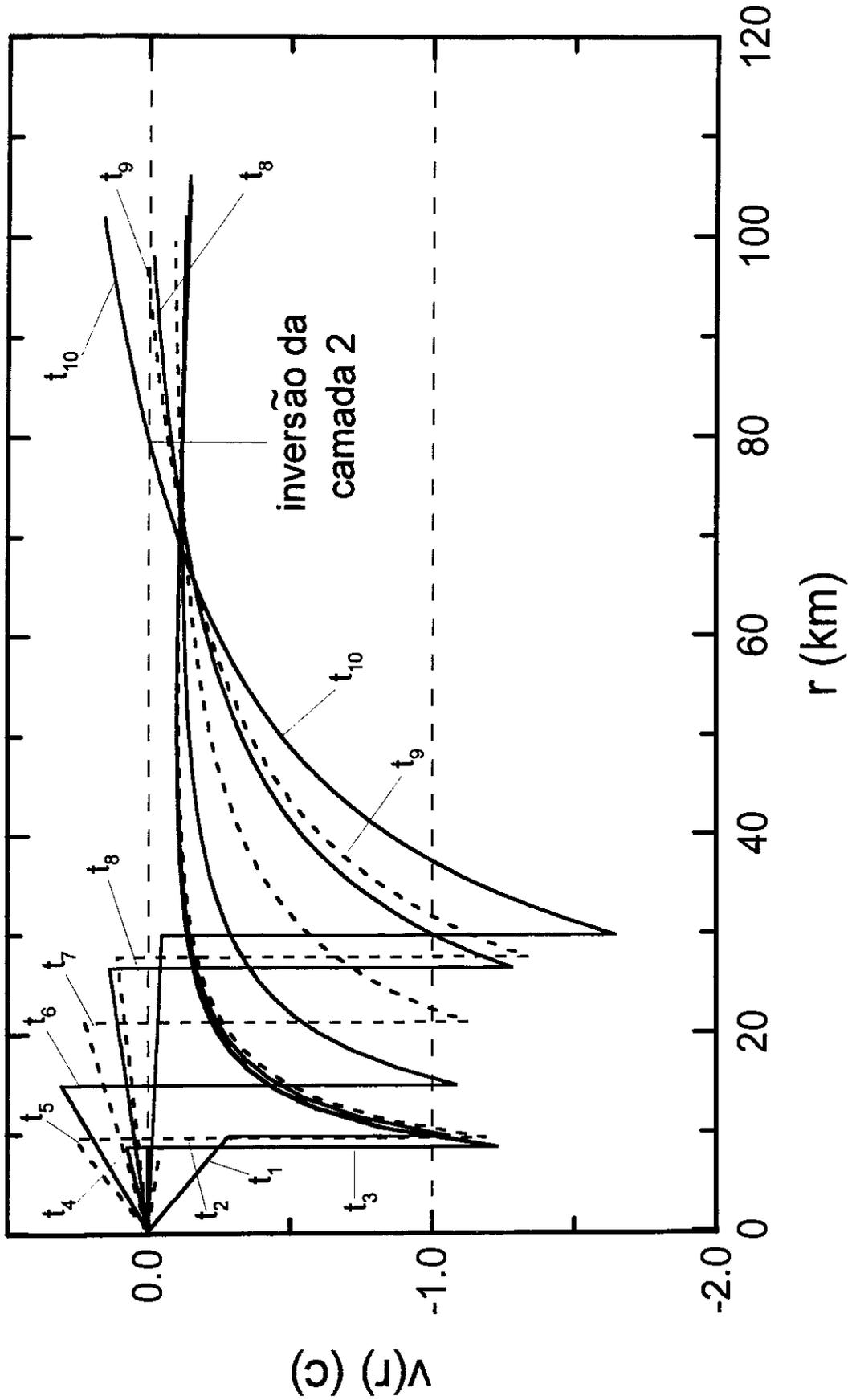


Fig. 6.10 - Campo de velocidade no interior do caroco para um evento explosivo para alguns instantes de tempo sucessivos, antes e depois do bounce, ilustrando a formação e propagação da onda de choque. As velocidades estão em unidades da velocidade da luz c , e os raios em quilômetros. Alternamos curvas cheias e tracejadas para facilitar a leitura do gráfico. Note que as partículas pertencentes à camada 2, próximas a descontinuidade, têm velocidades maiores que c , pelo fato do cálculo ser newtoniano e as camadas homogêneas.

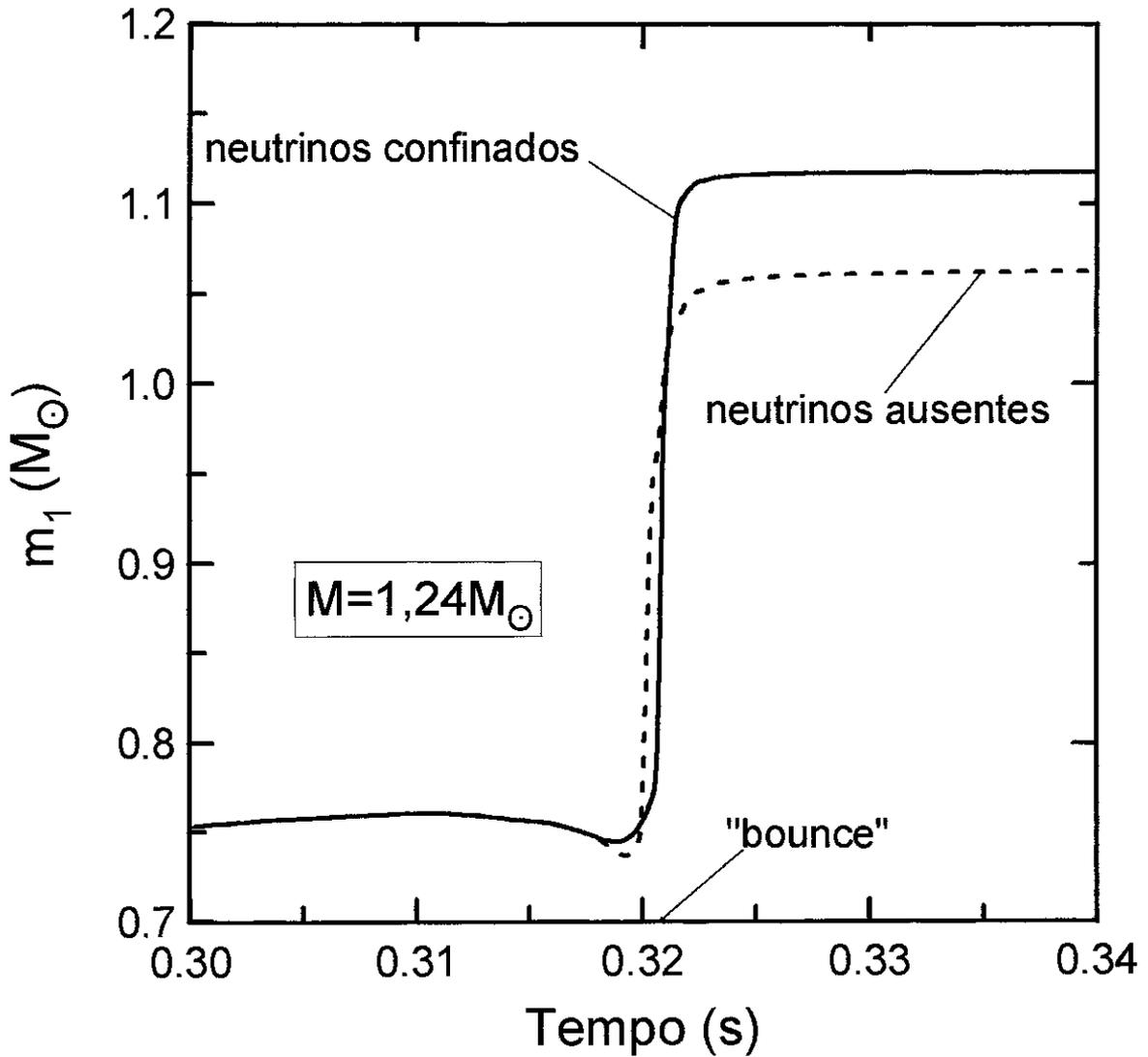


Fig. 6.11 – Efeito do confinamento dos neutrinos sobre o processo de transferência de massa entre as camadas, para o evento explosivo de um caroço com massa total de $1,24 M_\odot$. Observe que o confinamento dos neutrinos favorece francamente uma maior transferência de massa.

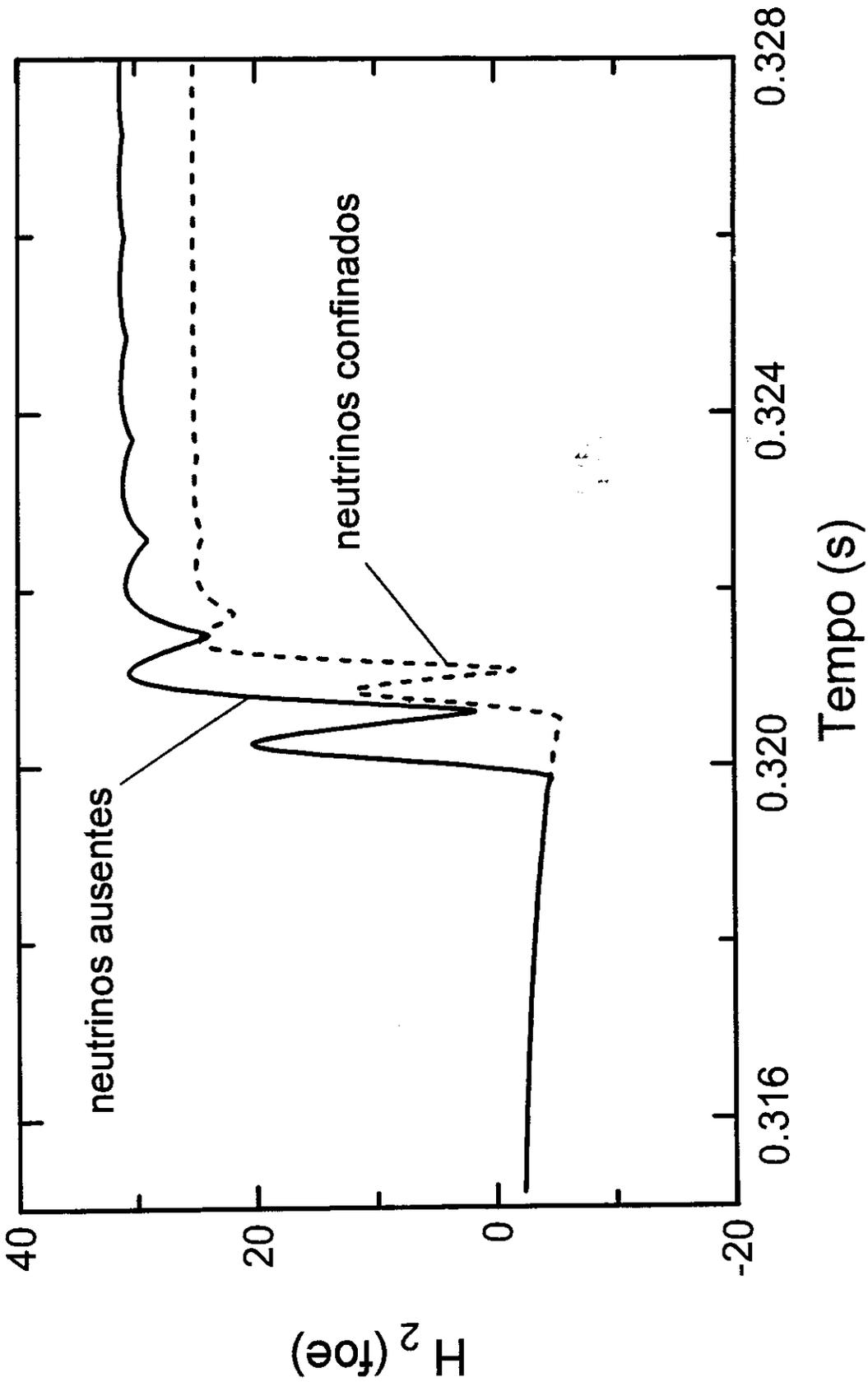


Fig. 6.12 - Consequência do confinamento dos neutrinos sobre a transferência de energia entre as duas camadas. As duas curvas representam a evolução da energia total da camada 2 em função do tempo, considerando-se os neutrinos confinados (curva tracejada) e ausentes do sistema (curva cheia).

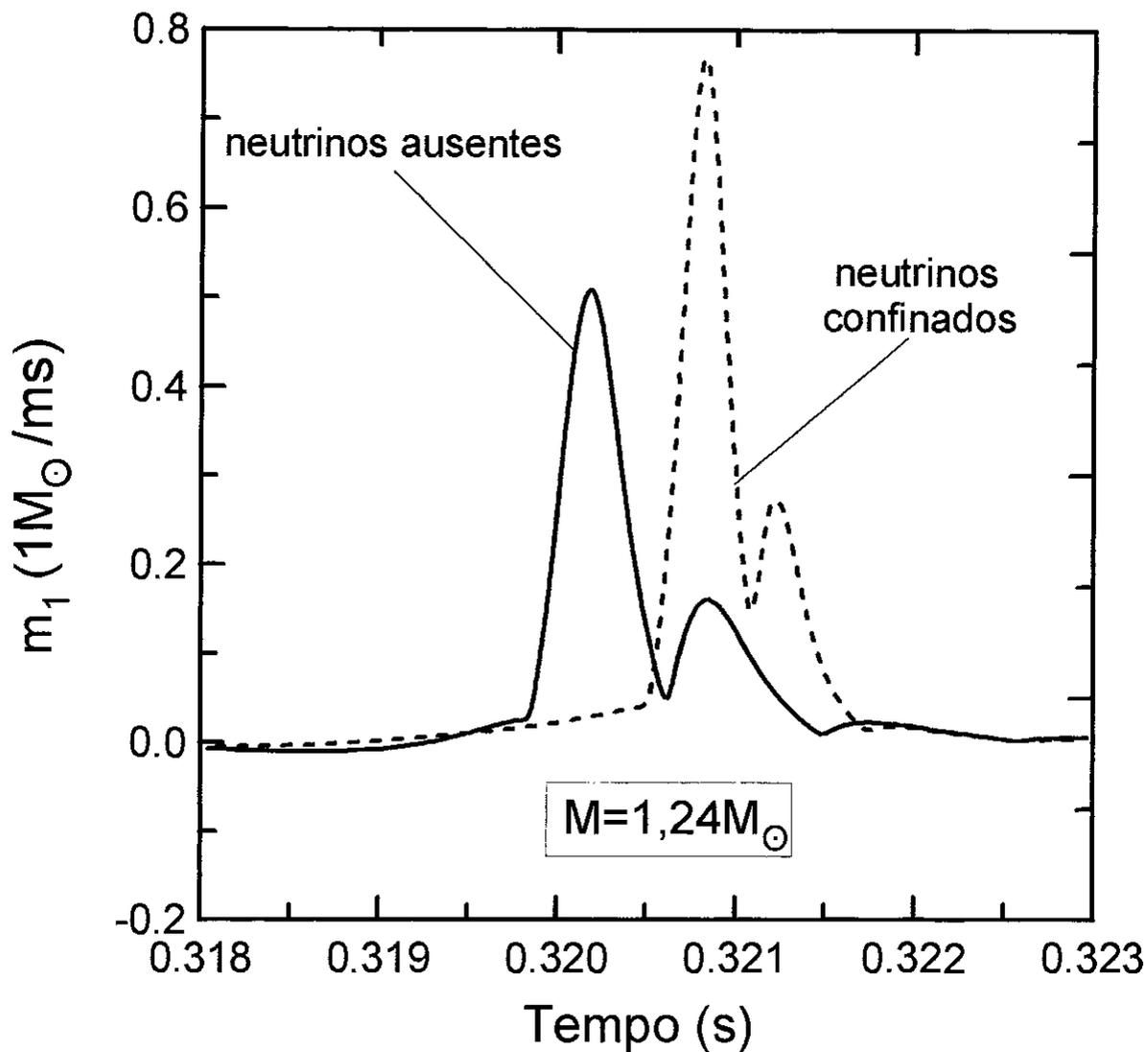


Fig. 6.13 – Efeito do confinamento dos neutrinos sobre a taxa de transferência de massa entre as camadas. As curvas mostram a evolução temporal de \dot{m}_1 para duas situações, isto é, em que os neutrinos estão confinados (curva tracejada) e não estão confinados (curva cheia).

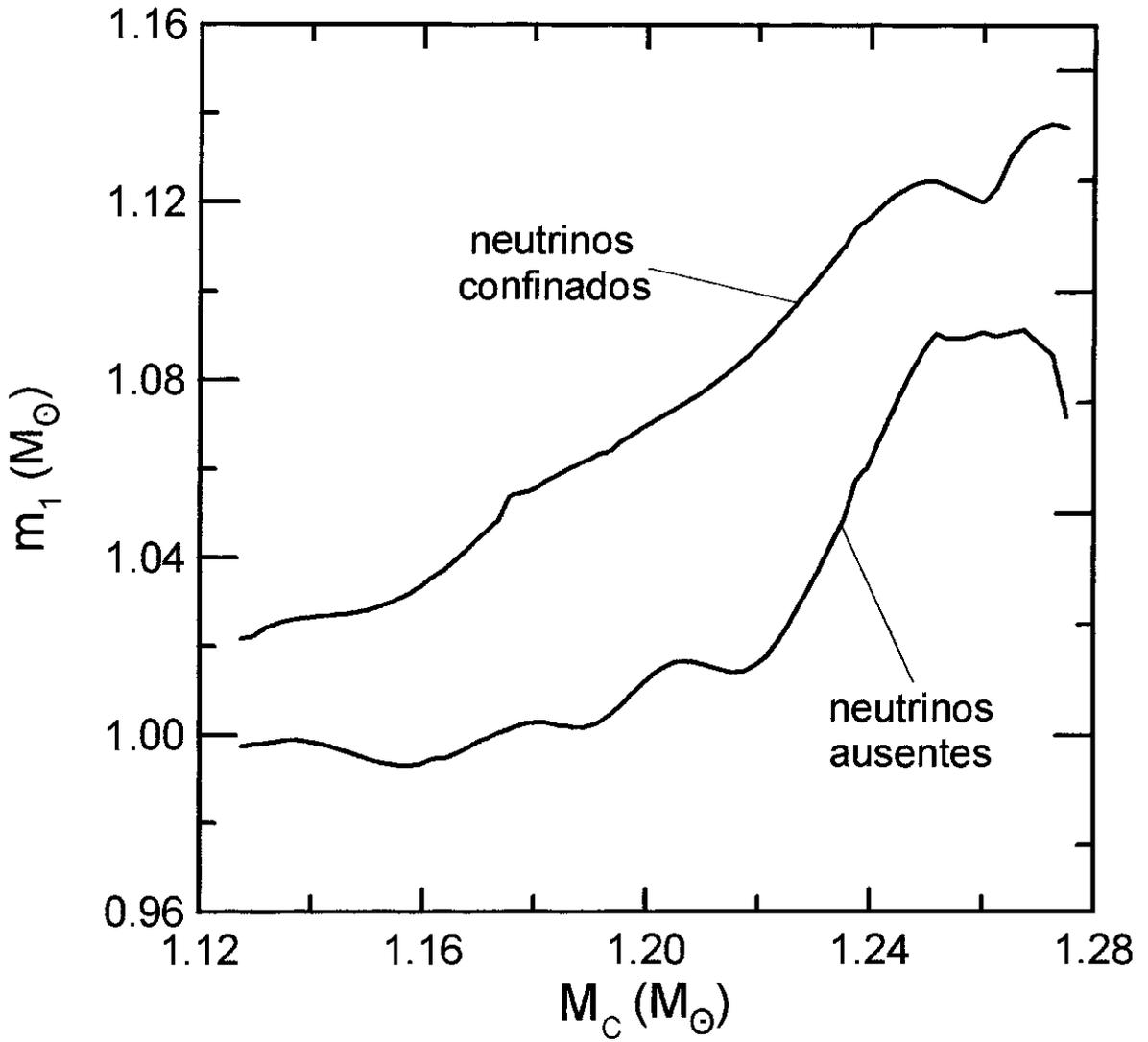


Fig. 6.14 – Massa final da camada 1, em unidades de massa solar, em função da massa total do caroço, também em unidades de massa solar.

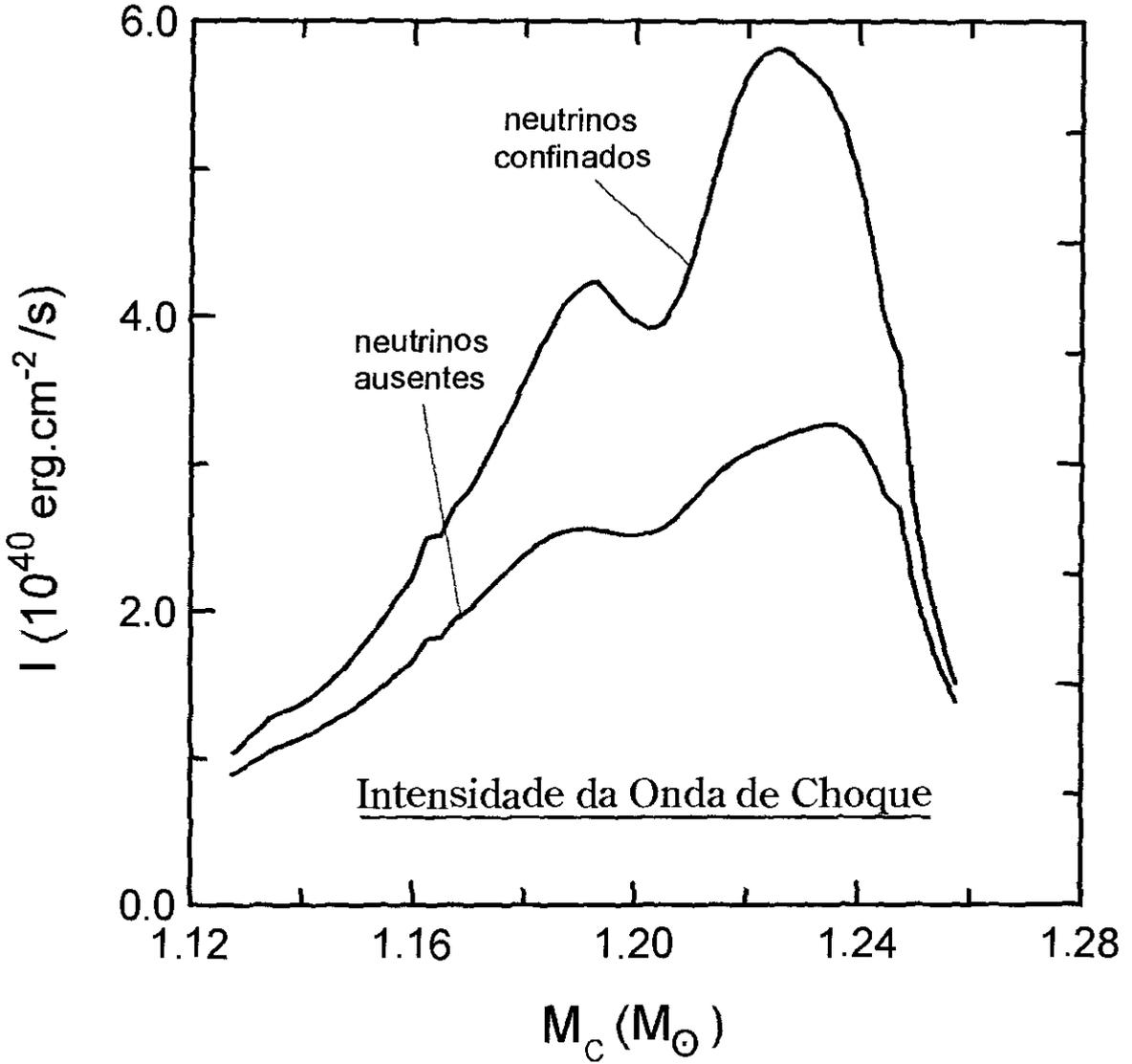


Fig. 6.15 – Intensidade da onda de choque no instante em que é gerada pelo *bouncedo* caroço homólogo, em função da massa total do caroço. Para todas as configurações, a onda de choque nascente é sempre mais intensa quando se inclui nos cálculos o confinamento dos neutrinos.

Referências

- [1] Brown, G., *Phys. Rep.* **163** (1988), 1.
- [2] d'Avila, V., *Tese de Doutorado* (1995), Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), a ser defendida.

Apêndice A

Notações e Convenções

Os quadrivetores contravariantes que aparecem no texto são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}x^\mu &= (t, \mathbf{x}), \\p^\mu &= (E, \mathbf{p}), \\ \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right),\end{aligned}\tag{A.1}$$

e os quadrivetores covariantes por

$$\begin{aligned}x_\mu &= (t, -\mathbf{x}), \\p_\mu &= (E, -\mathbf{p}), \\ \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right).\end{aligned}\tag{A.2}$$

Com essa norma, o tensor métrico é dado por

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\tag{A.3}$$

Se a e b são dois quadrivetores, então o produto escalar entre eles fica assim escrito:

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},\tag{A.4}$$

e, de forma análoga

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 . \quad (\text{A.5})$$

Os índices gregos, como μ, ν , etc., assumem valores de 0 a 3, enquanto que os índices latinos, como i, j , etc., assumem valores de 1 a 3.

As matrizes de Dirac satisfazem as seguintes regras de anticomutação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} . \quad (\text{A.6})$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= 1 , \\ (\gamma^0 \gamma^i)^2 &= 1 , \\ \{\gamma^0, \gamma^i\} &= 0 , \end{aligned}$$

e que

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma^0, -\hat{\gamma}) . \quad (\text{A.7})$$

A matriz γ_5 é definida por

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 . \quad (\text{A.8})$$

Os espiniores de Dirac satisfazem as relações

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m) u(k, \lambda) = 0 , \quad (\text{A.9})$$

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu + m) v(k, \lambda) = 0 , \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{u}(k, \lambda) (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) = 0 , \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{v}(k, \lambda) (i\gamma_\mu \partial^\mu + m) = 0 . \quad (\text{A.12})$$

e

$$u^\dagger(k, \lambda) u(k, \lambda') = v^\dagger(k, \lambda) v(k, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} , \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{u}(k, \lambda) u(k, \lambda') = \bar{v}(k, \lambda) v(k, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \frac{m}{(k^2 + m^2)^{1/2}} . \quad (\text{A.14})$$

“DESCRIÇÃO LAGRANGEANA DO COLAPSO GRAVITACIONAL E
CONFINAMENTO DE NEUTRINOS EM EXPLOÇÃO DE
SUPERNOVA”

HILÁRIO ANTÔNIO RODRIGUES GONÇALVES

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Sérgio José Barbosa Duarte - Presidente

Marcelo Chipparini - Coorientador

Jorge Ramiro de la Reza

Silvio Paolo Sorella

José Abdalla Helayël-Neto

Odilon Antônio Paula Tavares

Jorge Sílvio Helman - Suplente

Rio de Janeiro, 01 de setembro de 1995