

1995/04

D257 ex 2

TESE DE DOUTORADO

HIDRODINÂMICA DE ONDAS DE CHOQUE EM SUPERNOVAS

VICTOR DE AMORIM D'ÁVILA

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, 1995

TESE DE DOUTORADO

**HIDRODINÂMICA DE ONDAS DE CHOQUE EM SUPERNOVAS**

VICTOR DE AMORIM D'ÁVILA

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, 1995

Ao meu Pai,  
*perpetuado em*  
*seus filhos e netos.*

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Sérgio J. Barbosa Duarte pelo entusiasmo e segurança de sua orientação.

Ao Prof. Dr. Takeshi Kodama pela perspicácia com que soube identificar as dificuldades da Hidrodinâmica.

Ao Prof. Hilário A. R. Gonçalves pelas proveitosas discussões mantidas ao longo deste trabalho.

Aos Profs. Bruno Bazzanella e João Luis Kohl pela amizade e apoio.

À Mirian Coutinho pelo carinho e estímulo.

A toda minha família.

## ABSTRACT

A new approach for the Hydrodynamics is present in which the nonlinear effects and the possibility of discontinuities are included in its formulation.

We recognize, from the beginning, our restrictions in knowing and representing a continuum physical system by means of a finite number of variables.

A set of hydrodynamical equations is deduced exclusively from Hamilton's Principle, applied in a way that allowed the mass of each element of integration was considered, in the minimization of the Action, as a Lagrangean variable in the same conditions as the others hydrodynamic variables.

The method was applied to the problem of supernova explosions when a parameterized equation of state was used to describe the transition from the electron gas to neutronized matter.

The results show that the method is able to describe the stages corresponding to the homologous collapse, bounce, shock wave formation, and explosion of the star. The parameters of the model are the mass of the iron nucleus of the star and two constants of the equation of state. No fictitious term is used to handle with the problem of shock wave formation.

In a natural way, the envelope ejection and formation of a central neutron star were obtained. The calculated values for several quantities, like mass of the remnant star, kinetic energy of the explosion, and ejected mass, are in good agreement with the observational results.

## RESUMO

Apresentamos um novo enfoque para a Hidrodinâmica no qual os efeitos não-lineares e a possibilidade de descontinuidades estão incluídos na teoria a partir de sua formulação.

Nessa abordagem identificamos, desde o início, nossas limitações em conhecer e representar um sistema físico contínuo por um número finito de variáveis.

Deduzimos um conjunto de equações para a hidrodinâmica, baseados exclusivamente no Princípio de Hamilton aplicado de forma a permitir que, na minimização da Ação, as massas de cada elemento de integração sejam tomadas como variáveis lagrangianas, em igualdade de condições com as demais variáveis hidrodinâmicas.

Aplicamos o método ao problema da explosão de supernovas, onde utilizamos uma equação de estado parametrizada para descrever a transição de gás de elétrons para matéria neutronizada.

Os resultados mostram que o método permite descrever as etapas correspondentes ao colapso homólogo, inversão, formação da onda de choque e explosão da estrela. Os parâmetros do modelo são a massa do núcleo de ferro da estrela e duas constantes da equação de estado. Não é utilizado nenhum termo fictício para tratar o problema da formação da onda de choque.

Resulta de forma natural a ejeção de um envelope e a formação de uma estrela de neutrons central. Os valores obtidos para vários parâmetros como a massa da estrela remanescente, energia cinética da explosão e massa ejetada, estão em bom acordo com os resultados observacionais.

## ÍNDICE

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II – HIDRODINÂMICA .....	12
O Problema de Riemann.....	13
Pseudo-viscosidade de VonNeumann.....	35
Método de Godunov.....	44
CAPÍTULO III – EXPLOÇÃO DE SUPERNOVAS .....	55
Introdução.....	56
A Pré-Supernova.....	65
Supernovas Tipo II.....	73
O Modelo de Lagrangiana Efetiva.....	78
CAPÍTULO IV – A HIDRODINÂMICA DE POUCAS VARIÁVEIS .....	90
Hidrodinâmica de Poucas Variáveis.....	91
O Formalismo de Transferência de Massa.....	98
A Equação da Energia.....	114
CAPÍTULO V – RESULTADOS.....	118
Discussão.....	119
Conclusões Finais.....	140

## ÍNDICE DAS FIGURAS

2.1 - Sobreposição da onda de amplitude finita.....	21
2.2 - Onda de choque produzida por pistão.....	24
2.3 - Diagrama de Hugoniot-Rankine.....	27
2.4 - Estados acessíveis aos gases.....	30
2.5 - Diagrama $P, u$ .....	31
2.6 - Desmembramento de uma descontinuidade arbitrária.....	32
2.7 - Diagrama espaço - tempo do desmembramento.....	33
2.8 - Evolução hidrodinâmica sem pseudo-viscosidade.....	38
2.9 - Evolução hidrodinâmica com pseudo-viscosidade.....	40
2.10 - Aproximação de Godunov para o problema de Riemann.....	50
3.1 - Estrutura e composição química de uma pré-supernova.....	66
3.2 - Representação esquemática de uma pré-supernova.....	67
3.3 - Evolução dos raios como função do tempo.....	86
3.4 - O mesmo que a fig. 3.3, com $\alpha = 0.767$ .....	88
5.1a - Raios em função do tempo, hidrodinâmica convencional.....	120
5.1b - Ampliação da fig. 5.1.....	122
5.2a - Raios em função do tempo, poucas variáveis.....	124
5.2b - Ampliação da fig. 5.2a.....	125

5.2c - Inclusão das trajetórias das partículas na fig. 5.2b.....	126
5.2d - Descrição geral das trajetórias de partículas.....	127
5.2e - Massa interior a cada camada em função do tempo.....	128
5.3 - Energia cinética liberada em função da massa.....	129
5.4 - Evolução caótica de duas camadas com massa limite.....	130
5.5 - Dependência crítica das condições iniciais.....	131
5.6 - Limite inferior de massa e equação de estado.....	133
5.7 - Início do choque, Cooperstein e Baron (1990).....	135
5.8 - Início do choque, poucas variáveis.....	138

## ÍNDICE DAS TABELAS

III.1 - Características das supernovas tipo I e II.....	63
III.2 - Parâmetros das equações de estado.....	85

## CAPÍTULO I — INTRODUÇÃO

A integração numérica das equações da Navier-Stokes, na sua forma completa, tem permanecido como uma questão em aberto na Hidrodinâmica.

Isto se deve à não linearidade dessas equações, o que faz com que os fenômenos hidrodinâmicos se diferenciem em muito daqueles de outras áreas da Física, como a Eletrodinâmica de Maxwell ou a Acústica, onde os eventos são regidos por leis basicamente lineares.

Quando nos defrontamos com a não linearidade das equações, toda uma série de premissas, como o princípio da superposição das soluções, a reflexão espacial e eventualmente a inversão no tempo, não pode mais ser aplicada de forma imediata.

Além disso, fenômenos exclusivos de um ambiente regido por uma física não-linear passam a se manifestar e exercer um papel dominante na evolução do quadro dinâmico.

Na Acústica, pequenas perturbações, contínuas ou não, podem se propagar como tais, de forma praticamente indefinida, ou então ir aos poucos se dissipando. Na Hidrodinâmica não-linear, pelo contrário, pequenas perturbações iniciais, mesmo que infinitesimais, podem degenerar em violentas perturbações do meio num curto espaço de tempo.

Porém, o mais importante, é que tais perturbações, se deixadas por si, normalmente evoluem para formar descontinuidades. E essa é uma das mais relevantes características de uma física não-linear: enquanto que na Acústica e no Eletromagnetismo, por exemplo, a natureza se apresenta sempre como um contínuo, sendo que eventualmente são introduzidas descontinuidades como uma abstração aproximativa e conveniente; na Hidrodinâmica, pelo contrário, elas se manifestam espontaneamente e são reais. A bem da verdade, essas descontinuidades só se afastam de uma verdadeira descontinuidade matemática quando levamos em consideração a natureza atômica da matéria. Mas, quando tratamos um problema de mecânica dos fluidos, normalmente desprezamos este aspecto, e assim, pelo menos no contexto de uma física dos meios contínuos, a descontinuidade é completa.

Não é de estranhar, em vista dessas peculiaridades, que a integração numérica das equações de Navier-Stokes nos coloque frente a formidáveis dificuldades. Qualquer tentativa de integração dessas equações hidrodinâmicas, num ambiente em que o caráter não-linear esteja presente, redundará sempre em fracasso, pois no lugar de uma evolução física coerente, teremos como resultado um quadro totalmente inverossímil que, naturalmente, é consequência da completa desorganização de todo o cálculo. Isto independe do método particular de integração numérica que estejamos usando ou do grau de precisão mantida para cada variável.

Essa problemática está presente tanto na hidrodinâmica em várias dimensões como nas situações mais simples em que os fenômenos podem ser descritos em apenas uma coordenada. Devido à complexidade inerente, não dispomos, normalmente, de métodos universais para atacar todos os problemas multidimensionais, de modo que nossa atenção estará aqui concentrada na hidrodinâmica de uma variável.

Neste trabalho, procuramos apontar a causa básica dessas dificuldades e apresentamos um formalismo para o tratamento dos fenômenos hidrodinâmicos que se caracteriza por um novo enfoque para a descrição de um sistema físico. Dessa abordagem resulta um conjunto de equações para problemas hidrodinâmicos unidimensionais que podem ser integradas diretamente e sem quaisquer obstáculos. As características do método são tais que, como veremos, permitem antecipar a possibilidade de uma generalização para duas ou três dimensões.

Usualmente, do Princípio de Hamilton se deduz as equações de evolução das variáveis hidrodinâmicas que estão especificadas em uma malha pré-determinada de pontos. Esta malha pode estar fixa ao sistema de referência, como na abordagem de Euler; ou ser co-movente com o fluido, como na abordagem de Lagrange.

A pré-determinação de uma rede de pontos embute certas dificuldades relacionadas à capacidade de representação dos fenômenos físicos que irão se desenrolar com a evolução do quadro dinâmico.

Em primeiro lugar, a questão para a qual chamamos a atenção é a da quantidade de variáveis efetivamente necessária para a correta descrição de um problema físico. Devemos admitir que sempre dispomos de um número limitado de pontos para a representação da rede computacional.

As equações da hidrodinâmica, não só admitem a possibilidade de existência de descontinuidades, mas, mais do que isso, por sua própria natureza, reforçam quaisquer

perturbações até o ponto de, eventualmente, constituir descontinuidades. Conclui-se, então daí, que nenhum número de células de integração será suficiente para atender os requisitos de transição suave das variáveis entre um elemento e outro da rede.

Naturalmente, quanto mais detalhada for a informação sobre as condições reinantes num sistema, maior deverá ser o número de variáveis para a sua descrição e mais precisa será a representação. Contudo, também é verdade que, utilizar um número de pontos maior do que aquele necessário à descrição do sistema, representa um considerável desperdício de esforço.

Mesmo nas raras ocasiões em que se pode manter um número grande de variáveis para a realização de um determinado cálculo, ainda assim, surge a questão de saber se uma outra escolha para a distribuição dos pontos da rede não poderia ser mais eficiente. Esta é a segunda questão — a da qualidade da rede.

Com a especificação a priori das células de integração, não estamos exigindo uma maior densidade de pontos onde a dinâmica tem um peso maior, assim como, permitimos que muitos elementos da rede sejam desperdiçados numa região monótona e de pouca importância para a descrição e evolução do quadro físico.

Assim procedendo, por certo, não estamos tiramos o máximo proveito dessas variáveis, no sentido de se obter a melhor representação do fenômeno físico. Principalmente se considerarmos que dispomos de um número finito, e frequentemente muito limitado, de pontos para a materialização da rede.

É uma prática corrente, em muitas simulações, suspender um cálculo a fim de redesenhar a rede de forma a que esta se torne mais representativa nas regiões “de maior relevância dinâmica”.

As abordagens convencionais dos problemas hidrodinâmicos não têm se detido sobre essas questões. O grande número de variáveis normalmente utilizado para a descrição dos fenômenos hidrodinâmicos, particularmente aqueles em que comparecem ondas de choque, decorre, na realidade, de requisitos dos métodos numéricos de integração e não mantém, em absoluto, qualquer relação com o grau de conhecimento das condições reinantes no sistema físico, e nem tampouco com a real precisão com que se espera obter o resultado final.

Na verdade, o grande número de camadas é uma exigência introduzida quando da transformação das equações de Navier-Stokes em equações de diferenças finitas e é devida unicamente à necessidade de consistência numérica e estabilidade de suas soluções.

Usualmente, a integração numérica das equações diferenciais, realizada na forma de Euler ou na de Lagrange, exige que o cálculo se faça sobre uma rede que contém um grande número de pontos, ou camadas, distribuídos ao longo do sistema físico. Isto porque, conforme discutido mais acima, as equações de diferenças finitas só têm sentido como aproximação das equações hidrodinâmicas se pudermos admitir que as variáveis sofrem mudanças pequenas quando se passa de um ponto a outro da rede de integração. Além disso, de forma alguma tais variáveis podem apresentar descontinuidades.

Mesmo na situação mais simples, em que podemos admitir a continuidade das variáveis, ainda assim, somos obrigados a introduzir um número muito grande de pontos de rede a fim de atribuir significado às equações de diferenças finitas. Note-se que esse grande número de elementos de integração não mantém nenhuma relação com o nosso real conhecimento (ou necessidade de conhecimento) das condições reinantes.

O problema se torna mais difícil para aquelas situações em que podem surgir descontinuidades. No caso de estarmos estudando uma descontinuidade já formada e estável,

sempre é possível tratá-la como uma interface em torno da qual realizamos uma integração analítica das equações de Navier-Stokes, juntamente com as leis de conservação da energia e da massa, para então obter as condições de contorno (equações de Hugoniot-Rankine) válidas para aquela interface. A integração do problema se faz, então, de acordo com os métodos usuais para as duas regiões separadas pela interface, porém sujeitas àquelas condições de contorno. Frequentemente, no entanto, não se pode adotar a hipótese de estabilidade da descontinuidade devido à complexidade da dinâmica envolvida. Entretanto, ainda que se tenha que abandonar esta hipótese, sempre é possível tratar a evolução do fluido como um problema de Riemann para descontinuidades arbitrárias.

De qualquer forma, estes procedimentos não são absolutamente aplicáveis às situações práticas, muito comuns, em que as descontinuidades só vão se manifestar no decorrer da evolução do problema físico.

A dificuldade surge porque a própria transformação das equações hidrodinâmicas em equações de diferenças finitas impede que estas descontinuidades possam surgir durante o cálculo.

VonNeumann abordou esta difícil questão por meio da introdução de uma viscosidade artificial que transforma toda descontinuidade verdadeira em uma região de transição, com uma largura da ordem de alguns elementos da rede, e na qual as variáveis podem sofrer grandes mudanças, porém de forma sempre contínua. Sob certo aspecto, VonNeumann resolveu o problema das descontinuidades através da eliminação das próprias descontinuidades. À parte os discutíveis efeitos colaterais que possa provocar (v. Capítulo II), o fato é que a solução de VonNeumann mantém o requisito, para a sua implementação, de um número muito grande de elementos de integração.

Procuraremos aqui enfrentar a questão na forma como ela nos é oferecida pela natureza, reconhecendo que as descontinuidades, no contexto de uma física dos meios contínuos, são reais, e não aproximações convenientes. Antes de mais nada, devemos identificar, claramente, a origem da necessidade de um grande número de variáveis para a descrição dos fenômenos hidrodinâmicos.

Normalmente, parte-se do Princípio da Mínima Ação para se obter as equações diferenciais parciais que descrevem corretamente um sistema físico contínuo. Em seguida, seleciona-se uma das possíveis formas para as equações de diferenças finitas relacionadas àquelas equações diferenciais parciais. Note-se a arbitrariedade que neste último passo é introduzida, e cuja razão de ser não parece suficientemente justificável. Faz-se então a hipótese de que o número  $N$  de pontos da malha é suficientemente grande para que o conjunto das equações de diferenças finitas descreva, através de  $N$  incógnitas, uma evolução equivalente à das equações diferenciais originais.

Nosso objetivo aqui é encontrar um método para a representação dinâmica que já inclua em sua formulação as dificuldades citadas para a descrição do sistema físico e que elimine a hipótese usual (porém, difícil de ser cumprida) de que a rede contém um número suficientemente grande de pontos para permitir a correta transição das equações diferenciais parciais em equações de diferenças finitas.

Para tanto, estamos propondo neste trabalho, que o Princípio de Hamilton seja utilizado para determinação, não só das equações de evolução das variáveis, como também, das próprias equações de movimento dos pontos da rede em que as variáveis serão especificadas.

Dessa forma, iremos obter certas leis dinâmicas que determinarão os movimentos dos pontos da rede, e que atribuirão um significado definido à expressão “uma região dinamicamente importante”, utilizada mais acima.

Veremos que as posições dos pontos da rede serão tratados aqui simultaneamente e em igualdade de condições com as variáveis hidrodinâmicas convencionais do sistema ou, dito de outra forma, que as massas (ou densidades, ou outras variáveis dinâmicas) participarão do problema como coordenadas lagrangianas, permitindo uma abordagem nova para o tratamento dos problemas hidrodinâmicos.

Para a questão do número de pontos da rede, nosso enfoque consiste em estabelecer, antes de tudo, o verdadeiro grau de conhecimento da realidade física em questão. E isto é feito através da especificação do número  $N$  de variáveis, necessário e suficiente, à descrição do sistema e que deve retratar a quantidade de informação efetivamente disponível.

Da mesma forma que a hidrodinâmica abandona a descrição pormenorizada do movimento molecular em favor de uma visão macroscópica de um sistema físico, nós aqui, também, estamos propondo que se renuncie ao conhecimento dos detalhes da acústica de um problema, de maneira que se possa concentrar a atenção na dinâmica das ondas de choque, porque, estas sim, exercem um papel decisivo na evolução geral do sistema.

A partir dessas idéias escrevemos a Lagrangeana desse sistema discreto e, do Princípio da Mínima Ação obtivemos dois conjuntos de equações diferenciais ordinárias. Um para as variáveis dinâmicas e outro para as coordenadas dos pontos da rede.

Esses dois conjuntos de equações diferenciais ordinárias fornecem a evolução dinâmica do sistema físico descrito pelas  $N$  variáveis localizadas em  $N$  coordenadas e, vale notar, foram obtidas sem passar por qualquer processo arbitrário de discretização de equações diferenciais parciais.

Só então introduzimos a hipótese aproximativa de que nosso sistema discreto apresentará uma dinâmica tão próxima daquela de um sistema similar, porém contínuo,

quanto maior for  $N$ , ou seja, quanto maior for a nossa capacidade de detalhar o problema proposto.

O contexto onde se insere nossa proposta está explicitado no Capítulo II, onde apresentamos um estudo da mecânica dos fluidos — desde a análise das premissas básicas da representação dos problemas hidrodinâmicos, incluindo a transição da acústica para a região dos fenômenos não-lineares e ultra-sônicos — assim como os métodos e abordagens para o tratamento da formação e propagação de discontinuidades.

As pesquisas nessa área resultam de progressos relativamente recentes no domínio das temperaturas ultra-altas em meios submetidos a pressões e velocidades extremas. Tais condições são encontradas, por exemplo, nas ondas de choque resultantes de explosões nucleares, no vôo supersônico, em descargas elétricas na atmosfera e, o que nos diz mais respeito, nas explosões de supernovas. As dificuldades aí encontradas são tais que inviabilizam a aplicação imediata das abordagens convencionais da Física-Matemática, pelas quais os fenômenos físicos poderiam ser preditos com base em equações diferenciais parciais, sujeitas às condições de contorno e condições iniciais.

A pseudo-viscosidade de VonNeumann, por ter sido a primeira proposta de solução e devido ao uso consagrado, é discutida em maiores detalhes. A facilidade e simplicidade de implementação desse esquema são as causas de sua larga utilização. Por isso mesmo é que certas desvantagens desse esquema têm sido alvo de continuados esforços na pesquisa de procedimentos mais precisos e elegantes. Estreitamente relacionados a esse método, são também analisados os enfoques, posteriormente propostos, nos quais a suavização das discontinuidades é realizada através da introdução de termos de difusão. Nesta categoria incluímos ainda os chamados métodos de linear hibridização. Essas abordagens utilizam os erros numéricos de truncamento dos termos de mais alta

ordem das séries que dão origem às equações de diferenças finitas para obter o mesmo efeito.

Apresentamos também a abordagem de Godunov para o tratamento das ondas de choque porque, apesar de ser pouco conhecido no Ocidente, tem a sua importância devido ao fato de atacar o problema de frente, mantendo suas características não-lineares e sem a introdução de artifícios não físicos. Além disso, é, até hoje, o único método realmente alternativo ao de VonNeumann.

A importância das ondas de choque em explosões de supernovas é discutida no Capítulo III onde apresentamos, como subsídio, um resumo da teoria de supernovas. Examinamos as questões físicas mais relevantes que vão das condições físicas reinantes em uma pré-supernova à análise dos problemas relacionados à correta descrição da explosão em simulações computacionais.

Discutimos também, nesse capítulo, o modelo de explosão de supernova por uma lagrangiana efetiva. Os resultados alcançados com esse modelo motivaram nossas pesquisas e, além disso, nele estão contidas as idéias gerais e a doutrina básica que vieram a nortear o desenvolvimento do presente trabalho.

O formalismo hidrodinâmico de poucas variáveis, objeto central deste trabalho, é apresentado no capítulo IV, onde discutimos as razões físicas das dificuldades que surgem quando da integração numérica de problemas hidrodinâmicos e, com base nelas, estabelecemos os preceitos dos quais decorre a solução aqui proposta. O mecanismo de transferência de massa, característica singular de nosso modelo, é introduzido e analisado. Examinamos de que maneira essa transferência é capaz de evitar o aparecimento das oscilações numéricas espúrias, permitindo que a integração se desenrole de forma inteiramente consistente. Escrevemos a lagrangiana correspondente a uma configuração de

um núcleo estelar de pré-supernova e deduzimos explicitamente as equações de evolução para os sistemas esféricos unidimensionais.

No Capítulo V aplicamos o formalismo ao cálculo de explosões de supernovas e analisamos as fases de colapso e expansão do núcleo estelar, obtendo uma descrição detalhada da formação da onda de choque causadora da explosão colossal. As simulações numéricas realizadas mostram que o método é eficaz para descrição global dessa classe de fenômenos críticos. As equações são particularmente estáveis nas regiões em que as variáveis apresentam gradientes muito acentuados ou mesmo descontinuidades. Por último discutimos as limitações do método e estabelecemos as linhas e perspectivas de desenvolvimento.

## CAPÍTULO II — HIDRODINÂMICA

O Problema de Riemann

Pseudo-viscosidade de VonNeumann

Método de Godunov

## O PROBLEMA DE RIEMANN

Existem basicamente duas formas de tratar os fenômenos da mecânica dos fluidos que são as assim chamadas representação de Euler e representação de Lagrange <sup>1</sup>.

Na descrição de Euler, as variáveis hidrodinâmicas do problema são descritas por seus valores assumidos em pontos previamente especificados. É assim necessário formar uma rede espacial de pontos nos quais serão medidas ou especificadas as variáveis hidrodinâmicas. Nesse enfoque, a Hidrodinâmica é descrita através de uma Teoria de Campo, da mesma forma que a Eletrodinâmica de Maxwell, na qual busca-se uma descrição do campo escalar de pressões ou do campo vetorial de velocidades, etc. As equações que determinam a evolução das variáveis são obtidas do Princípio de Hamilton, enquanto que os pontos em que as variáveis são descritas são determinados a priori, e em geral como uma rede de pontos fixos a algum sistema de coordenadas externo.

---

<sup>1</sup> A bem da verdade histórica, vale dizer, ambos são devidos a Euler.

O segundo enfoque, o de Lagrange, procura descrever a dinâmica do sistema por meio dos valores assumidos pelas variáveis em pontos solidários ao meio. Assim, toma-se partículas de prova ou elementos de volume  $e$ , procura-se obter a evolução desses pontos. A especificação da trajetória dos pontos de prova, bem como o valor das variáveis hidrodinâmicas a eles associadas fornece a descrição do problema. Nessa descrição de Lagrange, o Princípio de Hamilton é usado para se obter as equações de evolução das variáveis do problema. Porém, a posição dos pontos em que as variáveis serão descritas é predeterminada, arbitrariamente, como coordenadas co-moventes com o meio material.

As coordenadas lagrangianas são particularmente convenientes em problemas unidimensionais e têm sido tradicionalmente adotadas em cálculos de explosões de supernovas (v.e. Baumgarte, et al., 1995).

Se tomarmos por coordenada lagrangiana a posição inicial  $\zeta$  de uma partícula, então, a conservação da massa nos impõe:

$$\zeta = \int_{x_0}^x \frac{\rho}{\rho_0} dx, \quad (2.1)$$

A própria equação da continuidade, reescrita nesses termos e em função do volume específico  $V = 1/\rho$ , e do campo de velocidades  $u$  é:

$$\frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}. \quad (2.2)$$

A equação do movimento se escreve como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -V_0 \frac{\partial p}{\partial \zeta}, \quad (2.3)$$

onde  $p$  é a pressão do fluido.

Outra possibilidade é considerar a massa integrada como variável lagrangiana<sup>1</sup>. Para esse caso, temos:

$$m = \int_{x_0}^x \rho dx. \quad (2.4)$$

e a equação da continuidade fica:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial m}. \quad (2.5)$$

E a equação do momento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial m}. \quad (2.6)$$

Iremos considerar, nos cálculos hidrodinâmicos que se seguem, que essas derivadas temporais são totais, na medida em que as partículas de prova são co-moventes com o fluido.

As ondas sonoras lineares ou infinitesimais transmitem momento e energia que se propagam com velocidade que independe da amplitude ou do comprimento de onda. Tais ondas apresentam dispersão nula e propagação sem distorção e não podem oferecer um mecanismo de concentração espacial de energia. Isto decorre do caráter linear das equações hidrodinâmicas que descrevem o problema acústico e que só é válido no limite de amplitudes infinitesimais.

As equações hidrodinâmicas que descrevem a propagação das ondas sonoras são linearizações para o caso limite em que as mudanças de densidade  $\Delta\rho$  e pressão  $\Delta p$  são muito menores do que os valores médios de  $\rho_0$  e  $p_0$ , e em que a velocidade  $u$  das

---

<sup>1</sup> Essa é a opção adotada nos desenvolvimentos apresentados no Capítulo IV.

partículas do fluido é bem menor do que a velocidade do som no meio. Sob essas condições e no caso unidimensional, a equação da continuidade toma a forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.7)$$

E a equação do movimento:

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = -\frac{dp}{dx}. \quad (2.8)$$

Como estamos supondo que as perturbações provocadas pela onda sonora são de pequena amplitude, é natural considerar uma evolução isentrópica para o movimento do gás, e portanto:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x}. \quad (2.9)$$

Onde relacionamos a variação da pressão a uma variação da densidade através da derivada isentrópica. Das equações (2.8) e (2.9) temos:

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = - \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x}. \quad (2.10)$$

Com o intuito de eliminar a variável  $u$  e obter a equação de onda para a mudança de densidade, derivamos a equação (2.7) no tempo e a equação (2.10) no espaço de maneira que, após a eliminação da derivada cruzada  $d^2u/dtdx$ , ficamos com:

$$\frac{d^2 \Delta \rho}{dt^2} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{d^2 \Delta \rho}{dx^2}. \quad (2.11)$$

Uma equação diferencial parcial desse tipo admite duas famílias de soluções gerais:

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \Delta\rho(x - ct) \quad , \quad \Delta\rho = \Delta\rho(x + ct), \\ \Delta p &= \Delta p(x - ct) \quad , \quad \Delta p = \Delta p(x + ct), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\Delta u = \Delta u(x - ct) \quad , \quad \Delta u = \Delta u(x + ct),$$

onde  $c$  é a raiz

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}, \quad (2.13)$$

e denota a velocidade de propagação no meio. A equação de onda pode então ser escrita na forma:

$$\frac{d^2 \Delta\rho}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 \Delta\rho}{dx^2}. \quad (2.14)$$

Observando que  $(d/dt) = -c(d/dx)$  para ondas progressivas e  $(d/dt) = c(d/dx)$  para ondas retrógradas, escrevemos:

$$\Delta\rho = \frac{\rho_0}{c} f_1(x - ct) + \frac{\rho_0}{c} f_2(x + ct), \quad (2.15)$$

$$u = f_1(x - ct) - f_2(x + ct), \quad (2.16)$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são funções completamente arbitrárias de seus argumentos mas que podem ser determinadas a partir das condições iniciais em densidade e velocidade:

$$f_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{c}{\rho_0} \Delta \rho(x, 0) + u(x, 0) \right),$$
(2.17)

$$f_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{c}{\rho_0} \Delta \rho_0(x, 0) - u(x, 0) \right).$$

Mesmo para ondas de pequena amplitude a aproximação linear é ainda válida, pois os mecanismos de atenuação da onda mascaram a dispersão existente dissipando a onda antes mesmo que os efeitos de dispersão possam se manifestar. Por outro lado, rigorosamente, toda onda acústica evolui para formar uma frente de onda de choque. Isto porque a velocidade de propagação nunca é estritamente independente da amplitude e a crista apresenta sempre uma velocidade de propagação ligeiramente maior do que o cavado, implicando na superposição da onda sobre si mesma.

Assim, devido à dispersão, uma onda acústica real sofre alteração de forma e acúmulo de energia na crista. Ocorre no entanto que, devido à atenuação sempre presente, a própria onda será destruída antes que a deformação se torne significativa.

Para um movimento arbitrário do gás, a equação de continuidade se escreve da forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.18)$$

Como  $\rho$  está relacionado pela equação termodinâmica  $\rho = \rho(p, S)$  à pressão e entropia e, desde que  $dS/dt = 0$ , (evolução adiabática), teremos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dt} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_p \frac{dS}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{dt}. \quad (2.19)$$

De maneira que a equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\left( \frac{1}{\rho c} \right) \frac{dp}{dt} + \left( \frac{u}{\rho c} \right) \frac{dp}{dx} + c \frac{du}{dx} = 0. \quad (2.20)$$

Que combinada com a equação do movimento,

$$\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + \left( \frac{1}{\rho} \right) \frac{dp}{dx} = 0, \quad (2.21)$$

permite obter:

$$\left( \frac{du}{dt} + (u + c) \frac{du}{dx} \right) - \left( \frac{1}{\rho c} \right) \left( \frac{dp}{dt} + (u + c) \frac{dp}{dx} \right) = 0, \quad (2.22)$$

e

$$\left( \frac{du}{dt} + (u - c) \frac{du}{dx} \right) - \left( \frac{1}{\rho c} \right) \left( \frac{dp}{dt} + (u - c) \frac{dp}{dx} \right) = 0. \quad (2.23)$$

Para fluidos isentrópicos, as variáveis  $p$ ,  $\rho$  e  $c$  estão univocamente relacionadas:

$$\rho = \rho(p), \quad p = p(\rho), \quad c = c(\rho), \quad (2.24)$$

e as duas últimas equações se tornam:

$$DJ_+ = 0 \text{ ao longo da trajetória } dx/dt = u + c$$

e

$DJ_- = 0$  ao longo da trajetória  $dx/dt = u - c$ .

Onde  $J_+$  e  $J_-$  são os invariantes de Riemann:

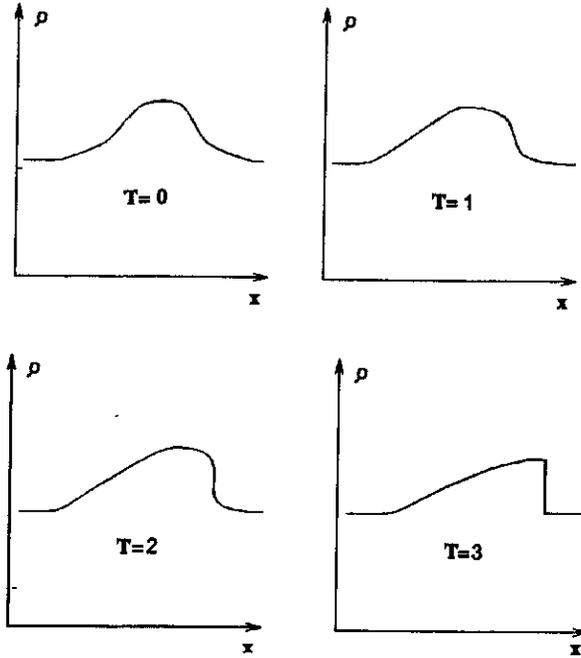
$$J_+ = u + \int \left(\frac{1}{\rho c}\right) dp \quad e \quad J_- = u - \int \left(\frac{1}{\rho c}\right) dp. \quad (2.25)$$

Assim, para as trajetórias  $dx/dt = u + c$  e  $dx/dt = u - c$ , chamadas de características, os correspondentes invariantes de Riemann são constantes. As equações (2.24) mostram que a pressão, a densidade, e quaisquer outras variáveis termodinâmicas só podem ser função da velocidade do fluido, não podendo depender explicitamente de  $x$  e  $t$ . Consequentemente,  $p = p(u)$  e  $c = c(u)$ , etc.

Enquanto uma onda isolada de pequena amplitude se propaga com forma e velocidade invariáveis, para a situação mais geral que estamos aqui tratando, uma variável termodinâmica evolui com uma velocidade que depende do próprio valor da variável. Isto resulta da não-linearidade das equações. Dessa maneira, com a propagação, a onda apresentará uma distorção da forma, a menos que seja atenuada antes que o efeito possa se manifestar plenamente.

Por outro lado, a partir de uma certa amplitude passa a ocorrer que a escala de tempo da distorção se torna menor do que a da dissipação. Para tanto basta que as flutuações em pressão sejam da ordem da pressão média no meio ( $dp \ll p$ ). Sob essas circunstâncias, durante a propagação, ocorre o aumento da crista que gradativamente incrementa a velocidade e se adianta em relação ao restante da onda. Ainda os mecanismos de dissipação irão ao final atenuar a onda mas, antes disto, haverá tempo para uma mudança qualitativa, com o surgimento de uma frente de choque cada vez mais abrupta que se propaga com velocidades supersônicas (V. Figura 2.1). Atrás dessa frente forma-se um patamar onde são encontradas elevadas temperatura e pressão. Mais atrás desse

patamar ocorre a região de onda de rarefação em que a amplitude cai lentamente e em que as velocidades de propagação são menores. Com isso, aos poucos a onda irá se dispersando, aumentando a largura e diminuindo a amplitude.



**Figura: 2.1.** Diagrama da sobreposição da onda de amplitude finita sobre si mesma, de acordo com a teoria não linear.  $P$  é a pressão e  $X$  é a coordenada espacial em unidades arbitrárias. Em (a) está representada a condição inicial. Os efeitos da dispersão já são bem visíveis em (b). No instante (c) a descontinuidade está plenamente formada.

A região da onda que vai da crista ao patamar é da maior importância para o estudo de mecanismos de transferência de energia, pois é onde ocorre uma alta concentração de momento e energia e onde se desenrolam fenômenos de grande interesse para muitas áreas do conhecimento e, particularmente, para a descrição de explosões de supernovas.

Deve-se notar que a transição de onda acústica para onda de choque é na verdade gradual. Os mecanismos de dispersão e dissipação estão sempre presentes em ondas reais de amplitude finita. Assim, o caráter de onda acústica ou onda de choque está relacionado à precisão com que se examina o problema pois, estritamente falando, nenhuma onda real é rigorosamente sônica.

As equações hidrodinâmicas que descrevem a propagação de uma perturbação num meio não viscoso e não condutor incluem um caráter não-linear que leva, conforme vimos, à formação de uma frente de onda cada vez mas abrupta.

É interessante observar como um meio contínuo regido pelas equações diferenciais parciais da Hidrodinâmica é capaz de evoluir naturalmente para uma descontinuidade matemática. Normalmente, somos nós que introduzimos uma descontinuidade como um conceito aproximativo ou simplificador da realidade, enquanto que, aqui, é a Física Clássica e a Matemática que impõem como resultado a formação da descontinuidade.

A existência de descontinuidades não determina o caráter de onda de choque, pois estas podem também comparecer em ondas acústicas de pequena amplitude. Além disso, descontinuidades só surgem em ondas não lineares de grande amplitude após os estágios iniciais de acúmulo da frente de onda.

Em ondas lineares as descontinuidades podem, eventualmente, ser introduzidas artificialmente como uma aproximação ou simplificação da realidade. Já em ondas de amplitude finita, a evolução normal prescrita pelas equações hidrodinâmicas para meios não viscosos, não condutores, conduz à formação da descontinuidade no sentido matemático rigoroso do termo.

Entretanto, do ponto de vista microscópico, a descontinuidade das ondas de choque também é uma aproximação à realidade física, simplesmente porque as equações hidro-

dinâmicas para um meio material não viscoso e não condutor não poderiam mesmo descrever a natureza corpuscular da matéria.

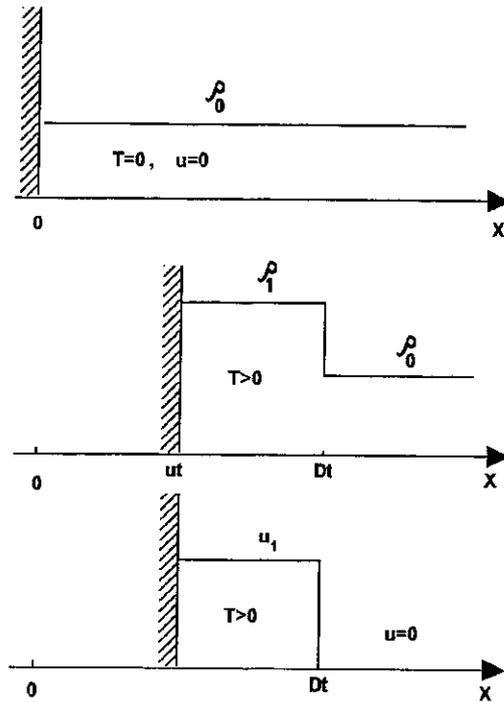
A introdução da condutividade e da viscosidade nas equações faz com que a descontinuidade seja substituída por uma estreita faixa de transição, da ordem de um livre caminho médio, na qual as variáveis do problema apresentam um gradiente muito acentuado. No limite de viscosidade e condutividade nulas, o que significa ignorar a natureza molecular, essa região de transição degenera para uma descontinuidade verdadeira.

Seja na forma de uma estreita faixa de acentuado gradiente, seja na forma de uma completa descontinuidade, vale notar que a frente de uma onda de choque, seguida de um patamar não representa um caso particular ou uma aproximação para situações específicas. Essa forma é o resultado natural da evolução do movimento ondulatório com amplitudes finitas. Se os mecanismos de viscosidade e condutividade não forem incluídos na descrição física do problema, então não se deve esperar obter a estrutura da camada de transição da frente de onda. Na verdade, tal impossibilidade estende-se também à própria determinação da largura da camada, uma vez que nenhum comprimento característico poderia surgir de uma teoria assim formulada.

Qualquer tentativa de encontrar uma solução contínua para um problema em que a amplitude da perturbação não está limitada a valores infinitesimais leva, sem dúvida a resultados não-físicos.

Examinemos o caso de um gás, não condutor de calor e não viscoso, impulsionado por um pistão. Consideremos que o fluido está inicialmente em repouso e que a densidade  $\rho_0$  e a pressão  $p_0$  são constantes. A partir do instante  $t = 0$  o pistão se põe em movimento para a direita (v. Figura 2.2), com velocidade  $u$  constante. As constantes físicas que intervêm originam-se das propriedades termodinâmicas do gás, as quais não permitem a determinação de uma quantidade com a dimensão de comprimento. Não pode haver

portanto um comprimento característico na solução. Segue daí que o problema é auto-similar. A única solução possível deve satisfazer as condições de contorno na interface, desde o instante  $t = 0$ , sendo que as densidades são obrigatoriamente constantes para cada lado da interface.



**Figura: 2.2.** A produção de uma onda de choque por meio de um pistão que parte do repouso em (a) e se move para a direita com velocidade constante. Num tempo  $t$  posterior, o perfil de densidades é apresentado em (b) e o de velocidades do fluido em (c).  $D$  é a velocidade de propagação da onda de choque com relação ao meio não perturbado.

Observe-se que as leis de conservação que descrevem a dinâmica de um fluido não condutor e não viscoso prescindem da continuidade das variáveis e podem ser utilizadas para tratar uma descontinuidade como a da onda de choque. As leis de conservação

da massa, momento e energia para um fluido não-viscoso e não-condutor, expressas na forma de equações diferenciais, são:

$$\frac{d(\rho)}{dt} = -\frac{d(\rho u)}{dx}, \quad (2.26)$$

$$\frac{d(\rho u)}{dt} = -\frac{d(p + \rho u^2)}{dx}, \quad (2.27)$$

$$\frac{d(\rho e + \rho \frac{u^2}{2})}{dt} = -\frac{d\left[\rho u \left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right)\right]}{dx}. \quad (2.28)$$

Essas relações não contêm qualquer referência aos mecanismos de dissipação e, apesar disso, são capazes de descrever a passagem de uma descontinuidade como a da onda de choque. Mesmo a entropia poderá ser obtida com todo o rigor, como veremos. Note-se que uma onda de choque é um fenômeno irreversível capaz de gerar grandes quantidades de entropia e que, mesmo sem especificarmos o processo dissipativo, ainda assim, poderemos obter os seus valores corretamente.

Isto porque tratamos a frente como uma descontinuidade, sem nos ater aos detalhes da camada de transição, para os quais é necessário um tratamento microscópico, com a introdução dos mecanismos específicos de dissipação. No entanto, apesar de não descrever a transição, ainda assim, os valores iniciais e finais das variáveis, incluídos entre eles os valores da entropia, são completamente rigorosos.

Inversamente, uma camada de transição onde as variáveis fossem contínuas e apresentassem um acentuado gradiente não poderia ser descrita por aquelas leis de conservação, visto que exigem entropia constante (fluxo adiabático). Sabemos, de antemão, que a entropia assume valores muito diferentes antes e depois da frente de choque.

Integrando as leis de conservação no interior da superfície que envolve a descontinuidade, obtemos:

$$\rho_1 u_1 = \rho_0 u_0, \quad (2.29)$$

$$p + \rho_1 u_1^2 = p_0 + \rho_0 u_0^2, \quad (2.30)$$

$$e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = e_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{u_0^2}{2}. \quad (2.31)$$

Os valores da entropia são obtidos da equação de estado da matéria,  $S = S(P, V)$ . E com a equação de energia  $E = E(P, V)$ , podemos escrever a relação de Hugoniot:

$$P_1 = H(V_1, P_0, V_0). \quad (2.32)$$

Note-se que, enquanto as curvas adiabática e isotérmica apresentam um único parâmetro (a entropia), a curva de Hugoniot exige dois parâmetros ( $P_0$  e  $V_0$ ) para a sua completa definição.

Conforme discutido anteriormente, o aumento de entropia durante a passagem da onda fica definido somente pelas leis de conservação de massa, momento e energia, sem referência aos mecanismos de dissipação. A introdução dos processos dissipativos não alteraria os valores iniciais e finais da entropia, mas permitiria um detalhamento da estreita faixa de transição. Esse exame microscópico do problema é irrelevante para este trabalho e por isso, daqui por diante, nos restringiremos à descrição macroscópica.

O diagrama  $PV$  de uma curva de Hugoniot evidencia algumas relações teóricas que governam a evolução e propagação de uma onda de choque. Consideremos que um

fluido evolua do estado  $A(P_0, V_0)$  para o estado  $B(P_1, V_1)$  em decorrência da passagem de uma frente de uma onda de choque.

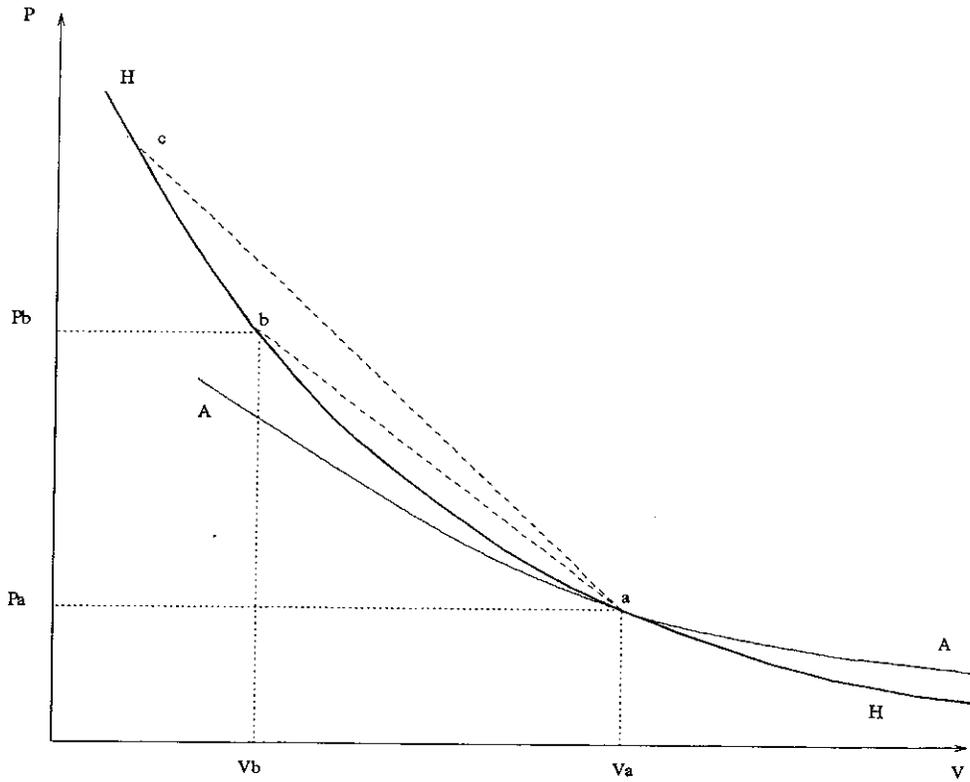


Figura: 2.3. Diagrama de Hugoniot-Rankine.  $H$  é a curva de Hugoniot,  $A$  é a adiabática. Os estados representados pelos pontos  $a$  e  $b$  correspondem respectivamente os estados inicial e final do gás ao sofrer uma compressão de choque.

A forma geral da curva Hugoniot ( $H$ ), traçada na Figura (2.3), é típica da generalidade dos meios materiais e se caracteriza por  $d^2p/dv_2 > 0$  em todas as regiões. O segmento da curva  $H$ , que vai do ponto  $a$  ao ponto  $b$ , não deve ser confundido com a trajetória do gás no diagrama  $PV$  ao evoluir do estado inicial  $a$  para o estado final  $b$ . Essa trajetória pode ser definida e traçada no diagrama  $PV$ , mas não se relaciona à curva  $H$ , e só pode ser estabelecida no contexto de uma teoria microscópica que, como

já dissemos, exige a introdução dos mecanismos de dissipação. A curva de Hugoniot, por outro lado, deve ser entendida simplesmente como um relacionamento teórico entre  $P_1$  e  $V_1$ , que determinam os possíveis estados finais, como função do estado inicial especificado por  $P_0$  e  $V_0$ . As equações (2.28 a 2.30) permitem escrever a velocidade de propagação da descontinuidade no meio:

$$D^2 = V_0^2(p_1 - p_0)/(V_0 - V_1), \quad (2.33)$$

que corresponde no gráfico à inclinação da reta  $ab$ . Daqui se conclui que a tangente à curva de Hugoniot pode ser obtida fazendo  $a = b$  e, nesse caso, a inclinação da reta  $AB$  é igual à velocidade do som no meio não perturbado. Segue que, no limite, as ondas de choque de pequena intensidade se propagam com a velocidade do som e que a curva de Hugoniot se confunde com a adiabática que passa pelo ponto  $a$ . Pode-se mostrar que essa tangência é de segunda ordem pois, na verdade, também as derivadas segundas são iguais nesse ponto.

As relações entre as variáveis de fluxo em ambos os lados da descontinuidade foram até aqui obtidas sob a hipótese de que a descontinuidade é estável. Porém, tais variáveis poderiam, na verdade, assumir quaisquer outros valores que não restritos a qualquer relacionamento teórico entre si, desde que se elimine a hipótese de estabilidade da descontinuidade. Para valores arbitrários dessas quantidades, a descontinuidade teria que, obrigatoriamente, se desmembrar numa das três possibilidades formadas por ondas que se afastam da descontinuidade original (Courant e Friedrichs, 1956):

- a)- Duas ondas de choque;
- b)- Uma onda de choque e uma onda de rarefação;
- c)- Duas ondas de rarefação.

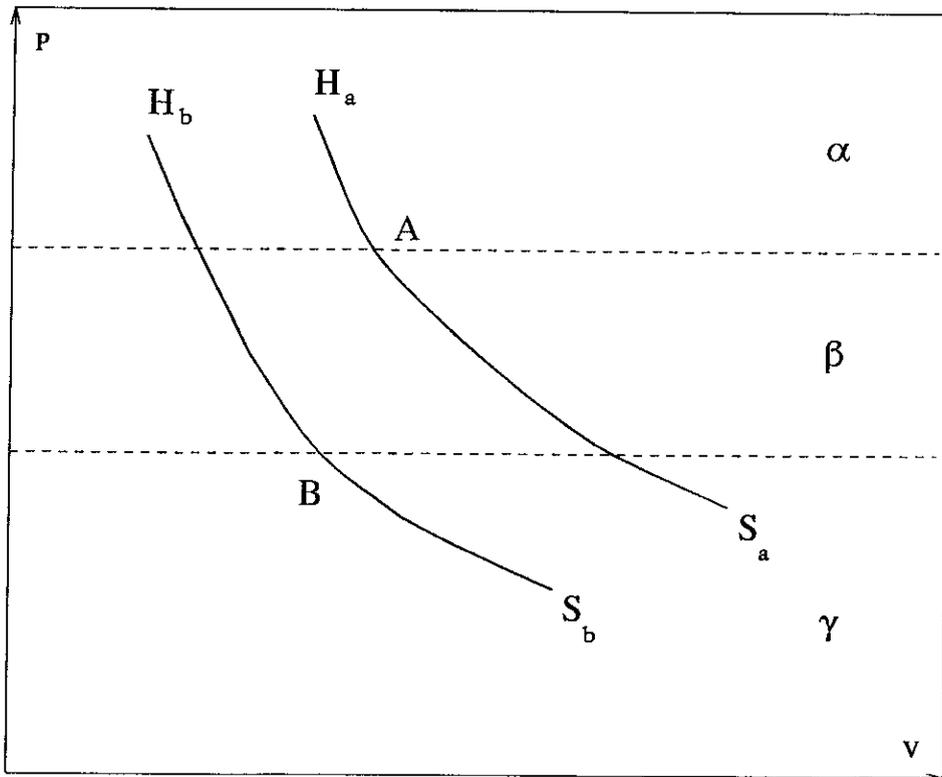
Esse tipo de descontinuidade inicial, chamada de descontinuidade arbitrária, em oposição à descontinuidade estável tratada anteriormente, ocorre, por exemplo, quando do encontro de duas ondas de choque que se propagam em sentidos opostos. Nesse instante os valores dos dois lados da descontinuidade não mais estarão restritos pelas relações (2.28 a 2.30). Após a colisão, o movimento do gás também não será descrito pela propagação de uma única descontinuidade, mas sim por uma daquelas três possibilidades citadas.

Considere um gás que no instante inicial,  $t = 0$ , encontra-se, do lado esquerdo de uma descontinuidade localizada em  $x = 0$ , no estado homogêneo, descrito por  $u_0$ ,  $p_0$ ,  $\tau$  e  $\rho_0$ ; e do lado direito, também homogêneo, especificado por  $u_1$ ,  $p_1$ ,  $\tau$  e  $\rho_1$ . Também a composição química pode ser diferente nos dois lados.

Uma vez que não existe neste problema uma escala de comprimento ou de tempo, a solução deve ser descrita por funções da razão  $x/t$ . O fluido, então, necessariamente apresenta uma evolução auto-similar e, como tal, está restrito a três tipos de regiões: ondas de rarefação, regiões uniformes e descontinuidades de choque.

A auto-similaridade do problema impõe ainda uma posterior restrição: a solução só pode ser construída sobre duas ondas, que se propagam em sentidos opostos e que tanto podem ser, independentemente, de rarefação ou de choque. Qualquer outra possibilidade acarretaria, mais cedo ou mais tarde, a superposição das duas ondas, o que determinaria um tempo e uma posição específicos, contrariando a condição de auto-similaridade.

Um método geral para a solução analítica desse problema, para um politrópico qualquer, pode ser encontrado em Courant e Friedrichs (1956). O tratamento para um fluido qualquer exige algoritmos numéricos como os apresentados em Van Leer (1979) ou em Collela e Glaz (1985).



**Figura: 2.4.** Os estados acessíveis aos gases que inicialmente se encontram nos pontos  $A$  e  $B$  do diagrama  $PV$ .  $H_{AA}$  e  $H_{BB}$  representam as curvas de Hugoniot e  $S_{AA}$  e  $S_{BB}$  as adiábaticas que passa por  $A$  e  $B$ , respectivamente. A região I corresponde à solução ditada por duas ondas de choque; II a uma onda de choque e uma onda de rarefação; III a duas ondas de rarefação.

Além dos gráficos  $(P, V)$ , é conveniente tratar esse problema com os diagramas  $(P, u)$  nos quais a pressão  $P$  é traçada contra a velocidade do gás no sistema de coordenadas do laboratório.

A relação de Hugoniot pode ser reescrita para estabelecer um relacionamento funcional entre a pressão e a velocidade do meio depois da passagem da onda de choque. Da mesma forma, em virtude da constância do invariante de Riemann (v.e. eq. 2.18), a pressão, numa onda de rarefação fica univocamente relacionada à velocidade.

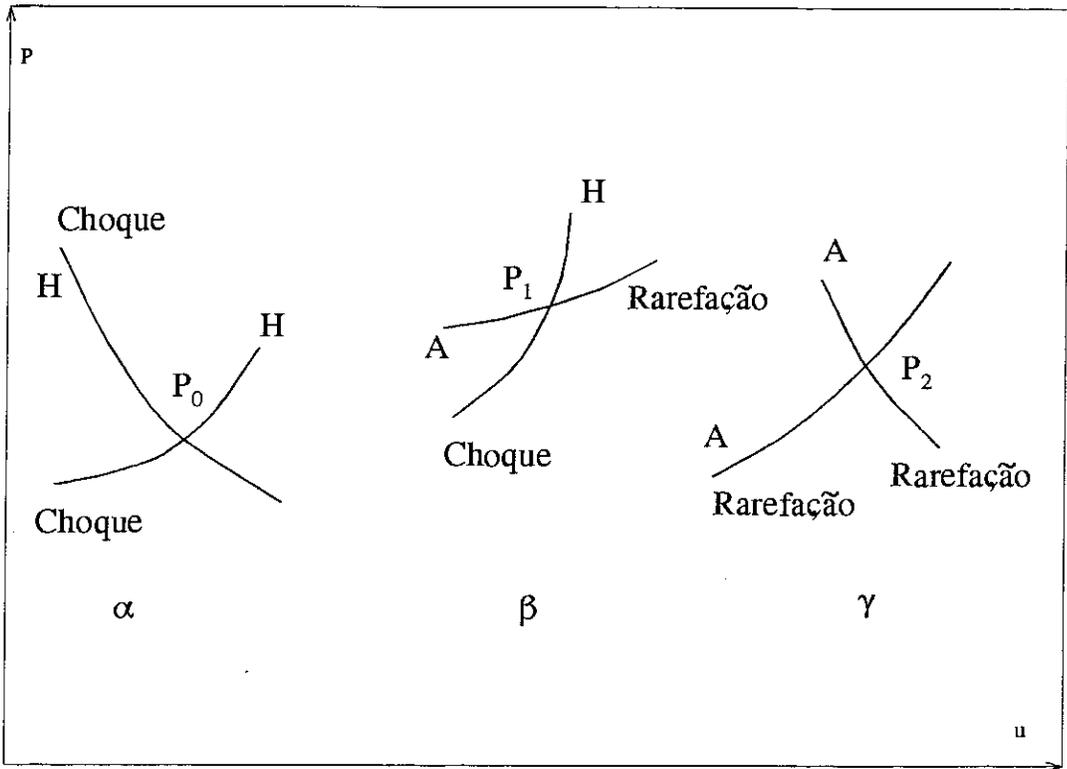


Figura: 2.5. Diagrama  $P, u$  para as três possibilidades de desmembramento de uma descontinuidade arbitrária.  $H$  são curvas de Hugoniot e  $S$  são adiabáticas.

Os três casos possíveis de evolução após o desmembramento de uma descontinuidade arbitrária podem ser identificados na Figura (2.4).  $H_A A$  e  $H_B B$  representam os estados resultantes de uma compressão de choque sobre os gases que inicialmente se encontravam, respectivamente, nos estados  $A$  e  $B$ . Essas curvas são extendidas, no caso de uma onda de rarefação, pelas adiabáticas de Poisson  $S_A A$  e  $S_B B$ . As curvas completas  $H_A A S_A$  e  $H_B B S_B$  representam então todos os estados acessíveis aos dois gases.

A conveniência do do diagrama  $(P, u)$  para a descrição do desmembramento da descontinuidade está em que, para cada elemento de solução, as pressões e velocidades, no estado final, são idênticas dos dois lados de cada interface. Os dois estados ficam,

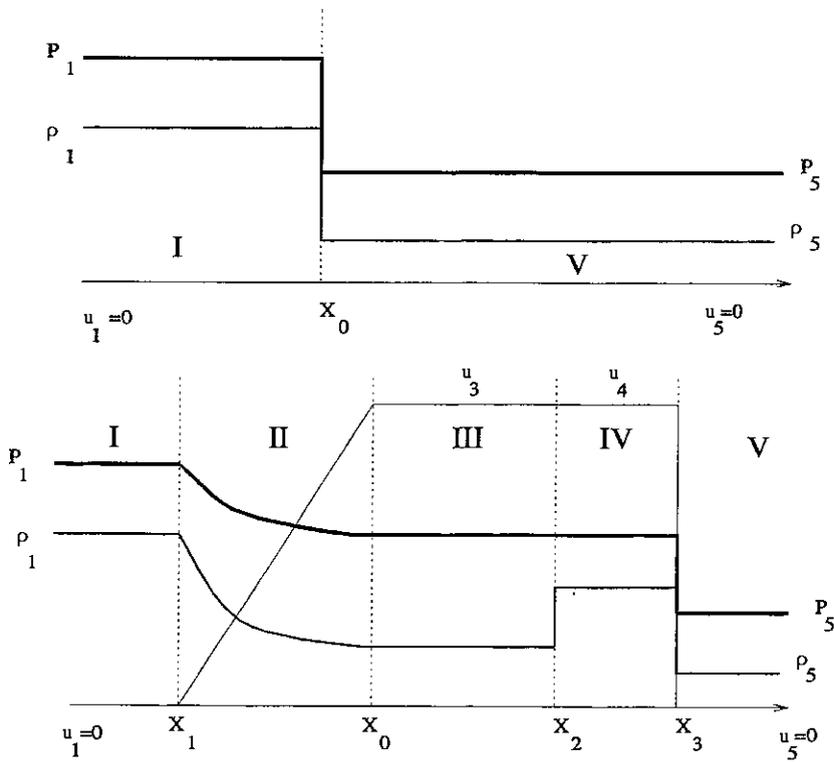


Figura: 2.6. O desmembramento de uma descontinuidade arbitrária por uma combinação de descontinuidades de choque, ondas de rarefação, e regiões planas.

então, representados no diagrama da Figura (2.5) por um mesmo ponto. Nessa figura  $A$  representa o estado de um gás que inicialmente está sujeito a uma alta pressão, e  $B$  um gás a uma pressão mais baixa. Para todos aqueles estados finais em que a pressão  $P_0$  é maior do que  $P_A$  a descontinuidade inicial irá decair para duas ondas de choque. Isto corresponde a região  $\alpha$  da Figura (2.4) e está representado pelo diagrama  $\alpha$  da Figura (2.5). Se as condições de velocidades iniciais forem tais que a pressão  $P_1$  do estado final for intermediária entre  $P_A$  e  $P_B$ , o gás evoluirá como em  $\beta$  da Figura (2.5) através de uma adiabática e de uma curva de Hugoniot. Finalmente, se já no instante inicial os dois gases estiverem se afastando um do outro, então, serão originadas duas ondas de

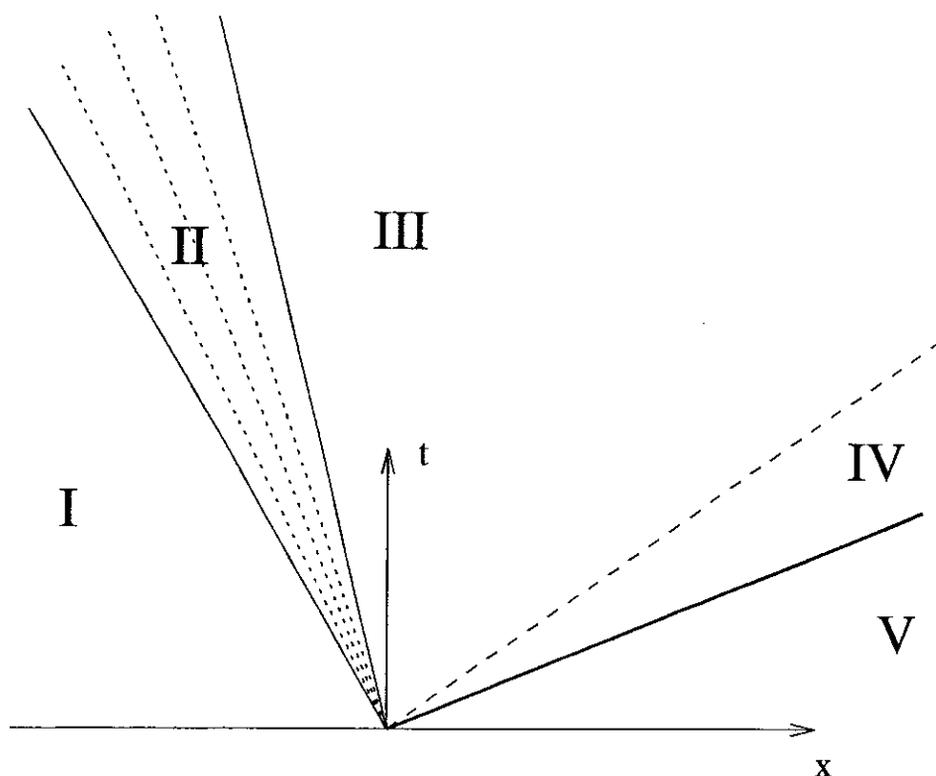


Figura: 2.7. As varias regiões em que se divide o gás após o desmembramento da descontinuidade no problema do tubo de choque. Em I o gás esta sob alta pressão. II representa a onda de rarefação. Na região III temos um gás rarefeito que está à mesma pressão e velocidade que o gás da região IV. O gás ainda não recebeu o impacto da onda de choque na região V.

rarefação, como em  $\gamma$  da Figura (2.5), e a pressão do estado final deverá ficar abaixo de  $P_B$ , parte inferior da Figura (2.4).

Um exemplo de condições iniciais para um gás inicialmente em repouso no sistema do laboratório está representado na Figura (2.6). As duas regiões homogêneas são inicialmente separadas por uma descontinuidade arbitrária. A solução é obtida por uma combinação dos três elementos possíveis: regiões homogêneas, descontinuidades de choque, ondas de rarefação.

As regiões indicadas por números romanos de I a V da Figura (2.6) estão representadas no diagrama de Riemann da Figura (2.7). A linha tracejada entre III e IV representa uma descontinuidade de contato onde as pressões e velocidades são iguais dos dois lados da descontinuidade. As temperaturas e densidades são em geral diferentes entre os dois lados desse tipo de descontinuidade. As regiões I, III, IV e V são homogêneas em  $P$ ,  $\rho$  e  $T$ . Na região II, correspondente à onda de rarefação, nenhuma das variáveis é constante, e o campo de velocidades é, no caso plano, uma função linear das coordenadas.

## II-2 PSEUDO-VISCOSIDADE DE VONNEUMANN

A integração numérica de um problema hidrodinâmico exige a transformação das equações diferenciais em equações de diferenças finitas e pressupõe uma variação suave das variáveis. No caso de uma variação rápida, porém contínua, a primeira e mais simples abordagem é aumentar o número de pontos utilizados para a descrição do problema físico de forma a encurtar a distância entre pontos consecutivos da malha. Entretanto, como veremos, frequentemente não basta diminuir o espaçamento da rede para resolver o problema.

Na natureza não são frequentes as variações abruptas das variáveis e ainda menos descontinuidades, e por isso esse tipo de questão não costuma surgir durante a integração das equações hidrodinâmicas de problemas físicos mais comuns.

Entretanto, existem muitas exceções. A evolução de ondas acústicas normais pode, por exemplo, fazer com que a frente de onda tome uma forma cada vez mais abrupta até

a completa constituição de uma descontinuidade e formação de uma onda de choque. Nessa situação, se estivermos considerando o meio material como um meio contínuo, a descontinuidade será completa no sentido matemático mais rigoroso do termo.

Essa descontinuidade só não será total se levarmos em conta a natureza atômica da matéria na descrição do problema físico, quando então torna-se claro que a faixa de transição deverá apresentar uma largura de, pelo menos, um livre caminho médio das partículas do meio. A estrutura corpuscular é introduzida nas equações hidrodinâmicas através dos termos de viscosidade e condução de calor.

De qualquer forma, do ponto de vista da integração numérica, estaremos frente a uma região de transição tão aguda que não será absolutamente viável aumentar o número de camadas para contornar o problema.

A solução natural para tratar as regiões onde ocorre uma frente de choque é estabelecer as condições de contorno exigidas pelas equações diferenciais para os ambos os lados da superfície da descontinuidade. Essas condições de contorno são ditadas pelas equações de Hugoniot-Rankine, e são expressões matemáticas das leis de conservação da massa, momento e energia naquela superfície.

No entanto, a aplicação dessas condições apresenta certas dificuldades desde que as frentes de choque estão em movimento com relação à rede de pontos utilizada para a descrição do problema. E isto acontece, seja numa descrição de Euler, seja na de Lagrange.

Além do mais, o movimento dessas superfícies de choque não pode ser conhecido priori, pois dependem da evolução prescrita pelas equações diferenciais e das condições de contorno que, vale notar, não são lineares.

Usualmente torna-se necessário aplicar o método da tentativa e erro até se conseguir a descrição do problema com a particularização de todas as frentes de choque, aonde e quando ocorrem. Em consequência, para a descrição numérica de problemas hidrodinâmicos em que podem ocorrer ondas de choque, os cálculos se tornam extremamente longos, complicados ou mesmo proibitivos, mesmo para os mais rápidos computadores.

E, ainda assim, parte importante da evolução dinâmica do sistema será afetada seriamente, e de uma forma difícil de estimar em todas as situações, uma vez que não nos é possível acompanhar a mudança extrema que ocorre quando da transição de onda de grande intensidade para descontinuidade verdadeira.

Estas questões se tornaram vitais durante a 2a. Guerra Mundial para o grupo de trabalho de Los Alamos, pois não havia então um método para o tratamento automático dos problemas hidrodinâmicos, onde as ondas de choque pudessem ocorrer, e ser tratadas, de forma natural, e no qual fosse eliminada a necessidade de aplicação de condições de contorno particulares. Fazia-se necessário descrever, com a precisão que fosse requerida, toda a evolução hidrodinâmica das variáveis, mesmo na presença de descontinuidades, e dessa forma poder incluir, correta e automaticamente, todas as frentes de choque, sempre e quando estas surgissem.

Na Figura (2.8) está representada a evolução teórica e a resultante da integração numérica das equações da hidrodinâmica. No lugar de uma evolução ordenada, conforme seria de se esperar, o que se obtém é um movimento oscilatório anômalo.

A solução apresentada por Neumann e Richtmyer num trabalho clássico, e publicada em 1950 no *Journal of Applied Physics*, consiste em incluir uma viscosidade artificial, ou pseudo-viscosidade, nas equações hidrodinâmicas.

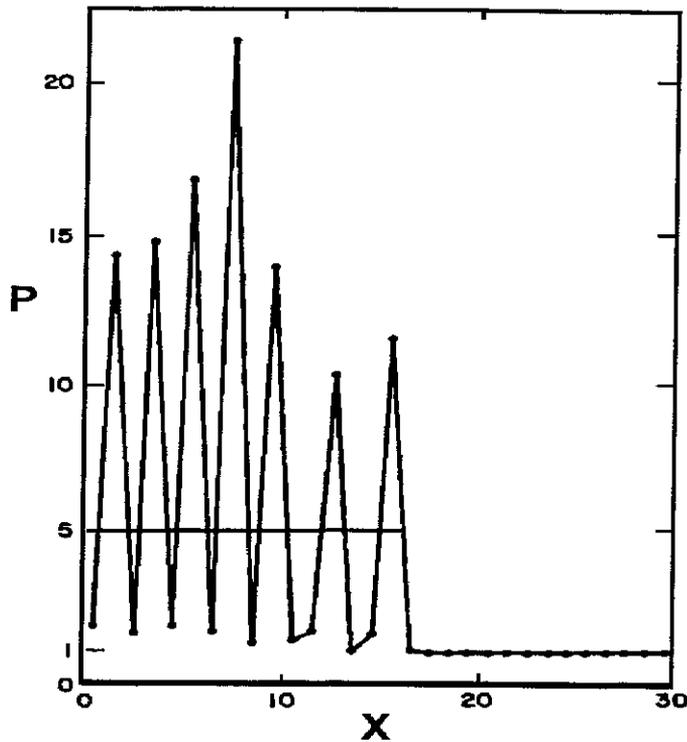


Figura: 2.8. Integração das equações da hidrodinâmica, na sua forma plena, e sem incluir viscosidade artificial. A onda de choque plana está se propagando para a direita no interior de um tubo de choque. A linha horizontal contínua corresponde à solução teórica.  $P$  é a pressão e  $X$  é a coordenada espacial, em unidades arbitrárias. Extraído de Richtmyer (1957).

A proposta tira proveito do conhecido efeito dos mecanismos dissipativos em suavizar a forma da frente de onda de choque, sem no entanto alterar significativamente os valores iniciais e finais da entropia, pressão e campo de velocidade, etc, quando da passagem de uma onda de choque.

Para tanto, eles escolheram e ajustaram uma fórmula conveniente para essa pseudo-viscosidade de maneira que a descontinuidade (na verdade, uma camada de transição extremamente fina, da ordem de um livre caminho médio) fosse substituída por uma faixa de transição da largura de alguns espaçamentos da rede da malha computacional.

Assim, as equações discretizadas de Euler ou de Lagrange, uma vez modificadas pela introdução da viscosidade artificial poderiam ser utilizadas para descrever toda a evolução do quadro físico, da mesma forma como o fazem quando da ausência de ondas de choque.

Uma vez que a pseudo-viscosidade é introduzida nas equações por razões puramente matemáticas, a expressão da força por ela originada pode ser tomada como qualquer função conveniente das variáveis hidrodinâmicas ou de suas derivadas, e deve satisfazer os seguintes requisitos:

- a)- As soluções das equações da hidrodinâmica não devem mais apresentar descontinuidades.
- b)- A espessura das frentes de choque deve ser sempre maior (ou pelo menos da mesma ordem) que o passo espacial de integração usado no cálculo numérico. Esse requisito deve ser satisfeito sempre, independentemente da intensidade do choque ou das propriedades termodinâmicas do meio material.
- c)- Os efeitos da pseudo-viscosidade devem ser desprezíveis para todas as regiões, exceto nas proximidades das camadas de transição das frentes de choque.
- d)- As leis de conservação de massa momento e energia devem valer quando todas as dimensões que caracterizam o fluido forem muito maiores do que a espessura da frente de choque.

Entre as várias possibilidades que satisfazem os requisitos acima enumerados, Neumann e Richtmyer selecionaram a expressão:

$$q = -\frac{(c\Delta)^2}{V} \frac{\partial U}{\partial x} \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|. \quad (2.34)$$

onde  $c$  é uma constante adimensional próxima da unidade,  $V$  é o volume específico,  $U$  é a velocidade do meio,  $x$  é a coordenada de posição, e  $\Delta$  é o espaçamento da rede. Quando esse termo dissipativo artificial foi incluído nos cálculos numéricos (V. Figura (2.9)), as frentes de choque apareceram suavizadas como finas camadas onde as variáveis dinâmicas como a densidade, pressão, temperatura, etc podiam chegar a variar rapidamente, porém, sempre de forma contínua.

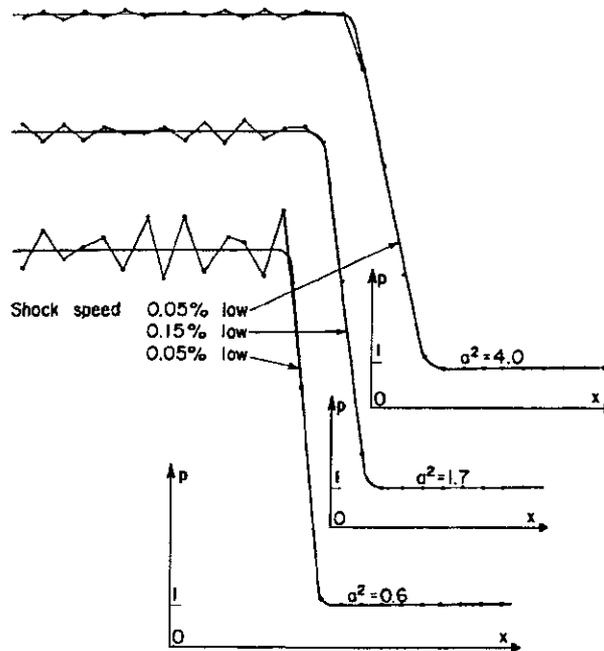


Figura: 2.9. O mesmo que a Figura (2.8), porém modelado por 3 valores para o parâmetro  $a$  de ajuste da pseudo-viscosidade.

Nesses resultados numéricos, as ondas de choque surgiram de forma muito evidente como quase-descontinuidades, que se moviam através do fluido com velocidades muito próximas dos valores corretos e apresentando, quando da passagem de uma frente

de choque, mudanças na densidade, temperatura, etc em bom acordo com os valores esperados.

A pseudo-viscosidade conforme expressa na equação acima, ou em qualquer das possíveis formas alternativas, passou a ter grande aplicação e a ser incorporada sistematicamente nos cálculos numéricos que tratam da hidrodinâmica aonde podem surgir frentes de onda de choque.

Para evitar o inconveniente de a pseudo-viscosidade atuar na ausência de qualquer frente de choque quando o fluido está em expansão, passou-se a usar a fórmula:

A equação (2.34) que especifica a pseudo-viscosidade apresenta o inconveniente de atuar sobre um fluido em expansão, mesmo que não haja nenhuma frente de onda de choque.

Para evitar esse inconveniente passou-se a usar a formula:

$$q = \begin{cases} -\frac{(c\Delta)^2}{V} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2, & \text{se } \frac{\partial U}{\partial x} < 0, \\ 0, & \text{se } \frac{\partial U}{\partial x} \geq 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

que oferece os mesmos resultados para a região da frente de onda de choque, mas assume um valor nulo se o meio estiver se expandindo.

A abordagem do problema pelo esquema da hibridização linear apresenta certa similaridade ao método da pseudo-viscosidade. Da mesma forma, por meio de um artifício matemático, são introduzidos termos altamente dissipativos nas vizinhanças de uma descontinuidade verdadeira. O resultado consiste, também em atenuar os movimentos oscilatórios não-físicos, ao preço de suavizar a forma da frente de onda de choque. O papel desses termos adicionais é, explicitamente, o de garantir um perfil monotônico e, ao mesmo tempo, obter o maior aclive possível para a região de transição. O método oferece

resultados melhores, em geral, que o da pseudo-viscosidade, desde que não estejam presentes fortes interações entre ondas não-lineares. Nessas situações podem se manifestar comportamentos irrealísticos devidos, principalmente, às exigências de monotonicidade que, nesses casos, seriam inapropriadas.

No contexto da hibridização linear, o fluxo das quantidades conservadas — massa, momento e energia — é computado, para todas as interfaces entre zonas de integração, em duas etapas: primeiramente, com um esquema de equações de diferenças finitas de alta ordem e que é capaz de representar com um certo grau de aproximação a transição abrupta de uma descontinuidade; e, uma segunda vez, por meio de um outro sistema de equações de diferenças finitas, porém agora, de mais baixa ordem, e cujo objetivo é obter uma atenuação das oscilações espúrias.

O método se aplica, não só às leis de conservação, como também, a qualquer sistema hiperbólico de equações não lineares:

$$W_t = [F(W)]_x, \quad (2.36)$$

onde  $F_x = A(W)\dot{W}_x$  e  $A$ , e  $B$  são matrizes que podem ser linearizadas por uma transformação de similaridade de tal forma a garantir a característica hiperbólica do sistema.

Uma combinação linear dos dois fluxos é obtida por meio de uma média ponderada cujo fator de peso pode ser uma função especificada com base nas condições locais de propagação do meio. Naturalmente, o método despende o dobro de tempo de cálculo, quando comparado com o esquema da pseudo-viscosidade. A proposta então é calcular o fluxo de cada variável por:

$$W_i^{n+1} = [\theta L_1 + (1 - \theta)l_2]\dot{W}_i^n, \quad (2.37)$$

onde

$$W_i^n = W(t_n, i\Delta x), \quad L_1 \quad (2.38)$$

é um esquema de diferenças finitas de primeira ordem e  $L_2$  um de segunda ordem<sup>1</sup>. O parâmetro adimensional  $\theta$  é normalizado para ficar contido no intervalo  $0 \leq \theta \leq 1$ . Esse fator de peso deve ainda ser escolhido de forma a apresentar a propriedade:

$$\theta = \begin{cases} 0(1), & \text{nas regiões de choque,} \\ 0(h^r), & \text{nas regiões suaves.} \end{cases} \quad (2.39)$$

Adotando para os operadores  $L_1$ , e  $L_2$  a estrutura sugerida por Lax (1954) e por Lax-Wendroff (1964) levam ao esquema de diferenças finitas:

$$W_i^{n+1} = W_i^n + (\lambda/2)(F_{i+1}^n - F_{i-1}^n + (\lambda^2/2)[(1 - \theta_{i+1/2}^n)A_{i+1/2}^n(F_{i+1}^n - F_i^n) - (1 - \theta_{i-1/2}^n)A_{i-1/2}^n(F_i^n - F_{i-1}^n)] + \frac{1}{2}[\theta_{i+1/2}^n(W_{i+1}^n - W_i^n)\theta_{i-1/2}^n(W_i^n - W_{i-1}^n)]. \quad (2.40)$$

O fator adimensional  $\theta$  deve então ser escolhido como uma função conveniente das variáveis hidrodinâmicas de maneira a funcionar como um detetor de ondas de choque, satisfazendo as condições (2.39).

O método foi posteriormente refinado por Boris e Book (1973), através da inclusão de uma operação de antidifusão com o objetivo de remover o excesso introduzido pelo operador  $L_1$ . Apesar de várias outras modificações propostas, a maior limitação do método continua a ser o aumento do tempo de computação.

---

<sup>1</sup> ou de mais alta ordem.

### II-3 O MÉTODO DE GODUNOV

Com essa abordagem se obtém uma realística representação das discontinuidades por meio da inclusão das características da propagação das ondas não lineares na própria estrutura do método de integração numérica.

Ao contrário de tentar construir uma solução das equações hidrodinâmicas a partir de uma série de funções contínuas, Godunov procurou resolver o problema por meio de uma série de soluções descontínuas.

Para a situação sônica, essas funções descontínuas tendem, no limite de muitas camadas, para uma curva suave. Porém, há aqui a vantagem de que, facilmente, se pode representar uma discontinuidade no caso de uma onda de choque.

A engenhosidade do método está em resolver o problema de Riemann, o qual é simples o bastante para permitir uma solução exata para a evolução das ondas não lineares.

O processo começa por estabelecer os valores médios das variáveis do fluido para cada zona de integração. Esses valores são os dados de entrada para o problema de Riemann e formam os domínios de dependência sobre os quais se propagarão as diferentes famílias de curvas características.

Em cada passo de integração, a descontinuidade entre cada célula é desmembrada em duas ondas que podem ser de choque ou de rarefação, e uma descontinuidade de contato, na qual a pressão e o campo de velocidades são contínuos. Os valores médios das variáveis hidrodinâmicas são calculados de forma a satisfazer explicitamente as leis de conservação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} = 0, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \rho (e + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u (e + p/\rho + u^2/2)}{\partial x} = 0, \quad (2.43)$$

onde  $u$  é a velocidade,  $\rho$  é a densidade,  $p$  é a pressão,  $e$  é a energia interna por unidade de massa.

Para que se possa satisfazer as essas condições na presença de descontinuidades, é conveniente transformar essas equações para a forma integral, satisfazendo as seguintes integrações de contorno.

$$\oint \rho dx - \rho u dt = 0, \quad (2.44)$$

$$\oint \rho u dx - (p + \rho u^2) dt = 0, \quad (2.45)$$

$$\oint \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right) dx - \rho u \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) dt = 0. \quad (2.46)$$

Considera-se que, no instante inicial  $t = t_0$ , o gás esteja dividido em camadas de espessura  $h$ , de tal forma que as quantidades  $u, \rho, e$ , e portanto  $p = p(\rho, e)$  sejam constantes no interior de cada camada. Supõe-se que os pontos que dividem o gás em camadas estejam localizados nas coordenadas:

$$x_{-2} = -2h; \quad x_{-1} = -h; \quad x_0 = 0; \quad x_1 = h... \quad (2.47)$$

A camada de gás limitada pelos pontos  $x_m$  e  $x_{m+1}$  é numerada por  $m_{m+1/2}$  e as correspondentes grandezas são denotadas por  $u_{m+1/2}$ ,  $\rho_{m+1/2}$ ,  $e_{m+1/2}$  e  $p_{m+1/2}$ .

Se as pressões e velocidades forem diferentes nas camadas adjacentes  $m - 1/2$  e  $m + 1/2$ , haverá, em geral, um decaimento da descontinuidade em especificado por  $x_m$ .

Para o cálculo aproximado do decaimento da descontinuidade Godunov assume que a equação de estado do fluido é a de um gás ideal, dada por:

$$p = (\gamma - a)\rho e. \quad (2.48)$$

Supondo que as variáveis hidrodinâmicas à esquerda e à direita de  $x_n$  assumem os valores:

$$p = p_{n-1/2}, \quad p = p_{n+1/2} \quad (2.49)$$

$$\rho = \rho_{n-1/2}, \quad \rho = \rho_{n+1/2} \quad (2.50)$$

$$u = u_{n-1/2}, \quad u = u_{n+1/2} \quad (2.51)$$

$$e = e_{n-1/2}, \quad e = e_{n+1/2} \quad (2.52)$$

Como um resultado do decaimento da descontinuidade, três ondas são produzidas, duas das quais podem ser ondas de rarefação ou ondas de choque, mas uma delas representa uma descontinuidade de contato. Nessa descontinuidade de contato a pressão e o campo de velocidades são contínuos. As leis integrais de conservação da massa e do momento aplicadas às duas outras descontinuidades levam a:

$$b_n u_{n-1/2} - p_{n+1/2} = b_n u_n - p_{cd}, \quad (2.53)$$

$$a_n u_{n-1/2} - p_{n-1/2} = a_n u_n + p_{cd}, \quad (2.54)$$

onde  $b_n$  é o fluxo de massa na descontinuidade da esquerda, e  $-a_n$  na da direita.

Para um gás ideal, as incógnitas do problema podem ser obtidos por um processo iterativo do sistema de equações implícitas:

Para o caso de um gás ideal, Godunov estabeleceu o seguinte esquema iterativo para resolver as incógnitas do problema.

$$p_{cd} = \frac{b_n p_{n-1/2} + a_n p_{n+1/2} + a_n b_n (u_{n-1/2} - u_{n+1/2})}{a_n + b_n}, \quad (2.55)$$

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{\rho_{n-1/2}/2} \sqrt{(\gamma+1)p_{cd} + (\gamma-1)p_{n-1/2}}, & \text{se } p_{cd} \geq p_{n-1/2}, \\ \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1-p_{cd}/p_{n-1/2}}{1-(p_{cd}/p_{n-1/2})^{(\gamma-1)/2\gamma}} \sqrt{\gamma p_{n-1/2} \rho_{n-1/2}} & \text{se } p_{cd} \leq p_{n-1/2}; \end{cases} \quad (2.56)$$

$b_n$  é calculado das mesmas fórmulas com  $p_{n-1/2}, \rho_{n-1/2}$  substituído por  $p_{n+1/2}, \rho_{n+1/2}$ .

Depois de o processo iterativo haver convergido,  $u_{cd}$  pode ser calculado de:

$$u_{cd} = \frac{a_n u_{n-1/2} + b_n u_{n+1/2} + p_{n-1/2} - p_{n+1/2}}{a_n + b_n} \quad (2.57)$$

Essas fórmulas podem ser aproximadas para o caso sônico e as variáveis obtidas sem o recurso do processo iterativo:

$$a_n = b_n = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma(p_{n-1/2} + p_{n+1/2})(\rho_{n-1/2} \rho_{n+1/2})}, \quad (2.58)$$

$$p_{cd} = \frac{1}{2}(p_{n+1/2} + p_{n-1/2}) + \frac{a_n}{2}(u_{n+1/2} - u_{n-1/2}), \quad (2.59)$$

$$u_{cd} = \frac{1}{2}(u_{n+1/2} + u_{n-1/2}) + \frac{1}{2a_n}(p_{n+1/2} - p_{n-1/2}). \quad (2.60)$$

Na aproximação sônica adotada por Godunov, as três ondas geradas podem ser escritas como descontinuidades fracas que se propagam com velocidades:

$$D^{left} = U_{n-1/2} - \frac{a_n}{\rho_{1/2}}, \quad u_{cd}, \quad D^{rt} = u_{n+1/2} + \frac{b_n}{\rho_{n+1/2}}. \quad (2.61)$$

As tres ondas dividem o plano  $(x, t)$  em quatro zonas, por exemplo, como mostrado na Figura (2.10). Na zona I todas as grandezas são iguais aos seus valores no ponto  $n - 1/2$ , no instante inicial, e na zona IV aos valores iniciais do ponto  $n + 1/2$ . As zonas II e III apresentam as mesmas pressões e velocidades e correspondem à pressão  $p_{cd}$  e à velocidade  $u$  da descontinuidade de contato. Além disso, em geral, as zonas II e III apresentam diferentes densidades que podem ser calculadas das fórmulas:

$$\rho_{II} = \frac{(\gamma + 1)p_{cd} + (\gamma - 1)p_{n-1/2}}{(\gamma - 1)p_{cd} + (\gamma + 1)p_{n-1/2}} \rho_{n-1/2}, \quad (2.62)$$

$$\rho_{III} = \frac{(\gamma + 1)p_{cd} + (\gamma - 1)p_{n+1/2}}{(\gamma - 1)p_{cd} + (\gamma + 1)p_{n+1/2}} \rho_{n+1/2}, \quad (2.63)$$

que foram deduzidas para uma adiabática de Poisson, no lugar de uma adiabática de choque, de acordo com a aproximação sonica adotada por Godunov.

Depois de calcular aproximadamente o desmembramento da descontinuidade pelo método acima exposto, procura-se determinar em qual das zonas está situado a linha  $x = x_n$ , para então se calcular as grandezas  $U, V, P, R, E$  da zona correspondente.

Segue que quatro casos são possíveis:

- 1)  $D_n^{left}$  e  $D_n^{rt}$  são ambos maiores do que zero e o contorno  $x = x_n$  está localizado na zona I. Portanto,

$$U_n = u_{n-1/2}, \quad P_n = p_{n-1/2}, \quad R_n = \rho_{n-1/2}. \quad (2.64)$$

- 2)  $D_n^{left}$  e  $D_n^{rt}$  são ambos menores do que zero, contorno  $x = x_n$  estando localizado na zona IV,

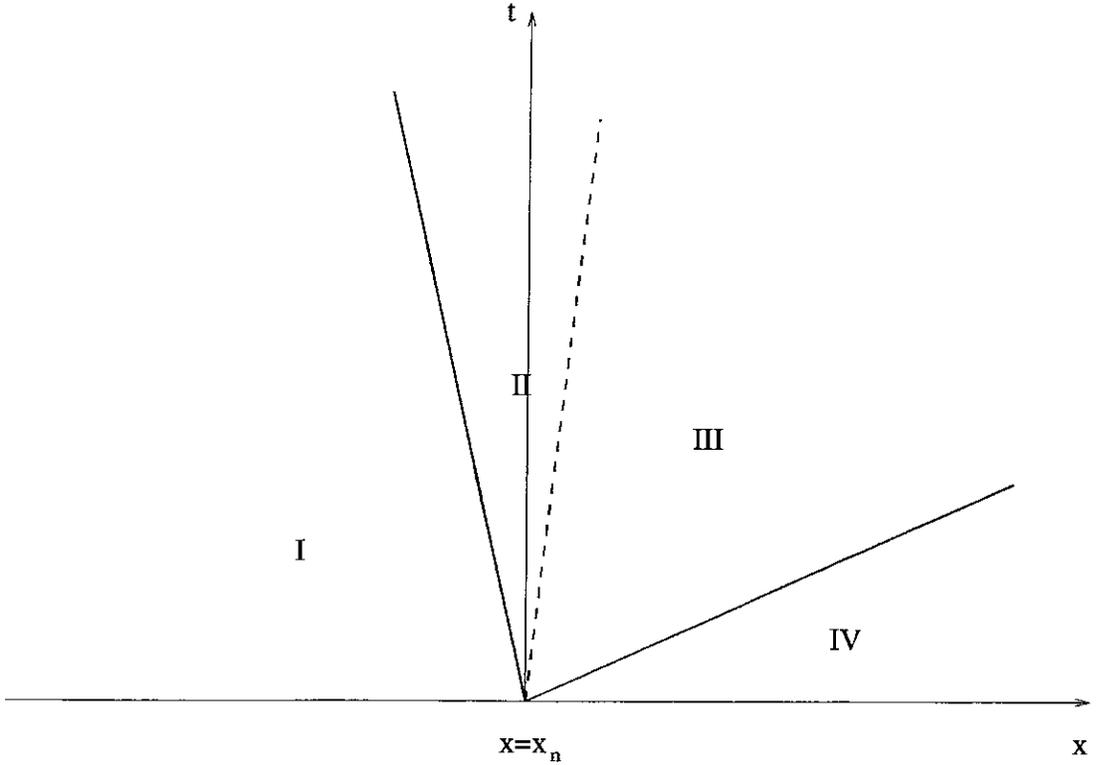


Figura: 2.10. Problema de Riemann para a evolução de uma descontinuidade arbitrária. A linha tracejada corresponde à propagação da descontinuidade de contato, e as duas linhas cheias representam a propagação de descontinuidades fracas de acordo com a aproximação sônica de Godunov.

$$U_n = u_{n+1/2}, \quad P_n = p_{n+1/2}, \quad R_n = \rho_{n+1/2}. \quad (2.65)$$

3)  $D_n^{left}$  e  $D_n^{rt}$  têm sinais diferentes e  $u_n > 0$  contorno  $x = x_n$  está então localizado na zona II, e

$$U_n = u_n, \quad P_n = p_n, \quad R_n = \rho_n^{left}. \quad (2.66)$$

4)  $D_n^{left}$  e  $D_n^{rt}$  têm sinais diferentes e  $u_n < 0$  contorno  $x = x_n$  está então localizado na zona III, e

$$U_n = u_n, \quad P_n = p_n, \quad R_n = \rho_n^{rt}. \quad (2.67)$$

Para todos os casos,  $E_n$  deve ser calculado da equação de estado.

As variáveis físicas são então descritas a partir da descontinuidade pelas fórmulas de similaridade:

$$u = u\left(\frac{x - x_m}{t - t_0}\right), \quad (2.68)$$

$$p = p\left(\frac{x - x_m}{t - t_0}\right), \quad (2.69)$$

$$\rho = \rho\left(\frac{x - x_m}{t - t_0}\right), \quad (2.70)$$

$$e = e\left(\frac{x - x_m}{t - t_0}\right). \quad (2.71)$$

Os valores de  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$ , e  $e$  no ponto  $x = x_m$  são constantes e iguais a  $U, V, P, R, E$  enquanto as ondas formadas nas interfaces vizinhas  $x = x_{m-1}$  e  $x = x_{m+1}$  não atingem a descontinuidade em  $x = x_m$ .

Considera-se então um intervalo de tempo  $\tau$ , curto o suficiente para que os valores de  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$ , e  $e$  possam ser considerados constantes para todos os pontos  $x_m$  da rede. Esses valores são denotados por:

$$u(x_m, t) = U_m, \quad (2.72)$$

$$\rho(x_m, t) = R_m, \quad (2.73)$$

$$p(x_m, t) = P_m, \quad (2.74)$$

$$e(x_m, t) = E_m. \quad (2.75)$$

As curvas de  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$ , e  $e$  para o instante  $t = t + \tau$  são, em geral, extremamente complicadas e, de acordo com o método, podem ser aproximadas pelos seus valores médios  $u^{m+1/2}$ ,  $\rho^{m+1/2}$ ,  $p^{m+1/2}$ , e  $e^{m+1/2}$ , no interior de cada camada.

As leis de conservação (2.41 - 2.43) permitem calcular esses valores médios sem usar as distribuições reais no interior da camada para o instante  $t = t + \tau$ .

Na representação de Euler:

$$\rho^{m+1/2} = \rho_{m+1/2} - \frac{\tau}{h} \{ (RU)_{m+1} - (RU)_m \}, \quad (2.76)$$

$$(\rho u)^{m+1/2} = (\rho u)_{m+1/2} - \frac{\tau}{h} \{ (P + RU^2)_{m+1} - (P + RU^2)_m \}, \quad (2.77)$$

$$\left[ \rho(e + u^2/2) \right]^{m+1/2} = \left[ \rho(e + u^2/2) \right]_{m+1/2}$$

$$- \frac{\tau}{h} \left\{ \left[ RU(E + P/R + U^2/2) \right]_{m+1} - \left[ RU(E + P/R + U^2/2) \right]_m \right\}. \quad (2.78)$$

Para que se possa obter as quatro quantidades  $u^{m+1/2}$ ,  $\rho^{m+1/2}$ ,  $p^{m+1/2}$ , e  $e^{m+1/2}$ , a partir das três últimas equações, deve-se usar a equação de estado:

$$p^{m+1/2} = p(\rho^{m+1/2}, e^{m+1/2}). \quad (2.79)$$

Já para a representação de Lagrange temos:

$$u^{m+1/2} = u_{m+1/2} - \frac{\tau B}{h}(P_{m+1} - P_m), \quad (2.80)$$

$$v^{m+1/2} = v_{m+1/2} + \frac{\tau B}{h}(U_{m+1} - U_m), \quad (2.81)$$

$$E^{m+1/2} = E_{m+1/2} + \frac{u_{m+1/2}^2}{2} - \frac{u^{m+1/2})^2}{2} \frac{\tau B}{h}(P_{m+1}U_{m+1} - P_mU_m). \quad (2.82)$$

onde  $B$  é o volume específico inicial  $B = 1/\rho_0$ , e a pressão é obtida da equação de estado na forma  $p^{m+1/2} = p(E^{m+1/2}, v^{m+1/2})$ .

Admite-se então que as variáveis assim obtidas representam aproximadamente o estado do gás no instante  $t = t_0 + \tau$ . Se adotarmos essa nova situação como instante inicial e repetirmos o cálculo de acordo com o esquema descrito, será obtido um outro estado aproximado para o instante  $t = t_0 + \tau + \bar{\tau}$ , e assim sucessivamente.

O procedimento, conforme se vê, permite calcular a evolução de um problema de hidrodinâmica por meio de um grande número de estados constantes. É capaz de computar corretamente as interações não-lineares entre cada par de estados constantes, e por fim efetivar uma média de maneira a garantir a validade das leis de conservação.

Pode-se, dessa forma, obter uma descrição da hidrodinâmica, sem fazer uso de qualquer artifício, e na qual não se manifestam quaisquer oscilações numéricas espúrias.

A maior desvantagem do método é, no entanto, ditada pela complexidade introduzida para resolver o problema de Riemann. Isto impõe que se realize mais um processo iterativo no interior de cada passo de integração da hidrodinâmica propriamente dita.

Além disso, o problema de Riemann se torna muito mais difícil quando a equação de estado não pode ser representada por um simples politrópico como presuppõe a abordagem de Godunov.

## **CAPÍTULO III — EXPLOSÃO DE SUPERNOVAS**

Introdução

A Pré-Supernova

Supernovas Tipo II

O Modelo de Lagrangiana Efetiva

### III-1 INTRODUÇÃO

Ao longo de sua história, o homem foi impelido à observação do céu por razões que vão do misticismo à economia. O acompanhamento do movimento dos corpos celestes permitia estabelecer as mudanças climáticas associadas às estações do ano e com isso regular as atividades agrícolas. O Sol, a Lua, e os planetas visíveis, deslocando-se contra o fundo de estrelas ofereciam-se como reguladores naturais do tempo e, dessa forma, foram os nossos primeiros relógios. As estrelas fixas formavam o firmamento imutável que servia ( e serve até hoje) como sistema de referência para a prática astronômica. Exceto pelas corriqueiras quedas de meteoros, ou pela passagem de um cometa proeminente, a abóboda celeste parecia inalterável.

Esta visão aristotélica do mundo ficou, no entanto, seriamente abalada após a aparição, extremamente rara, de estrelas muito brilhantes e efêmeras, e que foram, logo de início, denominadas de “Estrelas Novas”.

As de vida mais curta, são conhecidas hoje por Novas comuns. Aquelas que perderam brilhantes no céu por muitos meses são classificadas como Supernovas, desde que o termo foi introduzido em 1933.

Atualmente, a Física Nuclear fornece as chaves para a compreensão da estrutura e evolução das estrelas. É através do cálculo das taxas das reações nucleares que podemos detalhar as condições nas quais a radiação é produzida e re-absorvida pela matéria, do centro até as camadas mais altas da atmosfera da estrela.

Com a teoria da evolução estelar podemos descrever todas as transformações — desde a lenta condensação gravitacional de uma nuvem de gás frio e rarefeito, sua ignição como uma jovem estrela, as transformações sofridas ao longo de sua vida quando passa de um ciclo nuclear para outro — até que, com o esgotamento de todas suas fontes de energia, vem a morte súbita, como no caso de um colapso gravitacional seguido de explosão, ou lenta e gradual, como uma estrela de ferro, fria e sem luz.

A composição química da nuvem inicial pode ser estabelecida com base num dos muitos modelos de evolução do universo. A distribuição típica em massa, entretanto, varia pouco de um modelo para outro, ficando em torno de 73% de hidrogênio, 25% de hélio, e 2% de elementos mais pesados.

A massa inicial dessa nuvem é o parâmetro fundamental que determinará os detalhes de toda a vida futura da estrela e, até mesmo, a forma com que se dará o desfecho final.

Partindo de menos material, uma nuvem leva mais tempo para formar a estrela, e esta, por sua vez, por ser pouco massiva, irá consumindo hidrogênio só muito lentamente. Poderá mais tarde vir a queimar hélio e outros núcleos mais pesados, porém, os processos serão de tal modo lentos que a estrela, possivelmente, irá perdurar por uma idade comparável á do universo.

Nuvens muito massivas dispõem inicialmente de mais combustível termo-nuclear. A rapidez com que o consome, no entanto, faz com que sejam esgotadas as reservas de cada ciclo nuclear e atinjam a exaustão num tempo relativamente curto. Em suma, uma estrela massiva apresenta um metabolismo tão acelerado que o prognóstico é a morte súbita.

Uma das mais espetaculares supernovas deve ter sido a de 185 A.C. cujo remanescente se apresenta hoje como uma intensa fonte de raios-X. Dentre as supernovas efetivamente observadas, sem dúvida, a mais brilhante foi a que surgiu na noite de 1 de maio de 1006 D.C. Ela deve ter sido quase tão brilhante quanto a Lua Cheia e sua evolução foi detidamente acompanhada pelos astrônomos chineses e europeus.

Poucos anos depois, em 1054, os chineses foram os únicos a registrar a famosa supernova da Nebulosa do Caranguejo. Seus remanescentes formam hoje uma imponente estrutura no céu, consistindo de brilhantes filamentos gasosos.

Enquanto os remanescentes das duas primeiras supernovas formam halos esféricos brilhantes que resultaram da onda de choque destruidora da estrela, naquele da supernova do Caranguejo, pelo contrário, todo o volume da envoltória é fortemente radiante. Isto está relacionado ao fato de, no centro da nebulosa, haver subsistido uma estrela de neutrons que emite até hoje, como um pulsar, radiação eletromagnética em todos os comprimentos de onda e a intervalos extremamente regulares.

A primeira supernova registrada por um profissional foi a de 1572 na constelação de Cassiopéia, e a descoberta coube ao astrônomo dinamarques Tycho Brahe que pôde determinar precisamente sua posição ao longo dos vários meses em que ficou visível. O remanescente da supernova de Tycho Brahe oferece uma bela imagem em raio-X, porém, não há nenhum pulsar em seu interior.

A seguinte atraiu, naturalmente, a atenção de toda a comunidade de astrônomos da época e pode ser acompanhada durante um ano inteiro. Foi a de 1604 e que ficou conhecida como supernova de Kepler. Por ter sido observada desde o início, antes mesmo de atingir o máximo de luminosidade, sua curva de luz pode hoje ser estimada com um certo grau de precisão.

Existe uma outra supernova galáctica cujo remanescente se apresenta atualmente como uma importante radiofonte na constelação de Cassiopéia. Estima-se que haja explodido entre 1650 e 1680 sendo que, inexplicavelmente, passou despercebida pelos astrônomos da época. Por isso mesmo é conhecida simplesmente por Cas A.

O advento da moderna Astronomia nos colocou à disposição um verdadeiro arsenal de instrumentos e técnicas mas a fortuna fez com que nenhuma outra supernova galáctica surgisse desde então. Exceto, é claro a supernova 1987A. Se bem que esta tenha ocorrido não exatamente na nossa própria Galáxia, mas sim na Grande Nuvem de Magalhães, uma das duas galáxias satélite da Via-Lactea.

Supernovas extra-galácticas, por outro lado, têm sido observadas em abundância. Todo ano, cerca de 30 supernovas são registradas e existem atualmente mais de 800 observações acumuladas. São tantas, que cada uma recebe, não um nome, mas sim um código formado pelo ano da descoberta e uma letra do alfabeto.

Estimativas tem sido feitas (Tammann 1982) de que devam ocorrer em torno de 4 supernovas a cada século na nossa própria galáxia. A emissão ótica dessas ocorrências é, entretanto, obscurecida pela poeira interestelar, o que impede a sua visão.

Indubitavelmente, a supernova mais bem observada foi a 1987A, a primeira capaz de ser vista a olho nu em quase 400 anos. Ela ocorreu relativamente próximo, pôde ser observada com os mais modernos equipamentos, e por isso teve a curva de luz medida desde os primeiros instantes. Na verdade, os neutrinos puderam ser detetados

até mesmo com cerca de 3 horas de antecedência. Isto porque essas partículas foram emitidas diretamente pelo núcleo da estrela quando o manto e o envelope ainda não haviam sequer sofrido os efeitos da explosão catastrófica que estava por vir.

Os pioneiros no estudo destas explosões estelares foram o físico suíço Fritz Zwicky e o astrônomo alemão Walter Baade sendo os que, inclusive, usaram pela primeira vez o termo supernova. Esses dois pesquisadores realizaram um estudo sistemático da ocorrência de supernovas através de um levantamento fotográfico em câmaras Schmidt. Chapas de uma mesma região do céu, tomadas porém em épocas diferentes, eram comparadas nas chamadas máquinas "Blink", equipamento especialmente desenvolvido para esse fim, as quais, por meio de um jogo de espelhos, exibiam, em rápida alternância, uma foto de cada vez. A ocorrência de uma supernova se tornava assim facilmente identificada no aparelho como um ponto que pisca. A curva de luz e o espectro de muitas supernovas puderam desde então ser medidos. Logo se percebeu que haveriam pelo menos dois tipos básicos de supernovas: As que revelavam linhas de emissão de hidrogênio foram classificadas como do tipo II; em caso contrário, como do tipo I. Geralmente apresentavam uma meia-vida para o decaimento da luminosidade de aproximadamente 50 dias.

Num clássico artigo de 1934 Fritz e Baade propuseram que a colossal energia liberada durante a explosão de uma supernova advém do colapso gravitacional da estrela progenitora, e do qual resultaria uma estrela de neutrons. O conceito teórico de uma estrela constituída somente de neutrons, com um raio de cerca de 10km, havia sido introduzido dois anos antes por Landau . Esse é o mecanismo básico, aceito até hoje, para explicar a explosão de supernovas tipo II.

A sequência de eventos que leva às supernovas tipo I ainda envolve algumas controvérsias mas, basicamente, acredita-se que esteja relacionada à explosão de uma anã branca em processo de acreção de massa de uma companheira, em um sistema binário

cerrado. A anã branca, composta provavelmente de carbono e oxigênio é levada à instabilidade termo-nuclear quando acumula material até se aproximar da massa crítica de Chandrasekhar. Esse é o modelo mais aceito, e foi primeiramente proposto por Hoyle e Fowler em 1960.

A ausência de linhas de hidrogênio nas supernovas tipo I ficaria então explicada, uma vez que não se espera encontrar hidrogênio em anãs-brancas e todo o hidrogênio que lentamente for sendo transferido da companheira para a anã-branca será rapidamente convertido em hélio. Com a detonação termonuclear não haveria formação de qualquer objeto compacto central, e daí não se ter, até hoje, observado um pulsar ou um buraco negro remanescente de explosão de supernova tipo I.

É um resultado da observação que as supernovas do tipo I aparecem associadas às estrelas do halo galáctico, pobres em metais (População II). Elas sempre apresentam, em instantes correspondentes, curvas espectrais muito parecidas entre si e, além disso, exibem um arranjo confuso de bandas de emissão de origem um tanto obscura.

Já as supernovas do tipo II revelam um espectro basicamente contínuo, um pouco mais intenso para o lado do ultra-violeta, e no qual aparecem superpostas fortes linhas de emissão. Elas costumam surgir entre as estrelas dos braços espirais e do centro galáctico, e de rico conteúdo metálico, (População I).

Algumas outras classificações têm sido usadas e muitas mais têm sido propostas. Umás estabelecem grupos de I a V, outras subdividem os grupos I e II em subgrupos: Ia, Ib, Ic; e II L, II P, etc. Nesse campo, quanto mais se tem aprendido sobre os aspectos observacionais, mais sofisticados têm sido os esquemas de classificação propostos e, pode ser que, no final, cada supernova acabe sendo considerada como um evento único em sua categoria.

Do ponto de vista teórico, como se vê, os dois tipos de supernovas são totalmente distintos, havendo somente em comum a colossal energia liberada, que em ambos os casos supera em geral  $10^{51}$  erg. É usual nessa área de pesquisa a adoção da unidade *foe* =  $10^{51}$  erg, (*f.o.e* = *ten to fifth one ergs*, *foe* = destruidor em Inglês). Isto corresponde a uma quantidade de energia equivalente a toda a energia nuclear disponível em uma estrela típica. O material ejetado com a explosão, em torno de uma massa solar, atinge velocidades da ordem de  $10^9$  cm/s e corresponde a uma fração considerável da massa da estrela primordial.

Mais precisamente, as supernovas tipo I são em geral um pouco mais luminosas, alcançando uma magnitude absoluta de  $-18$ . As do tipo II, são menos uniformes neste aspecto, e ficam em torno de  $-16$  (um fator de 5 na potência ótica emitida).

Na Tabela III-1 apresentamos um resumo das características dos dois tipos de supernovas.

Tabela III-1

Supernova	I	II
Hidrogênio	N	S
Magnitude Abs.	$\sim -18$	$\sim -16$
Lumin. Max. (erg/s)	$10^{43}$	$10^{42}$
Massa ejetada	$0.1M_{\odot}$	$1M_{\odot}$
Energ. ótica	$.04foe$	$.02foe$
Energ. cinética	$\sim 10^{-6}foe$	$\sim 1foe$
População	II	I
Pulsar	N	S
Progenitora	$\gtrsim 10M_{\odot}$	$\sim 2M_{\odot}$

Uma supernova brilhante pode ofuscar a própria galaxia onde está inserida. Realmente, algumas vezes, uma supernova chega a emitir mais energia luminosa do que todas as outras estrelas da galáxia somadas.

O que pode ser mais surpreendente é que toda a energia emitida na forma de radiação eletromagnética, somada em todos os comprimentos de onda, corresponde a apenas 10% da energia cinética da massa ejetada pela explosão de uma supernova tipo II. Mas, o que, sem dúvida, é perturbador, é que uma supernova desse tipo, emite 100 vezes mais energia na forma de neutrinos do que na forma de energia cinética e eletromagnética.

Na verdade, durante uns poucos segundos, e antecedendo a própria explosão “ótica” de várias horas, a potência emitida na forma de neutrinos é tal que a supernova chega a “brilhar” mais do que o todo o Universo.

Pelo que foi discutido mais acima, o mecanismo de explosão termonuclear das supernovas tipo I é bastante dependente dos detalhes da física e da particular composição química adotada para a anã branca progenitora.

Não fica muito claro, além disso, de que forma se inserem os fenômenos hidrodinâmicos no mecanismo explosivo das supernovas tipo I. De acordo com o modelo, pode se ter a ocorrência de detonações, nas quais a combustão termonuclear se propaga supersonicamente e onde a pressão, temperatura e densidade aumentam abruptamente com a passagem da onda de choque; ou deflagrações, nas quais a queima do material evolui de forma subsônica e contínua.

O objetivo principal deste trabalho é a aplicação e teste de um novo formalismo para o tratamento dos problemas da hidrodinâmica de ondas de choque. Conseqüentemente, nos restringiremos a partir deste ponto a considerar somente as supernovas do tipo II, para as quais está bem definida a seqüência de eventos que se inicia com o colapso gravitacional, passa pela inversão através do golpe hidrodinâmico e geração de onda de choque, terminando com a explosão da estrela primordial e formação de um objeto compacto central. Neste contexto, o papel das ondas de choque, quaisquer que sejam os detalhes de modelo, é sempre essencial.

### III-2 A PRÉ-SUPERNOVA.

Os detalhes da estrutura da pré-supernova podem variar de uma estrela para outra, mas o colapso gravitacional e, toda a sequência de acontecimentos que a partir daí é desencadeada, são basicamente independentes dessa estrutura inicial.

Apresentamos na figura (3.1) as condições típicas de uma pré-supernova de acordo com Woosley e Weaver (1986). A estrela dispõe de várias camadas nas quais a energia é produzida por reações nucleares. A densidade e temperatura médias da camada crescem com o número atômico do núcleo em combustão. A massa do núcleo de ferro fica em torno de  $1.4M_{\odot}$ . A massa inicial da estrela define a estrutura final da pré-supernova, e por isso, outras configurações são obtidas para massas diferentes. A Figura (3.2) resume de forma aproximada a informação contida na Figura (3.1).

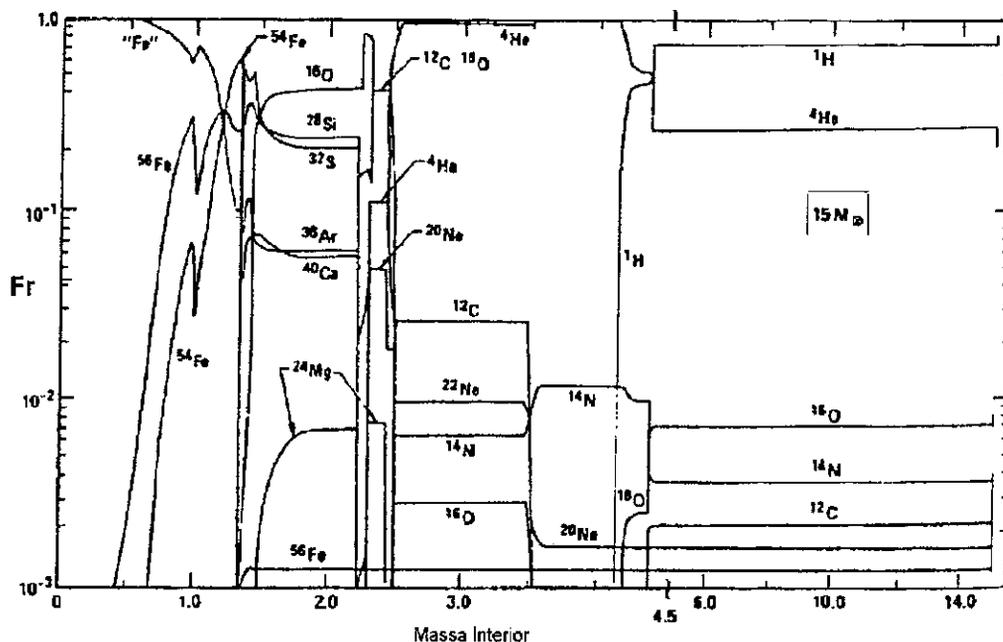


Figura: 3.1. Estrutura e composição química de uma pré-supernova com  $15M_{\odot}$  no instante em que a superfície de seu núcleo de ferro começa a colapsar a uma velocidade de  $1000\text{km/s}$ .  $Fr$  é a fração de massa. No centro, a temperatura é  $\sim 7 \times 10^9 \text{ K}$  e a densidade  $\sim 10^{10} \text{ g/cm}^3$ . Em "Fe" estão incluídos todos os isótopos com  $48 \lesssim A \lesssim 65$  e com um excesso de neutrons maior do que o do  $^{56}\text{Fe}$ . Observar o corte em  $4.5M_{\odot}$ . Adaptado de Woosley e Weaver, 1986

Uma estrela que tenha exaurido seu combustível nuclear, e na qual a massa do núcleo tenha atingido o limite de Chandrasekhar, irá obrigatoriamente sofrer um colapso gravitacional catastrófico.

Dadas as condições iniciais, os cálculos do colapso não oferecem grandes dificuldades pois, como a escala de tempo é da ordem de  $0.1\text{seg}$ , as trocas de energia se tornam desprezíveis. A radiação eletromagnética fica confinada devido à alta densidade, e a condução eletrônica de calor não chega a se tornar eficiente. Cada elemento de massa

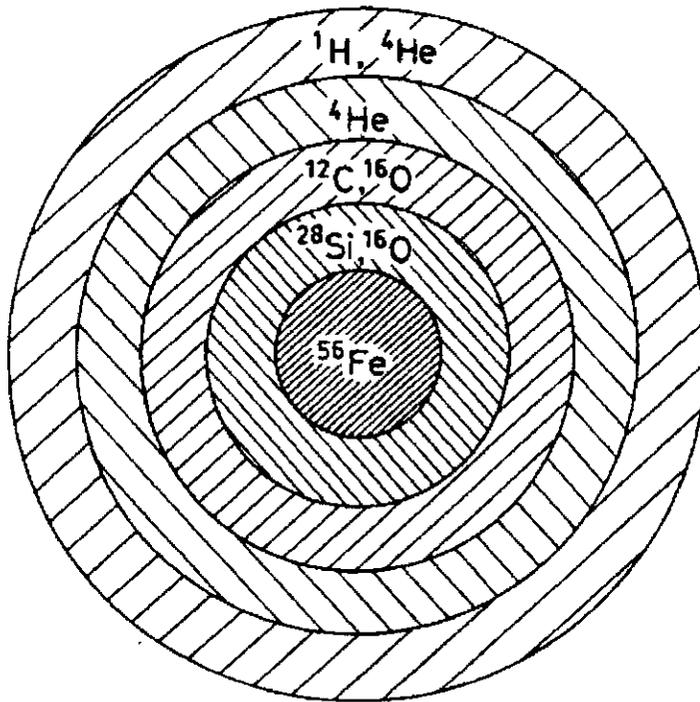


Figura: 3.2. Representação esquemática da estrutura da pré-supernova da figura (3.1). Estão indicados os elementos mais abundantes em cada camada. O envelope é a camada mais externa, composta predominantemente de  $^1\text{H}$ . O manto é formado pelas três camadas internas, onde não se encontra  $^1\text{H}$ . O núcleo central é constituído de  $^{56}\text{Fe}$  e isótopos do mesmo grupo.

retém, durante a maior parte do colapso, sua entropia inicial, a menos de uma pequena correção devido à captura eletrônica.

Para a fase do colapso, o que realmente determina a evolução é a equação de estado do material:  $P = P(\rho, S)$ . A contribuição dominante vem do gás de elétrons relativísticos e degenerados, cuja pressão é dada por:

$$P_e \simeq \frac{1}{4} Y_e \mu_e \rho, \quad (3.1)$$

onde  $P_e$  é a pressão eletrônica,  $\rho$  a densidade em  $\text{g/cm}^3$ , e  $Y_e$  o número de elétrons por nucleon, e  $\mu_e$  é o potencial químico dos elétrons:

$$\mu_e \simeq 1.11(\rho Y_e)^{1/3} \text{MeV}. \quad (3.2)$$

A pressão de radiação e a pressão nuclear são de menor importância para a fase inicial.

Uma descrição analítica bastante elegante do colapso pôde ser obtida primeiramente por Goldreich e Weber em 1980 e mais tarde estendida por Yahil (1983) para os casos em que o índice adiabático se encontra no intervalo  $6/5 \leq \gamma \leq 4/3$ .

Os cálculos hidrodinâmicos até então realizados indicam que, dos estágios iniciais do colapso até pelo menos se atingir uma densidade de  $\sim 10^{12} \text{g/cm}^3$ , a entropia permanece aproximadamente constante, ou seja, o colapso é quasi-adiabático e poderia, segundo Yahil, ser descrito por uma equação de estado dependente exclusivamente da densidade, e dada por:

$$P = K\rho^\gamma. \quad (3.3)$$

Uma equação de estado deste tipo é conhecida em astrofísica como *politropica*.

O ponto essencial desta abordagem está em que somente duas constantes físicas participam do problema:  $K$  e a constante gravitacional  $G$ . Não é possível, por razões simplesmente dimensionais, destas duas constantes extrair uma quantidade com dimensões de comprimento.

Das expressões dimensionais de  $K$  e  $G$ :

$$K : \frac{M^{1-\gamma} L^{3\gamma-1}}{T^2}, \quad (3.4)$$

$$G : \frac{L^3}{MT^2}, \quad (3.5)$$

depois de eliminar a massa  $M$ , podemos verificar que a única combinação adimensional do raio  $r$  e do tempo  $t$  é:

$$X = K^{-1/2} G^{(\gamma-1)/2} (-t)^{\gamma-2} r, \quad (3.6)$$

onde a origem do tempo é escolhida como sendo o instante final do colapso, quando a densidade atingiria um valor infinito.

Dito de outra forma, se  $f(r, t)$  é solução do problema, então,  $f(\alpha r, \alpha^{1/(2-\gamma)} t)$  também o será. O colapso, conseqüentemente evolui no tempo com uma simples mudança de escala e as soluções devem ser auto-similares.

Todas as variáveis hidrodinâmicas podem ser expressas como função somente da variável de similaridade  $X$ , e de  $G$ ,  $K$  e do tempo  $(-t)$ . (O sinal  $-$  decorre da origem adotada). A análise dimensional fornece:

$$\rho = (-t)^{-2} G^{-1} D(X), \quad (3.7)$$

$$v = (-t)^{1-\gamma} K^{1/2} G^{(1-\gamma)/2} V(X), \quad (3.8)$$

$$m = (-t)^{4-3\gamma} K^{3/2} G^{(1-3\gamma)/2} M(X), \quad (3.9)$$

$$\varepsilon = (-t)^{6-5\gamma} K^{5/2} G(3-5\gamma)/2E(X), \quad (3.10)$$

onde  $m$  e  $E$  são definidos por:

$$M(X) = 4\pi \int_0^X dx x^2 D(x), \quad (3.11)$$

$$E(X) = 4\pi \int_0^X dx x^2 D(x) \left[ \frac{V^2(x)}{2} + \frac{D^{\gamma-1}(x)}{(\gamma-1)} - \frac{M(x)}{x} \right]. \quad (3.12)$$

Substituindo essas expressões na equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (3.13)$$

na equação de Euler,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla (1/2|v|^2) + (\nabla \wedge v) \wedge v + \nabla h + \nabla \phi = 0, \quad (3.14)$$

e na equação de Poisson,

$$\nabla^2 \phi - 4\pi G \rho = 0, \quad (3.15)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional,  $h$  é a função  $h = \int dp/\rho$  e  $\phi$  é o potencial gravitacional,

Yahil obteve:

$$[V + (2 - \gamma)X] \frac{D'}{D} + V' = -2 - 2\frac{V}{X}, \quad (3.16)$$

e

$$\gamma D^{\gamma-2} D' + [V + (2 - \gamma)X] V' = -\frac{M}{X^2} - (\gamma - 1)V. \quad (3.17)$$

O apóstrofe indica derivação com relação a  $X$ .

Adotando o sistema de referência comovente do colapso homólogo, a velocidade de um elemento pôde ser escrita como:

$$V = (\gamma - 2)X + U, \quad (3.18)$$

resultando em que a conservação da massa passa a ser expressa por

$$\frac{UD'}{D} + U' = 4 - 3\gamma - 2\frac{U}{X}, \quad (3.19)$$

que após integração fornece:

$$4\pi X^2 DU = (4 - 3\gamma)M. \quad (3.20)$$

E, a equação de Euler se re-escreve como:

$$D^{\gamma-2} D' + UU' = -\frac{M}{X^2} + (\gamma - 1)(2 - \gamma)X + (3 - 2\gamma)U. \quad (3.21)$$

Através da integração numérica dessas duas últimas expressões, Yahil mostrou que o núcleo da estrela pode ser dividido em uma região central, na qual as velocidades são descritas aproximadamente por

$$V(r) \sim \alpha r, \quad (3.22)$$

e, numa região externa em que o campo de velocidades é proporcional a um campo de velocidades de queda livre. O limite entre as duas regiões corresponde ao ponto de máxima velocidade.

Os estágios finais do colapso são, por sua vez, de difícil descrição, não só devido ao caráter manifestadamente irreversível e não adiabático dessa etapa, mas também, em consequência do papel exercido pelos neutrinos.

Nas condições de densidade e temperatura encontradas nos momentos cruciais do colapso, eles são produzidos abundantemente e, sem dúvida, representam a principal fonte de perda de energia.

Uma vez que interagem fracamente com a matéria, podem facilmente escapar para o espaço exterior sem transportar energia de um ponto a outro da estrela. A questão é que, se o material estelar chegar sofrer altíssimas compressões, uma pequena parcela dos neutrinos pode ser capturada e dessa forma afetar o mecanismo de explosão.

A inversão do colapso só poderá se dar quando a densidade superar a densidade nuclear normal, e então, devido ao endurecimento da matéria, o termo de pressão nuclear atinge valores extremamente altos a ponto de estancar abruptamente o processo implosivo.

### III-3 SUPERNOVAS TIPO II

Os cálculos detalhados do mecanismo de explosão das supernovas tipo II como resultado de um colapso gravitacional de uma estrela massiva foram primeiramente realizados por Colgate e White, (1966). As idéias básicas contidas nesse artigo descrevem o que hoje é conhecido na literatura como o modelo de *prompt-shock*.

Logo ficou evidente a necessidade de se considerar corretamente o papel dos neutrinos pois, devido ás altas temperaturas e pressões originadas logo após a passagem da frente de onda de choque, a fuga de energia através dos neutrinos é tão eficiente que chega a ponto de inviabilizar o *prompt-shock*.

Num segundo e mais detalhado modelo, Bowers e Wilson (1982) incluíram um pormenorizado cálculo do mecanismo de transporte de neutrinos. Com o núcleo da estrela a uma temperatura em torno de  $10^{11}$  K, a maior parte da energia é vertida na forma de neutrinos em apenas alguns segundos. Se uma pequena parte for recapturada,

o material estelar poderá ser acelerado a ponto de reativar a explosão. É o chamado modelo do *delayed-shock*.

A maioria dos cálculos adotada a gravitação newtoniana, com simetria esférica unidimensional, a fim de evitar uma complexidade maior. Algumas simulações tem incluído a relatividade geral, e outras, mais recentes, adotaram uma representação bidimensional da estrela.

Em todos os modelos, no entanto, os cálculos são realizados sobre uma rede de integração com um número muito grande de pontos e, o que nos oferece interesse particular, incluem um termo de pseudo-viscosidade nas equações da hidrodinâmica.

Uma vez que se estima que o campo magnético e o momento angular têm pouca influência (para valores razoáveis dessas quantidades) a simetria esférica é suficiente para a representação dos aspectos dinâmicos relevantes do problema. Entretanto, muito recentemente, cálculos em duas dimensões tem sido feitos (v.e. Herant, et al., 1994) com o objetivo de incluir os efeitos das instabilidades convectivas como forma de resolver o confinamento dos neutrinos e permitir uma evolução dinâmica que resulte em explosão.

No contexto do modelo de *prompt-shock*, o campo gravitacional é introduzido como uma função simples, dependente somente do raio. A emissão e deposição de neutrinos é levada em conta através de fontes e sorvedouros de energia na expressão da energia total.

De acordo com o discutido mais acima, o transporte de energia por radiação e a condução térmica dos elétrons são usualmente desprezadas devido à escala de tempo do fenômeno.

Quase sempre adota-se coordenadas lagrangianas para a especificação das variáveis hidrodinâmicas. Com esse procedimento, a massa  $m$  de cada célula de integração é

tomada como variável lagrangiana (no sentido da hidrodinâmica), função do tempo  $t$  e da posição  $r$ ; enquanto que  $r(m, t)$  é relacionado ao campo de velocidades por:  $v = (\partial r / \partial t)_m$ . A equação da conservação da massa toma a forma:

$$m(r, t) = m(r_0, 0). \quad (3.23)$$

A conservação do momento, por sua vez, se escreve:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial m} (P + Q) - \frac{mG}{r^2}. \quad (3.24)$$

E a conservação da energia é dada por:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -(P + Q) \frac{\partial \nu}{\partial t} + s. \quad (3.25)$$

onde  $P(\varepsilon, \nu)$  é a pressão,  $\nu$  é o volume específico ( $1/\rho$ ),  $\varepsilon$  é a energia interna específica,  $G$  é a constante da gravitação.

O termo  $s$  é introduzido na equação da energia para simular as fontes e sorvedouros devidos à emissão e absorção de neutrinos.  $Q$  é a pressão originada pela pseudo-viscosidade de VonNeumann-Richtmyer e tem por função atenuar as oscilações numéricas espúrias, transformando energia cinética em calor.

A temperatura pode ser determinada através da equação de estado escrita na forma:

$$T = T(\varepsilon, \nu). \quad (3.26)$$

Particularmente, o método de VonNeumann-Richtmyer tem sido empregado de forma padrão em todos estudos numéricos de integração das equações hidrodinâmicas visando a descrição do colapso do núcleo estelar e a subsequente inversão e explosão

de supernova. Ela é essencial, nesses estudos, para garantir a atenuação de oscilações numéricas espúrias que são formadas após a passagem de uma frente de choque e dessa forma manter a estabilidade de todo o cálculo.

Entre outras vantagens, a viscosidade artificial é facilmente introduzida nos cálculos e exige um mínimo de tempo de processamento de uma CPU; ela surge também como um procedimento de trabalho extremamente eficiente pois, através do ajuste de um único parâmetro livre, consegue-se suavizar a frente de choque para que ocupe pelo menos algumas células de integração, ao mesmo tempo que atenuam-se as oscilações numéricas espúrias que ocorrem após a passagem da frente de choque.

Não obstante o sucesso consagrado pelo uso, ainda perduram algumas questões. Uma série de testes específicos foi realizada por Noh (1987) e apontou alguns problemas e deficiências associados ao uso da pseudo-viscosidade, tais como: produção de calor; propagação de erros numéricos em algumas configurações da malha de dados; e, o que apresenta um particular interesse, a introdução de erros quando da propagação de ondas de choque numa simetria esférica.

Mais recentemente, Martí et al. (1990), realizaram uma comparação direta entre cálculos baseados no método de Riemann linearizado e as técnicas hidrodinâmicas convencionais que incluem a pseudo-viscosidade. Nesse trabalho foram desenvolvidas simulações numéricas do colapso estelar em uma dimensão com o uso de uma equação de estado simples. O objetivo central era examinar até que ponto a pseudo-viscosidade poderia estar afetando os resultados computacionais relacionados à explosão de supernovas. Por essa razão, esses cálculos foram realizados sem considerar o papel dos neutrinos ou os efeitos física nuclear. Foram encontradas diferenças muito grandes (fatores da ordem de 1.4 a 2.3 nas várias variáveis) entre as duas simulações, apesar de naturalmente, estarem usando a mesma equação de estado e quadro físico geral. De

acordo com o citado artigo, as diferenças parecem estar associadas ao uso da viscosidade artificial de Neumann e surgem principalmente durante a formação e propagação da frente de onda de choque.

Como uma forma de contornar esses problemas, Janka et al. (1993) recomendam fortemente a substituição da pseudo-viscosidade de Neumann por uma forma tensorial de viscosidade artificial. Mesmo assim, os autores apontam a necessidade de se escolher com muito cuidado o valor da constante adimensional que ajusta a grandeza da pseudo-viscosidade tensorial e sugerem que testes numéricos sejam feitos para a determinação do seu valor ótimo, adaptado a cada problema particular e ao espaçamento da rede utilizado.

### III-4 FORMALISMO LAGRANGEANO.

Com o objetivo de se obter uma descrição global do fenômeno de explosão de supernovas, desenvolvemos inicialmente um formalismo lagrangiano (no sentido da Mecânica, não da representação hidrodinâmica) que se propunha a estabelecer um mapeamento físico das equações hidrodinâmicas em um sistema de lagrangiana efetiva (Rodrigues et al., 1992).

Estávamos interessados em investigar os aspectos dinâmicos globais do mecanismo explosivo de supernovas, sua relação aos aspectos gerais de uma configuração de pré-supernova, e a equação de estado da matéria estelar em suas características mais genéricas.

Além disso, procurávamos evitar os procedimentos usuais que levam à solução das equações da hidrodinâmica de uma supernova através da transformação das correspondentes equações diferenciais parciais em equações de diferenças finitas. Isto porque, para

resolver numericamente a hidrodinâmica do sistema na presença de ondas de choque, esta abordagem convencional exige um número excessivamente grande de variáveis a fim de manter uma boa aproximação matemática.

Nossa intenção, nesse primeiro trabalho, era evitar as aproximações baseadas meramente na necessidade de precisão numérica dos algoritmos adotados para resolver as equações diferenciais parciais da hidrodinâmica.

Escrevemos então uma correspondente função lagrangiana que descreve a estrela como um todo, para então, a partir dela, derivar as equações de movimento do sistema.

Dividimos o caroco estelar de uma pré-supernova em  $n$ - camadas caracterizadas pelos raios  $\vec{R} = [R_1, R_2, \dots, R_n]$  e com densidades médias dadas por  $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\}$ . As massas de cada camada são mantidas constantes no tempo e iguais à

$$m_i = \frac{4\pi}{3} \rho_i (R_i^3 - R_{i-1}^3), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.27)$$

Nessa equação,  $R_0 = 0$  por convenção.

Negligenciando as possíveis perdas de energia, podemos escrever a lagrangiana do sistema

$$\begin{aligned} L &= L(\{R_i\}, \{\dot{R}_i\}) \\ &= K - V_G - E_{int}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde  $K$ ,  $V_G$  e  $E_{int}$  são respectivamente a energia cinética associada ao movimento hidrodinâmico da matéria, a energia gravitacional total e a energia interna total.

As quantidades  $K$  e  $E_{int}$  são a soma das contribuições de cada camada, ou seja,  $K = \sum_{i=1}^n K_i$  e  $E_{int} = \sum_{i=1}^n E_i$ .

A energia cinética da  $i$ -ésima camada é calculada por

$$K_i = \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{r} \rho_i \mathbf{v}_i^2(\mathbf{r}), \quad (3.29)$$

onde  $\mathbf{v}_i(\mathbf{r})$  representa o campo velocidade no interior da  $i$ -ésima camada. O campo de velocidade deve ser determinado a partir da equação da continuidade. Para uma camada esfericamente homogênea, temos:

$$v(r) = \frac{(\dot{R}_i R_i^2 - \dot{R}_{i-1} R_{i-1}^2) r^3 + (\dot{R}_{i-1} R_{i-1}^2 R_i^3 - \dot{R}_i R_i^2 R_{i-1}^3)}{r^2 (R_i^3 - R_{i-1}^3)}, \quad R_{i-1} \leq r \leq R_i, \quad (3.30)$$

o qual satisfaz as condições de contorno  $v(r = R_{i-1}) = \dot{R}_{i-1}$ , e  $v(r = R_i) = \dot{R}_i$ . Aqui também, para  $i = 0$ , adotamos a convenção  $R_0 = 0$  e  $\dot{R}_0 = 0$ .

Com esse campo de velocidades, a energia cinética da  $i$ -ésima camada é dada por:

$$K_i = \frac{3}{10} (\dot{R}_{i-1} \quad \dot{R}_i) \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{R}_{i-1} \\ \dot{R}_i \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

onde

$$T_{11} = \frac{5\xi_i^3 + 6\xi_i^2 + 3\xi_i + 1}{(1 + \xi_i + \xi_i^2)^3} m_i; \quad (3.32)$$

$$T_{12} = T_{21} = \frac{3 \xi_i^2 (\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)}{2 (1 + \xi_i + \xi_i^2)^3} m_i; \quad (3.33)$$

$$T_{22} = \frac{\xi_i^3 (\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)}{(1 + \xi_i + \xi_i^2)^3} m_i; \quad (3.34)$$

com  $\xi_i \equiv R_i/R_{i-1}$ .

A energia potencial gravitacional se escreve como:

$$V_G = -\frac{G}{R_{i-1}} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{3}{5} m_i f(\xi_i) + \frac{3}{2} M_i g(\xi_i) \right] m_i, \quad (3.35)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional, e

$$f(\xi_i) = \frac{(2\xi_i^3 + 4\xi_i^2 + 6\xi_i + 3)}{2(1 + \xi_i + \xi_i^2)}, \quad (3.36)$$

$$g(\xi_i) = \frac{(1 + \xi_i)}{(1 + \xi_i + \xi_i^2)^2}, \quad (3.37)$$

com

$$M_i = \begin{cases} 0, & \text{para } i = 1; \\ \sum_{j=1}^{j=i} m_j & \text{para } i \geq 2. \end{cases} \quad (3.38)$$

O primeiro termo na Eq.(3.35) é a energia gravitacional de auto interação da  $i$ -ésima camada, e o último termo surge da interação entre as camadas.

A energia interna de cada camada é expressa como

$$E_i = m_i \epsilon_i, \quad (3.39)$$

onde  $\epsilon_i$  é a densidade de energia por unidade de massa da  $i$ -ésima camada dada pela equação de estado como uma função de  $\rho$ .

As equações de Euler-Lagrange levam à equação de movimento,

$$\hat{T} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \hat{T}' \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \mathbf{F}, \quad (3.40)$$

onde  $\hat{\mathbf{T}}$  e  $\hat{\mathbf{T}}'$  são as matrizes  $n \times n$  dadas por

$$\hat{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(2)} & T_{12}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ T_{21}^{(2)} & T_{22}^{(2)} + T_{11}^{(3)} & T_{12}^{(3)} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & T_{21}^{(3)} & T_{22}^{(3)} + T_{11}^{(4)} & T_{12}^{(4)} & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & T_{21}^{(n-1)} & T_{22}^{(n-1)} + T_{11}^{(n)} & T_{12}^{(n)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & T_{21}^{(n)} & T_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

e

$$\hat{\mathbf{T}}' = -\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{T}}, \quad (3.42)$$

onde  $T_{lm}^{(i)}$  é o elemento de matriz da  $i$ -ésima camada especificado pelas equações (3.32 - 3.34). O termo de força  $\mathbf{F}$  é dado por

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{20\pi}{3}(P_1 - P_2)R_1^2 - \frac{G}{R_1^2}[M_1^2 f_2^{(1)} + M_2^2 f_1^{(2)} + \frac{5}{2}(m_1 M_1 g_2^{(1)} + m_2 M_2 g_1^{(2)})] \\ \frac{20\pi}{3}(P_2 - P_3)R_2^2 - \frac{G}{R_2^2}[M_2^2 f_2^{(2)} + M_3^2 f_1^{(3)} + \frac{5}{2}(m_2 M_2 g_2^{(2)} + m_3 M_3 g_1^{(3)})] \\ \vdots \\ \frac{20\pi}{3}(P_i - P_{i+1})R_i^2 - \frac{G}{R_i^2}[M_i^2 f_2^{(i)} + M_{i+1}^2 f_1^{(i+1)} + \frac{5}{2}(m_i M_i g_2^{(i)} + m_{i+1} M_{i+1} g_1^{(i+1)})] \\ \vdots \\ \frac{20\pi}{3}P_n R_n^2 - \frac{G}{R_n^2}[M_n^2 f_2^{(n)} + \frac{5}{2}m_n M_n g_2^{(n)}] \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

onde  $P_n$  é a pressão do gás em cada camada, e

$$f_1^{(i)} = \frac{3(\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)}{2(1 + \xi_i + \xi_i^2)^3}, \quad (3.44)$$

$$f_2^{(i)} = \frac{\xi_i^3(\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)}{(1 + \xi_i + \xi_i^2)^3}, \quad (3.45)$$

$$g_1^{(i)} = \frac{2\xi_i + 1}{(1 + \xi_i + \xi_i^2)^2}, \quad (3.46)$$

$$g_2^{(i)} = \frac{\xi_i^3(\xi_i + 2)}{(1 + \xi_i + \xi_i^2)^2}. \quad (3.47)$$

Note-se que obtivemos, com esse primeiro tratamento, um conjunto de equações diferenciais ordinárias (eq.3.40) ao invés de equações diferenciais parciais como é usual com a abordagem hidrodinâmica do problema. Realizamos, assim, o mapeamento físico a que nos propusemos, na medida em que a energia total do sistema é estritamente conservada durante toda a evolução da dinâmica do sistema e, além disso, mantemos o significado físico das variáveis associadas à cada camada. Note-se ainda que nossas equações de movimento reduzem-se às equações da hidrodinâmica no limite em que  $n \rightarrow \infty$ .

Em decorrência da natureza física de nossa lagrangiana, podemos esperar que o comportamento global da dinâmica do núcleo estelar esteja corretamente descrito, e sem a necessidade de introduzir muitas sub-camadas no cálculo. Com esse modelo, para o caso de  $n = 2$ , foi possível descrever os aspectos dinâmicos do golpe hidrodinâmico do núcleo estelar com sua divisão em uma estrela de neutrons remanescente e a explosão da camada externa.

Tanto na primeira abordagem, descrita acima, como naquela que será apresentada no capítulo IV, a estabilidade gravitacional do núcleo de ferro antes do início do colapso é basicamente garantida pela pressão do gás de elétrons degenerados cujo índice adiabático  $\gamma$  é próximo de  $4/3$ . Desprezamos as contribuições de núcleos livres durante a fase eletrônica. É durante as fases de mais alta densidade que, devido às reações

de eletron captura e foto-desintegração, o núcleo se torna gravitacionalmente instável devido à redução de pressão e o processo de colapso tem início. O aumento de densidade que acompanha o colapso posteriormente neutroniza a matéria do núcleo, e o índice adiabático aproxima-se do valor crítico de  $4/3$ , levando o sistema ao colapso, praticamente em queda livre. Por fim, quando a densidade atinge um valor próximo daquele da matéria nuclear, a equação de estado subitamente endurece. Nesse estágio, o colapso é estancado devido à alta incompressibilidade da matéria nuclear e ocorre o golpe hidrodinâmico.

Simulamos as propriedades da matéria estelar através da especificação da pressão total como uma soma da pressão eletrônica  $P_e$  e da pressão do gás de neutrons  $P_n$ , dadas por

$$P_e = K_1 \{x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \ln[x + (x^2 + 1)^{1/2}]\}, \quad (3.48)$$

e,

$$P_n = K_2 \rho^{5/3}, \quad (3.49)$$

onde  $K_1 = 6.002 \times 10^{22}(\text{erg}/\text{cm}^3)$ ;  $K_2 = 5.454 \times 10^9(\text{erg} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^{5/3})$ ;

O parâmetro relativístico  $x$  do gás de eletrons degenerado é dado por

$$x = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{m_e c} \hbar \left( \frac{F Y_0 \rho}{m_u} \right); \quad (3.50)$$

onde  $m_e$  é a massa eletrônica,  $Y_0$  é a razão inicial eletron-núcleo,  $\rho$  é a densidade barionica e  $m_u$  é a unidade de massa atômica.

O índice adiabático efetivo  $\gamma(\equiv \partial \ln P / \partial \ln \rho)$  pode ser calculado por,

$$\gamma = \frac{1}{3} \frac{1}{P} \left\{ \left[ \frac{1}{\zeta_d} (F - 1) + 1 \right] [8K_1 x^5 (x^2 - 1)^{-1/2}] + 5P_n \right\}, \quad (3.51)$$

onde  $P = P_e + P_n$ .

Nas equações (3.50) e (3.51) o fator de neutronização  $F$  é

$$F(\zeta) = \frac{1}{1 + e^{(\zeta - \zeta_c)/\zeta_d}}, \quad (3.52)$$

onde,  $\zeta = \log_{10} \rho$ ;  $\zeta_c = \frac{1}{2}(\zeta_n + \bar{\zeta})$ ;  $\zeta_d = \frac{1}{2}(\zeta_n - \bar{\zeta})$ ; com  $\bar{\zeta}$  e  $\zeta_n$  como parâmetros livres.

A Tabela III-2 apresenta os parâmetros que definem as equações de estado usadas. O índice adiabático é uma função suave da densidade e relaciona o comportamento do índice adiabático do gás de electrons relativísticos degenerados ( $\gamma = 4/3$ ) ao da fase fase neutrônica.

**Tabela III-2**

equação de estado	$\zeta_n$	$\bar{\zeta}$
A	11.0	9.0
B	11.0	8.5
C	10.5	9.0

Para analisar a evolução dinâmica do núcleo estelar prescrito por nossas equações de movimento, preparamos inicialmente a condição inicial correspondente à configuração do núcleo da pré-supernova. Conforme descrito anteriormente, dividimos o núcleo em

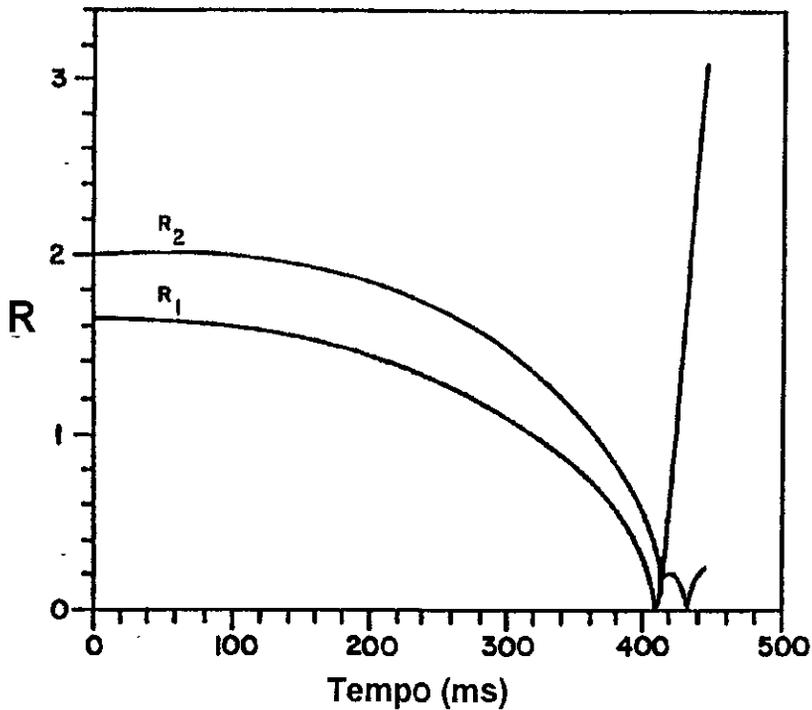


Figura: 3.3. Evolução dos raios das camadas como função do tempo. O eixo  $R$  da ordenadas está em unidades de  $10^8$  cm. A massa total do núcleo central da estrela é  $M=1.34M_{\odot}$ ,  $\alpha = 0.940$ . Resultado obtido com a equação de estado  $A$ .

duas partes, com massas  $m_1 = \alpha M$  e  $m_2 = (1 - \alpha)M$ , onde  $M$  é a massa total do núcleo.

Obtemos então a configuração de equilíbrio dessas duas camadas usando a equação de estado de um gás puro de elétrons degenerados (Chiu, 1968) e que corresponde ao um núcleo de ferro ( $Y_0 \cong 0.46$ ). Essa é a configuração inicial que atribuímos ao núcleo da pré-supernova.

A partir disso, substituímos a equação de estado de elétrons por aquela descrita pelas equações (3.48) – (3.52). O processo de colapso é disparado quando o índice

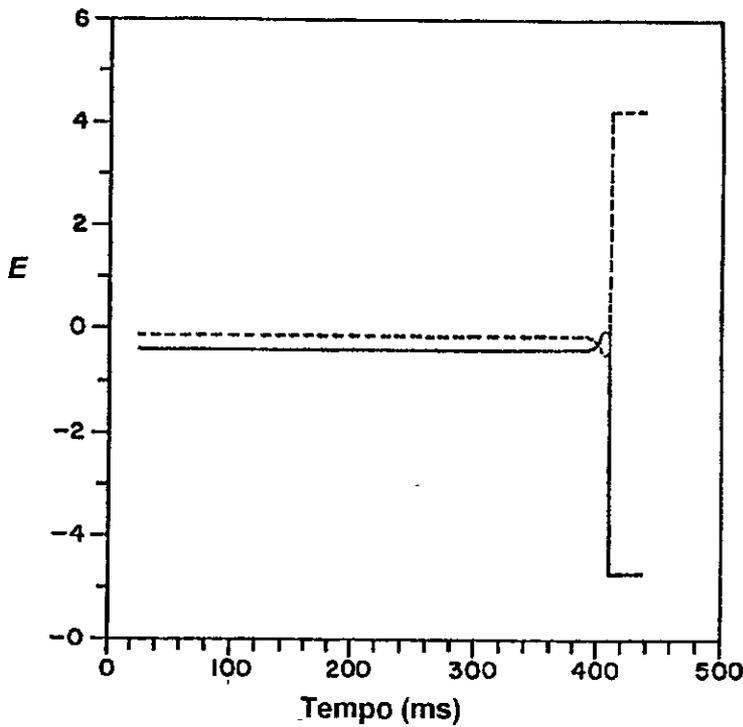


Figura: 3.4. Energia total de cada camada como função do tempo para o evento da figura 3.3. A linha sólida representa a energia do núcleo central, a tracejada a da camada externa. Energias em unidades de  $10^{51}$  erg = 1foe. Observe-se a súbita mudança nas energias no instante da inversão, o que evidencia a grande taxa de transferência de energia do núcleo para a camada externa.

adiabático torna-se menor do que  $4/3$  para a densidade do núcleo da pré-supernova com esta equação de estado.

Na figura 2, mostramos a solução da equação (3.40) para  $M = 1.34M_{\odot}$  and  $\alpha = 0.940$ , aonde foi utilizada a equação de estado (A). Nesse exemplo, a camada exterior foi ejetada por um forte golpe hidráulico, formando um núcleo central de alta densidade.

No instante da inversão, uma grande quantidade de energia é transferida do núcleo central para a camada externa, conforme pode ser visto na figura 3.3.

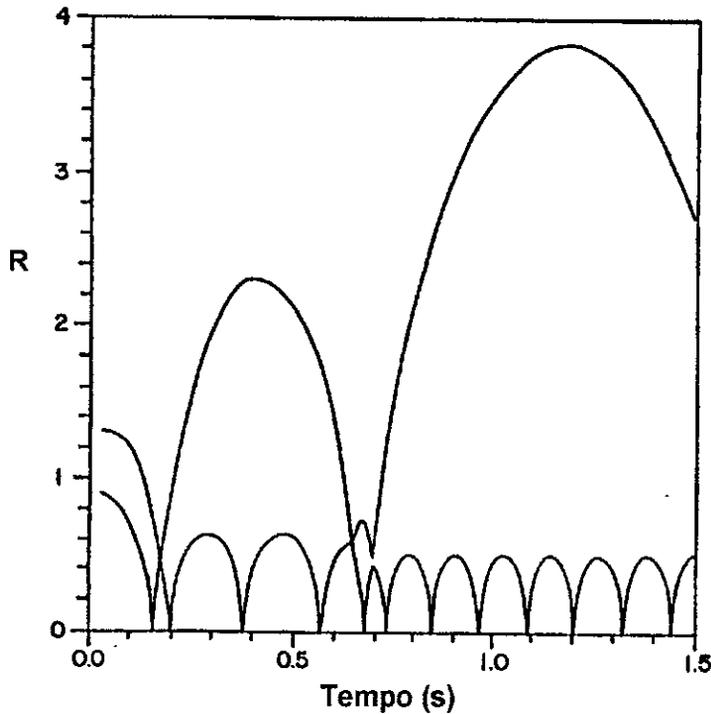


Figura: 3.5. As mesmas condições da simulação da figura 3, exceto que  $\alpha = 0.767$ .

Uma outra evolução pode ser examinada na figura 3.4, onde todos os parâmetros são idênticos ao do primeiro exemplo, exceto que o valor de  $\alpha$  agora é 0.767. Nesse caso, a energia transferida não foi suficiente para ejetar a camada exterior e o sistema passou a exibir oscilações não-lineares acopladas.

Podemos, entretanto, constatar que, nessas situações não-explosivas, se permitirmos ao sistema continuar a oscilar por mais tempo, verificaremos que ele acabará por atingir uma condição explosiva depois de um certo número de oscilações.

Com essa primeira abordagem do problema fomos capazes de obter uma boa descrição geral do problema da explosão de uma supernova e vimos reforçadas nossas

expectativas sobre as possibilidades de se tratar um sistema hidrodinâmico com um número de variáveis muito menor do que aquele que até aqui vinha sendo utilizado.

## **CAPÍTULO V — A HIDRODINÂMICA DE POUCAS VARIÁVEIS**

O Formalismo de a Transferência de Massa

A Massa como Variável Lagrangiana

A Equação da Energia

#### IV-1 O FORMALISMO DE TRANSFERÊNCIA DE MASSA.

Não obstante os resultados do modelo de lagrangiana efetiva, para que se possa tornar o método mais geral e competitivo frente aos procedimentos já consagrados de integração dos problemas da hidrodinâmica, devemos proceder a um exame cuidadoso, e com a intenção explícita de evidenciar quais e aonde podem se encontrar os pontos críticos.

Nesse sentido, o fato de nossos cálculos dependerem como vimos, forte e explicitamente, da escolha do parâmetro livre  $\alpha$  parece surgir como o ponto mais fraco de toda a abordagem. De fato, tal dependência não encontra similar na hidrodinâmica.

Outra questão que enfrentamos logo após as primeiras aplicações bem sucedidas de nosso modelo às configurações de duas camadas, foi a de que, para um número maior de camadas, o cálculo passou a apresentar um evolução irrealística, com as várias camadas exibindo um comportamento oscilatório absolutamente não-físico.

Há aqui, como sabemos, um similar na hidrodinâmica convencional. Se utilizarmos as equações hidrodinâmicas corretas, ou seja, livres de quaisquer linearizações ou outras aproximações e que contenha toda a física necessária à completa caracterização do problema, tais como os mecanismos de condução e dissipação de calor, ainda assim, ao realizarmos a integração numérica vamos nos deparar com o surpreendente resultado de que as várias camadas usadas para descrever o fenômeno irão apresentar um complexo movimento oscilatório de natureza caótica.

A origem deste inesperado comportamento não está, como se poderia concluir de um primeiro exame, em qualquer falha elementar do método de integração, ou em uma simples propagação de erros numéricos. Na realidade a causa dessa falha dos métodos hidrodinâmicos convencionais é mais básica e remonta ao próprio conceito de equação diferencial como forma de retratar a realidade física.

É nas hipóteses fundamentais e necessárias ao estabelecimento das equações hidrodinâmicas aonde vamos encontrar a raiz de nossos problemas. Já na própria definição das variáveis dinâmicas, quando explicitamente estabelecemos que estas devem representar o valor médio local de uma grandeza que, devido à estrutura corpuscular da matéria, é na realidade de natureza estatística.

É nesse ponto que nos afastamos de uma representação mais próxima da realidade de forma a poder transformar um problema microscópico e estatístico, num problema macroscópico abordável com as técnicas convencionais da mecânica dos fluidos, ou seja, com a introdução das equações diferenciais parciais da hidrodinâmica.

De qualquer modo, o sucesso desta linha de idéias é inquestionável pois com ela é possível tratar a maioria dos problemas da dinâmica dos meios contínuos. Apesar disso, devemos notar que desta maioria estão excluídos seletivamente todos os fenômenos em que a natureza não-linear da realidade física exerce um papel relevante.

A exclusão dos fenômenos não lineares costuma ser feita de forma implícita, quando escolhemos as condições iniciais, as condições de contorno, e o intervalo de integração para que o caráter não-linear jamais chegue a se manifestar; ou de forma explícita, quando já de início linearizamos as equações hidrodinâmicas.

Quando não é do interesse, ou quando não é possível, abordar um problema da maneira descrita acima, então, inevitavelmente, aquele estranho comportamento caótico irá se manifestar provocando a algaravia de todo o cálculo.

Uma forma de apontar claramente a origem das dificuldades está em se constatar que um sistema físico idealizado pelas equações da hidrodinâmicas expressas na sua forma mais completa só se afasta de um quadro real pelo fato de ser, por construção, um sistema contínuo. Até este estágio, não introduzimos nenhum elemento novo ao problema, inclusive por que todo e qualquer tratamento analítico jamais apresentou um tal resultado estranho.

Ao discretizarmos as equações para se obter as equações de diferenças finitas estamos agora, por uma questão de método, incluindo uma discretização artificial em nossa representação da realidade.

Ficamos assim, com um sistema físico no qual eliminamos a natureza discreta da matéria, mas ao qual adicionamos uma discretização artificial para fins de tratamento numérico. Fora isto, nosso sistema idealizado é um legítimo sistema físico, no sentido em que é regido por leis físicas corretas e auto-consistentes. Conseqüentemente, desse sistema se espera um comportamento coerente com as leis da Física, o que ele realmente faz quando exhibe uma evolução caótica.

Isto por que, devido ao Princípio da Equipartição de Energia, deveremos esperar que, com a evolução temporal do sistema, a energia total irá se distribuir por todos

os graus de liberdade efetivamente disponíveis, o que inclui os modos vibracionais anômalos como os que nos deparamos quando da integração numérica do problema.

Essa forma de ver o problema tem a vantagem de evidenciar a profundidade e gravidade da questão, e contribui para indicar a melhor direção a seguir. Permite também interpretar mais claramente o papel da pseudo-viscosidade de VonNeumann e atribuir um sentido físico a esse artifício matemático.

A solução de VonNeumann é uma forma de minimizar os efeitos do caráter corpuscular, indevidamente adquirido pelos pontos da rede de integração é atribuir a esses novos graus de liberdade uma viscosidade artificial com um valor suficientemente alto para atenuar os movimentos oscilatórios anômalos, mais que ainda assim, permita ao sistema uma evolução dinâmica razoavelmente realística.

Essa energia retirada dos graus de oscilação anômalos é transferida pela viscosidade artificial de VonNeumann diretamente para a forma de calor ou energia interna do sistema.

Sem dúvida, um dos pontos mais fracos desse tipo de solução é a introdução de um parâmetro livre necessário ao ajuste do valor da pseudo-viscosidade para cada situação particular.

Toda essa problemática ocorre igualmente em nosso primeiro formalismo e é a explicação das nossas dificuldades para o tratamento da explosão de supernovas quando a estrela inicial é modelada em várias camadas.

Uma solução como a de VonNeumann já não ajuda aqui, pois a sua inclusão faz com que a região de transição da frente de onda de choque, na sua forma atenuada, se estenda por vários pontos da rede de integração e exige que, além disso, seja muito menor do que as dimensões globais do problema.

A única forma de atender a esses pré-requisitos é realizar uma rede com muitos pontos de integração, o que é frontalmente contrário às nossas propostas de partida.

Estamos então frente a duas questões:

- a)- Necessitamos incluir um princípio, lei, ou regra, que leve à discriminação das massas de cada camada de maneira a eliminar o parâmetro  $\alpha$  arbitrário do primeiro formalismo. Nossa hidrodinâmica de poucas variáveis deveria ser capaz de prescrever, de modo natural, para a explosão de uma supernova, aquela separação de massa da estrela primordial em uma estrela de neutrons remanescente e num envelope ejetado violentamente, da mesma forma como o faz a hidrodinâmica convencional de muitas variáveis e é confirmada pelos dados observacionais.
- b)- Procuramos um equivalente à solução de VonNeumann, de forma a eliminar os modos de oscilação espúrios e permitir a integração de um problema hidrodinâmico qualquer com um número de camadas maior do que dois. Pelo que discutimos acima, não existe, de princípio, qualquer possibilidade de se adotar alguma forma de pseudo-viscosidade adaptada ao nosso formalismo hidrodinâmico de poucas variáveis.

Por uma questão de economia de Princípios procuramos uma solução para ambos os problemas através do uso das leis físicas que já vinham nos norteando até aqui. Isto implica em usar as leis da mecânica, conforme decorrem do Princípio da Mínima Ação. No caso dessa abordagem ter sucesso, teremos em mãos um formalismo bastante consistente e de acordo com nossas melhores expectativas.

Em consonância com essas idéias, procuramos usar o Princípio da Mínima Ação para a determinação do parâmetro  $\alpha$  de nossa primeira abordagem.

Isto significa que, numa ótica lagrangiana do problema,  $\alpha_i$ , ou a massa  $m_i$ , ou a densidade  $\rho_i$ , de cada camada deveria ser mais uma incógnita, como já o são as posições  $R_i$ . Ou seja, que aquelas variáveis deveriam ser vistas agora como legítimas variáveis lagrangianas e portanto deveriam passar a ser tratadas nas mesmas condições que as posições.

Se preferirmos um enfoque euleriano, então nossa proposta corresponde a tratar simultaneamente e de forma indistinta tanto as variáveis hidrodinâmicas clássicas ( $P$ ,  $\rho$ ,  $T$ , etc.) como as coordenadas  $R_i$  dos pontos da rede onde aquelas mesmas variáveis são especificadas.

Um aspecto que subjacente à essa forma de atacar o problema está em que, sob certo aspecto, a individualidade de cada camada, essencial ao caráter corpuscular, ficará definitivamente eliminada do problema. Uma vez que as camadas deixam de ser estanques, torna-se possível a troca de energia de outra maneira que não o choque mecânico, e dessa forma prescindindo de uma pseudo-viscosidade ou outro artifício. Daí se vê que nossa expectativa é a de que o mesmo ataque do problema permita resolver simultaneamente as duas dificuldades.

Tratar as massas  $M_i$  como variáveis lagrangianas significa realizar as derivações parciais da lagrangiana  $L(R_i, M_i)$  e obter novas equações para as variáveis  $R_i$ , e um conjunto adicional de equações para as variáveis  $M_i$ .

Posteriormente, devemos abandonar as condições de contorno:  $v(r = R_{i-1}) = \dot{R}_{i-1}$ , e  $v(r = R_i) = \dot{R}_i$ , adotadas no primeiro enfoque. No lugar dessas condições devemos usar outras, obtidas da equação de continuidade aplicada aos limites de cada camada. Vamos permitir que o campo de velocidades seja descontínuo entre as camadas, pois só dessa forma as massas (ou as densidades) podem se tornar variáveis realmente independentes das coordenadas de posição.

Surge aqui, e de forma muito natural, um aspecto muito interessante dessa abordagem: Se pretendemos atacar um problema altamente não linear como o das ondas de choque, então devemos mesmo deixar espaço para que as variáveis hidrodinâmicas possam ser descontínuas, pois que é exatamente dessa forma que elas se apresentam na natureza quando da ocorrência de uma frente de choque.

## IV-2 A MASSA COMO VARIÁVEL LAGRANGIANA.

Consideremos uma lagrangiana dependente das massas e raios de cada camada  $i$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}(\{R_i\}, \{\dot{R}_i\}, \{M_i\}, \{\dot{M}_i\}) \\ &= K - V_G - E_{int},\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde, como antes,  $K$ ,  $V_G$  e  $E_{int}$  são a energia cinética total associada ao movimento hidrodinâmico da matéria, a energia gravitacional total e a energia interna total.

As variáveis massa são especificadas por  $M_i = \sum_{i=1}^n m_i$

com

$$m_i = \frac{4\pi}{3} \rho_i (R_i^3 - R_{i-1}^3), \quad i = 1, \dots, n.\tag{4.2}$$

Vamos supor um campo de velocidades  $\mathbf{v}_i(\mathbf{r})$  esfericamente simétrico e radial de maneira que a equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \rho_i \mathbf{v}_i + \dot{\rho}_i = 0, \quad (4.3)$$

se aplica ao interior de cada camada:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_i + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} = 0, \quad (4.4)$$

aonde supomos  $\rho_i = \rho_i(t)$  e independente da posição.

Após integração obtemos:

$$v_i(r, t) = \frac{1}{r^2} \left[ -\frac{\dot{\rho}}{3\rho} r + b(t) \right], \quad (4.5)$$

sendo  $b(t)$  a constante de integração. Substituindo os valores de  $\rho$  e  $\dot{\rho}$ , temos:

$$v_i(r, t) = - \left( \frac{1}{3} \frac{\dot{M}_i - \dot{M}_{i-1}}{M_i - M_{i-1}} - \frac{R_i^2 \dot{R}_i - R_{i-1}^2 \dot{R}_{i-1}}{R_i^3 - R_{i-1}^3} \right) r + \frac{b_i}{r^2} \quad (4.6)$$

Nesta equação,  $M_0 = 0$ ,  $R_0 = 0$ , e  $b_1 = 0$ , por convenção.

Nos limites de cada camada, a equação da continuidade pode ser integrada e assim fornecer a condição de contorno:

$$\rho_i \left( v_i(R_i) - \dot{R}_i \right) = \rho_{i+1} \left( v_{i+1}(R_i) - \dot{R}_i \right). \quad (4.7)$$

Dessa última equação se conclui que o campo de velocidades não poderia ser contínuo entre as camadas, pois:

Se  $v_i(R_i) = v_{i+1}(R_i)$ , então  $v_i(R_i) = v_{i+1}(R_i) = \dot{R}_i$ .

Uma forma mais conveniente para a equação da continuidade de maneira a fornecer o parâmetro  $b(t)$  é:

$$-\frac{\dot{M}_i}{4\pi R_i^2} = \rho_i \left( v_i(R_i) - \dot{R}_i \right). \quad (4.8)$$

E podemos escrever o campo de velocidades como sendo:

$$\begin{aligned} v_i(r) = & + \frac{R_i^2}{R_i^3 - R_{i-1}^3} \left( r - \frac{R_{i-1}^3}{r^2} \right) \dot{R}_i - \frac{R_{i-1}^2}{R_i^3 - R_{i-1}^3} \left( r - \frac{R_i^3}{r^2} \right) \dot{R}_{i-1} \\ & - \frac{1/3}{M_i - M_{i-1}} \left( r - \frac{R_{i-1}^3}{r^2} \right) \dot{M}_i + \frac{1/3}{M_i - M_{i-1}} \left( r - \frac{R_i^3}{r^2} \right) \dot{M}_{i-1}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

que permite a integração da energia cinética da  $i$ -ésima camada como função das variáveis lagrangianas:

$$K_i = \frac{1}{2} \int_V d^3 \mathbf{r} \rho_i(R_i, M_i) \mathbf{v}_i^2(\mathbf{r}, R_i, \dot{R}_i, M_i, \dot{M}_i), \quad (4.10)$$

ou

$$K_i = 2\pi \rho_i(R_i, M_i) \int_{R_{i-1}}^{R_i} v_i^2(r, R_i, \dot{R}_i, M_i, \dot{M}_i) dr. \quad (4.11)$$

Fazendo uso da expressão

$$\int_{R_{i-1}}^{R_i} x^2 \left( x - \frac{a}{x^2} \right) \left( x - \frac{b}{x^2} \right) dx = \frac{(R_i^5 - R_{i-1}^5)}{5} \frac{(R_i^2 - R_{i-1}^2)}{2} (a + b) - ab \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right), \quad (4.12)$$

para agrupar termos comuns, resulta em :

$$\begin{aligned}
 K_i = 2\pi\rho_i \left[ \right. & \\
 & \frac{R_{i-1}^4 \left[ \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - R_i^3 (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_i^6 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) \right]}{(R_i^3 - R_{i-1}^3)^2} \dot{R}_{i-1}^2 \\
 & - \frac{2R_{i-1}^2 R_i^2}{(R_i^3 - R_{i-1}^3)^2} \left[ \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - \frac{R_i^3 + R_{i-1}^3}{2} (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_i^3 R_{i-1}^3 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) \right] \dot{R}_{i-1} \dot{R}_i \\
 & - \frac{2R_{i-1}^2 \left[ \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - R_i^3 (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_i^6 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) \right]}{3(R_i^3 - R_{i-1}^3)(M_i - M_{i-1})} \dot{R}_{i-1} \dot{M}_{i-1} \\
 & + \frac{2R_{i-1}^2 \left[ \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - \frac{R_i^3 + R_{i-1}^3}{2} (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_i^3 R_{i-1}^3 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) \right]}{3(R_i^3 - R_{i-1}^3)(M_i - M_{i-1})} \dot{R}_{i-1} \dot{M}_i \\
 & + \left( \frac{R_i^2}{R_i^3 - R_{i-1}^3} \right)^2 \left[ \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - R_{i-1}^3 (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_{i-1}^6 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) \right] \dot{R}_i^2 \\
 & + \frac{2R_i^2 \left[ \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - \frac{R_i^3 + R_{i-1}^3}{2} (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_i^3 R_{i-1}^3 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) \right]}{3(R_i^3 - R_{i-1}^3)(M_i - M_{i-1})} \dot{R}_i \dot{M}_{i-1} \\
 & - \frac{2R_i^2}{3(R_i^3 - R_{i-1}^3)(M_i - M_{i-1})} \left[ \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - R_{i-1}^3 (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_{i-1}^6 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) \right] \dot{R}_i \dot{M}_i \\
 & + \frac{1}{9(M_i - M_{i-1})^2} \left[ \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - R_i^3 (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_i^6 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) \right] \dot{M}_{i-1}^2 \\
 & - \frac{2}{9(M_i - M_{i-1})^2} \left[ \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - \frac{R_i^3 + R_{i-1}^3}{2} (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_i^3 R_{i-1}^3 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) \right] \dot{M}_{i-1} \dot{M}_i \\
 & + \frac{1}{9(M_i - M_{i-1})^2} \left[ \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - R_{i-1}^3 (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_{i-1}^6 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) \right] \dot{M}_i^2 \\
 & \left. \right]. \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Definindo

$$\xi_i = \frac{R_i}{R_{i-1}}. \tag{4.14}$$

Temos:

$$\frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - R_{i-1}^3 (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_{i-1}^6 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) = \frac{1}{5} \frac{1}{\xi_i} (\xi_i^6 - 5\xi_i^5 + 9\xi_i^3 - 5) R_{i-1}^5, \quad (4.15)$$

$$\frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - R_i^3 (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_i^6 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) = \frac{1}{5} (5\xi_i^6 - 9\xi_i^5 + 5\xi_i^3 - 1) R_{i-1}^5, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{5} - \frac{R_i^3 + R_{i-1}^3}{2} (R_i^2 - R_{i-1}^2) - R_i^3 R_{i-1}^3 \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i-1}} \right) = \\ = \frac{3}{10} (-\xi_i^5 + 5\xi_i^3 - 5\xi_i^2 + 1) R_{i-1}^5. \end{aligned} \quad (4.17)$$

De maneira que a expressão da energia cinética pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 K_i = \frac{3}{10} \left[ \right. & \\
 & + m_i \frac{(5\xi_i^3 + 6\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^3} \dot{R}_{i-1}^2 \\
 & + m_i \xi_i^3 \frac{(\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^3} \dot{R}_i^2 \\
 & + \frac{R_{i-1}^2}{9(M_i - M_{i-1})} \frac{(5\xi_i^3 + 6\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)^2}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)} \dot{M}_{i-1}^2 \\
 & + \frac{R_{i-1}^2}{9m_i} \frac{(\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)(\xi_i - 1)^2}{\xi_i(\xi_i^2 + \xi_i + 1)} \dot{M}_i^2 \\
 & + 3m_i \xi_i^2 \frac{(\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^3} \dot{R}_{i-1} \dot{R}_i \\
 & - \frac{2}{3} R_{i-1} \frac{(5\xi_i^3 + 6\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^2} \dot{R}_{i-1} \dot{M}_{i-1} \\
 & - R_{i-1} \frac{(\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^2} \dot{R}_{i-1} \dot{M}_i \\
 & - R_{i-1} \xi_i^2 \frac{(\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^2} \dot{R}_i \dot{M}_{i-1} \\
 & - \frac{2}{3} R_{i-1} \xi_i \frac{(\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)(\xi_i - 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^2} \dot{R}_i \dot{M}_i \\
 & + \frac{R_{i-1}^2}{3m_i} \frac{(\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)(\xi_i - 1)^2}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)} \dot{M}_{i-1} \dot{M}_i \\
 & \left. \right], \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

onde foram usadas as relações:

$$(\xi_i^6 - 5\xi_i^5 + 9\xi_i^3 - 5) = (\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)(\xi_i - 1)^3, \tag{4.19}$$

$$(+\xi_i^5 - 5\xi_i^3 + 5\xi_i^2 - 1) = (\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)^3, \tag{4.20}$$

$$(5\xi_i^6 - 9\xi_i^5 + 5\xi_i^3 - 1) = (5\xi_i^3 + 6\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)^3, \tag{4.21}$$

e

$$(\xi_i + 1)(\xi_i - 1) = (\xi_i^2 - 1), \quad (4.22)$$

$$(\xi_i^2 + \xi_i + 1)(\xi_i - 1) = (\xi_i^3 - 1), \quad (4.23)$$

$$(\xi_i^3 + \xi_i^2 + \xi_i + 1)(\xi_i - 1) = (\xi_i^4 - 1). \quad (4.24)$$

A energia cinética da  $i$ -ésima camada é dada por:

$$K_i = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} \dot{R}_{i-1} & \dot{R}_i & \dot{M}_{i-1} & \dot{M}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{R}_{i-1} \\ \dot{R}_i \\ \dot{M}_{i-1} \\ \dot{M}_i \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

onde

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{(5\xi_i^3 + 6\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^3} m_i, \\ T_{12} &= \frac{3\xi_i^2 (\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)}{2(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^3} m_i, \\ T_{13} &= -\frac{1(5\xi_i^3 + 6\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)}{3(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^2} R_{i-1}, \\ T_{14} &= -\frac{1(\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)}{2(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^2} R_{i-1}, \\ T_{22} &= \xi_i^3 \frac{(\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^3} m_i, \\ T_{23} &= -\frac{1\xi_i^2 (\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)}{2(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^2} R_{i-1}, \\ T_{33} &= \frac{1(5\xi_i^3 + 6\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)^2}{9(\xi_i^2 + \xi_i + 1)} \frac{R_{i-1}^2}{(M_i - M_{i-1})}, \\ T_{34} &= \frac{1(\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)(\xi_i - 1)^2}{6(\xi_i^2 + \xi_i + 1)} \frac{R_{i-1}^2}{m_i}, \\ T_{44} &= \frac{1(\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)(\xi_i - 1)^2}{9\xi_i(\xi_i^2 + \xi_i + 1)} \frac{R_{i-1}^2}{m_i}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

Vamos definir a matriz  $P$ , cujos elementos são os polinomiais:

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= \frac{(5\xi_i^3 + 6\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^3}, \\
 P_{12} &= \xi_i^2 \frac{(\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^3}, \\
 P_{13} &= \frac{(5\xi_i^3 + 6\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^2}, \\
 P_{14} &= \frac{(\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^2}, \\
 P_{22} &= \xi_i^3 \frac{(\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^3}, \\
 P_{23} &= \xi_i^2 \frac{(\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)^2}, \\
 P_{33} &= \frac{(5\xi_i^3 + 6\xi_i^2 + 3\xi_i + 1)(\xi_i - 1)^2}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)}, \\
 P_{34} &= \frac{(\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)(\xi_i - 1)^2}{(\xi_i^2 + \xi_i + 1)}, \\
 P_{44} &= \frac{(\xi_i^3 + 3\xi_i^2 + 6\xi_i + 5)(\xi_i - 1)^2}{\xi_i(\xi_i^2 + \xi_i + 1)}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

De tal forma que podemos escrever:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= m_i P_{11}, \\
T_{12} &= m_i P_{12}, \\
T_{13} &= -\frac{1}{3} R_i - 1 P_{13}, \\
T_{14} &= -\frac{1}{2} R_{i-1} P_{14}, \\
T_{22} &= m_i P_{22}, \\
T_{23} &= -\frac{1}{2} R_{i-1} P_{23}, \\
T_{33} &= \frac{1}{9} \frac{R_{i-1}^2}{(M_i - M_{i-1})} P_{33}, \\
T_{34} &= \frac{1}{6} \frac{R_{i-1}^2}{m_i} P_{34}, \\
T_{44} &= \frac{1}{9} \frac{R_{i-1}^2}{m_i} P_{44}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

A energia cinética total:

$$K = \frac{3}{10} \dot{\mathbf{Q}}_{\theta_i} \hat{\mathbf{T}}_{\theta_{\mu ij}} \dot{\mathbf{Q}}_{\mu j}, \tag{4.29}$$

onde  $\mathbf{Q}_{\theta_i}$  é o vetor das coordenadas  $R_i$  e  $M_i$ , e vale a regra de soma de índices repetidos, com os índices latinos variando de 1 a  $n$  e os índices gregos variando de 1 a 2, para especificar as coordenadas de posição e coordenadas de massa respectivamente.

$\hat{\mathbf{T}}_{\theta_{\mu ij}}$  é dado por:

$$\hat{\mathbf{T}}_{11ij} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(2)} & T_{12}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ T_{21}^{(2)} & T_{22}^{(2)} + T_{11}^{(3)} & T_{12}^{(3)} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & T_{21}^{(3)} & T_{22}^{(3)} + T_{11}^{(4)} & T_{12}^{(4)} & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & T_{21}^{(n-1)} & T_{22}^{(n-1)} + T_{11}^{(n)} & T_{12}^{(n)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & T_{21}^{(n)} & T_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

e

$$\hat{\mathbf{T}}_{12ij} = \begin{pmatrix} T_{13}^{(2)} & T_{14}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ T_{23}^{(2)} & T_{24}^{(2)} + T_{13}^{(3)} & T_{14}^{(3)} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & T_{23}^{(3)} & T_{24}^{(3)} + T_{13}^{(4)} & T_{14}^{(4)} & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & T_{23}^{(n-1)} & T_{24}^{(n-1)} + T_{13}^{(n)} & T_{14}^{(n)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & T_{23}^{(n)} & T_{24}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

e

$$\hat{\mathbf{T}}_{22ij} = \begin{pmatrix} T_{33}^{(2)} & T_{34}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ T_{43}^{(2)} & T_{44}^{(2)} + T_{33}^{(3)} & T_{34}^{(3)} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & T_{43}^{(3)} & T_{44}^{(3)} + T_{33}^{(4)} & T_{34}^{(4)} & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & T_{43}^{(n-1)} & T_{44}^{(n-1)} + T_{33}^{(n)} & T_{34}^{(n)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & T_{43}^{(n)} & T_{44}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

observe-se que:  $\hat{\mathbf{T}}_{\theta\mu ij} = \hat{\mathbf{T}}_{\mu\theta ji}$

A energia potencial gravitacional:

$$V_G = -G \sum_{i=1}^n \int_{R_{i-1}}^{R_i} V_i(r) \rho_i 4\pi r^2 dr, \quad (4.33)$$

onde

$$V_i(r) = -G \frac{M_i(r)}{r}, \quad (4.34)$$

com

$$M_i(r) = M_{i-1} + \rho \frac{4\pi}{3} (r^3 - R_{i-1}^3), \quad (4.35)$$

e

$$\rho = \frac{(M_i - M_{i-1})}{\frac{4\pi}{3}(R_i^3 - R_{i-1}^3)}, \quad (4.36)$$

resultando em

$$V_G = -\frac{3}{10} G \sum_{i=1}^n C_i \frac{1}{R_{i-1}}, \quad (4.37)$$

sendo que

$$C_i = [f_i(\xi_i)M_{i-1}^2 + g_i(\xi_i)M_iM_{i-1} + h_i(\xi_i)M_i^2] \frac{1}{p_i}, \quad (4.38)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional, e

$$f_i(\xi_i) = -(3\xi_i^4 + 3\xi_i^3 - 2\xi_i^2 - 2\xi_i - 2), \quad (4.39)$$

$$g_i(\xi_i) = -(\xi_i^4 + \xi_i^3 - 4\xi_i^2 + \xi_i + 1), \quad (4.40)$$

$$h_i(\xi_i) = +(2\xi_i^4 + 2\xi_i^3 + 2\xi_i^2 - 3\xi_i - 3), \quad (4.41)$$

$$p_i(\xi_i) = (\xi_i^2 + \xi_i + 1)^2(\xi_i - 1). \quad (4.42)$$

As derivadas parciais de  $V_G$ , com as coordenadas  $R$  e  $M$ , são:

$$\frac{\partial V_G}{\partial R_i} = -\frac{3}{10} G \frac{1}{R_{i-1}} [C_{i+1} + C'_{i+1} \xi_{i+1} - C'_i \xi_i^2], \quad (4.43)$$

onde

$$C'_i = [f'_i M_{i-1}^2 + g'_i M_i M_{i-1} + h'_i M_i^2] \frac{1}{p_i} - \frac{C_i}{p_i} p'_i, \quad (4.44)$$

e

$$\frac{\partial V_G}{\partial M_i} = -\frac{3}{10} G \frac{1}{R_i} \left[ \frac{g_i \xi_i}{p_i} M_{i-1} 2 \left( \frac{f_{i+1}}{p_{i+1}} + \frac{h_i \xi_i}{p_i} \right) M_i + \frac{g_i}{p_{i+1}} M_{i+1} \right]. \quad (4.45)$$

A energia interna total é expressa por:

$$E_{int} = \sum_{i=1}^n m_i \epsilon_i(\rho_i, S_i), \quad (4.46)$$

onde  $S_i$  e a entropia específica da camada  $i$ . As derivadas parciais de  $E_{int}$ , com as coordenadas  $R$  e  $M$ , são:

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial R_i} = m_i \left( \frac{\partial \epsilon(\rho_i, S_i)}{\partial \rho_i} \right)_S \frac{\partial \rho_i}{\partial R_i}. \quad (4.47)$$

Com a segunda lei da termodinâmica

$$\left( \frac{\partial \epsilon(\rho, S)}{\partial \rho} \right)_S = \frac{P(\rho, S)}{\rho^2}. \quad (4.48)$$

Obtemos:

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial R_i} = -4\pi R_i^2 (P_i - P_{i+1}), \quad (4.49)$$

e

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial M_i} = \epsilon(\rho_i) - \epsilon(\rho_{i+1}) + m_i \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_i} \right)_S \frac{\partial \rho}{\partial M_i}, \quad (4.50)$$

e então

$$\frac{\partial E_{int}}{\partial M_i} = H_i - H_{i+1}, \quad (4.51)$$

onde

$$H = \epsilon_i(\rho, S) + \frac{P(\rho, S)}{\rho}, \quad (4.52)$$

é a entalpia do gás.

A lagrangianda do sistema  $\mathcal{L} = K - U$ , se escreve como:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{10} \dot{Q}_{\theta i} \hat{T}_{\theta \mu ij} \dot{Q}_{\mu j} - U. \quad (4.53)$$

A equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{\alpha k}}, \quad (4.54)$$

para esse sistema é:

$$\frac{3}{10} \frac{d}{dt} \{ \hat{T}_{\alpha \mu kj} \dot{Q}_{\mu j} + \dot{Q}_{\theta i} \hat{T}_{\theta \alpha ik} \} = \frac{3}{10} \dot{Q}_{\theta i} \frac{\partial \hat{T}_{\theta \mu ij}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} \dot{Q}_{\mu j} - \frac{\partial U}{\partial Q_{\alpha k}}. \quad (4.55)$$

Com as simetrias de  $\hat{T}$ , temos:

$$\frac{3}{5} \frac{d}{dt} \{ \hat{T}_{\alpha \mu kj} \dot{Q}_{\mu j} \} = \frac{3}{10} \dot{Q}_{\theta i} \frac{\partial \hat{T}_{\theta \mu ij}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} \dot{Q}_{\mu j} - \frac{\partial U}{\partial Q_{\alpha k}}. \quad (4.56)$$

Que derivando:

$$\hat{T}_{\alpha \mu kj} \ddot{Q}_{\mu j} = \frac{1}{2} \dot{Q}_{\theta i} \frac{\partial \hat{T}_{\theta \mu ij}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} \dot{Q}_{\mu j} - \frac{d}{dt} (\hat{T}_{\alpha \mu kj}) \dot{Q}_{\mu j} - \frac{5}{3} \frac{\partial U}{\partial Q_{\alpha k}}. \quad (4.57)$$

Reagrupando:

$$\hat{T}_{\alpha \mu kj} \ddot{Q}_{\mu j} = \dot{Q}_{\theta i} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{T}_{\theta \mu ij}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} - \frac{\partial \hat{T}_{\alpha \mu kj}}{\partial \dot{Q}_{\mu j}} \right\} \dot{Q}_{\mu j} - \frac{5}{3} \frac{\partial U}{\partial Q_{\alpha k}}. \quad (4.58)$$

Para tirar proveito dos zeros da matriz  $\hat{T}_{\theta \mu ij}$ , e do fato que:

$$\frac{\partial \hat{T}_{\theta \mu ij}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} \neq 0 \text{ para } \begin{cases} i = k - 1, \\ i = k, \\ i = k + 1, \\ j = k - 1, \\ j = k, \\ j = k + 1. \end{cases} \quad (4.59)$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\alpha\mu k j} \ddot{Q}_{\mu j} = & \\ \frac{1}{2} (\dot{Q}_{\theta, k-1} \quad \dot{Q}_{\theta, k} \quad \dot{Q}_{\theta, k+1}) & \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu, k-1, k-1}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} & \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu, k-1, k}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} & 0 \\ \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu k, k-1}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} & \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu k k}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} & \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu k, k+1}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} \\ 0 & \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu, k+1, k}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} & \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu, k+1, k+1}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Q}_{\theta, k-1} \\ \dot{Q}_{\theta, k} \\ \dot{Q}_{\theta, k+1} \end{pmatrix} \\ - (\dot{Q}_{\theta, k-1} \quad \dot{Q}_{\theta, k} \quad \dot{Q}_{\theta, k+1}) & \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{T}_{\alpha\mu, k, k-1}}{\partial \dot{Q}_{\theta, k-1}} & \frac{\partial \hat{T}_{\alpha\mu, k, k}}{\partial \dot{Q}_{\theta, k-1}} & 0 \\ \frac{\partial \hat{T}_{\alpha\mu k, k-1}}{\partial \dot{Q}_{\theta k}} & \frac{\partial \hat{T}_{\alpha\mu k k}}{\partial \dot{Q}_{\theta k}} & \frac{\partial \hat{T}_{\alpha\mu k, k+1}}{\partial \dot{Q}_{\theta k}} \\ 0 & \frac{\partial \hat{T}_{\alpha\mu, k, k}}{\partial \dot{Q}_{\theta, k+1}} & \frac{\partial \hat{T}_{\alpha\mu, k, k+1}}{\partial \dot{Q}_{\theta, k+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Q}_{\theta, k-1} \\ \dot{Q}_{\theta, k} \\ \dot{Q}_{\theta, k+1} \end{pmatrix} \\ & - \frac{5}{3} \frac{\partial U}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Para o desenvolvimento do cálculo convém definir a matriz

$$\mathbf{A}_{\alpha k \theta \mu a b} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu, k-1, k-1}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} & \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu, k-1, k}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} & 0 \\ \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu k, k-1}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} & \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu k k}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} & \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu k, k+1}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} \\ 0 & \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu, k+1, k}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} & \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu, k+1, k+1}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}} \end{pmatrix} = \frac{\partial \hat{T}_{\theta\mu, k-2+a, k-2+b}}{\partial \dot{Q}_{\alpha k}}, \quad (4.61)$$

cujos termos podem ser explicitados:

$$\mathbf{A}_{1k1111} = \frac{m_k}{R_{k-1}} P_{11}^{\prime k},$$

$$\mathbf{A}_{1k1112} = \frac{3m_k}{2R_{k-1}} P_{12}^{\prime k},$$

$$\mathbf{A}_{1k1113} = 0,$$

$$\mathbf{A}_{1k1122} = \frac{m_{k+1}}{R_k} P_{11}^{\prime k+1} \xi_{k+1} + \frac{m_k}{R_{k-1}} P_{22}^{\prime k},$$

$$\mathbf{A}_{1k1123} = -\frac{3m_{k+1}}{2R_k} P_{12}^{\prime k+1} \xi_{k+1},$$

$$\mathbf{A}_{1k1133} = -\frac{m_{k+1}}{R_k} P_{22}^{\prime k+1} \xi_{k+1},$$

$$\mathbf{A}_{1k1211} = -\frac{1}{3}P_{13}^k,$$

$$\mathbf{A}_{1k1212} = -\frac{1}{2}P_{14}^k,$$

$$\mathbf{A}_{1k1213} = 0,$$

$$\mathbf{A}_{1k1221} = -\frac{1}{2}P_{23}^k,$$

$$\mathbf{A}_{1k1222} = -\frac{1}{3}(P_{13}^{k+1}\xi_{k+1} - P_{13}^{k+1} - P_{24}^{k+1}),$$

$$\mathbf{A}_{1k1223} = \frac{1}{2}(P_{14}^{k+1}\xi_{k+1} - P_{14}^{k+1}),$$

$$\mathbf{A}_{1k1231} = 0,$$

$$\mathbf{A}_{1k1232} = \frac{1}{2}(P_{23}^{k+1}\xi_{k+1} - P_{23}^{k+1}),$$

$$\mathbf{A}_{1k1233} = \frac{1}{3}(P_{24}^{k+1}\xi_{k+1} - P_{24}^{k+1}),$$

$$\mathbf{A}_{1k2211} = \frac{R_{k-1}}{9m_k}P_{33}^k,$$

$$\mathbf{A}_{1k2212} = \frac{R_{k-1}}{6m_k}P_{34}^k,$$

$$\mathbf{A}_{1k2213} = 0,$$

$$\mathbf{A}_{1k2222} = \frac{1}{9}\left(-\frac{R_{k+1}}{m_{k+1}}P_{33}^{k+1} + \frac{2R_k}{m_{k+1}}P_{33}^{k+1} + \frac{R_{k-1}}{m_k}P_{44}^k\right),$$

$$\mathbf{A}_{1k2223} = \frac{1}{6m_{k+1}}(-R_{k+1}P_{34}^{k+1} + 2R_kP_{34}^{k+1}),$$

$$\mathbf{A}_{1k2233} = \frac{1}{9m_{k+1}}(-R_{k+1}P_{44}^{k+1} + 2R_kP_{44}^{k+1}), \quad (4.62)$$

$$\mathbf{A}_{2k1111} = P_{11}^k,$$

$$\mathbf{A}_{2k1111} = \frac{2}{3}P_{12}^k,$$

$$\mathbf{A}_{2k1113} = 0,$$

$$\mathbf{A}_{2k1122} = -P_{11}^{k+1} + P_{22}^k,$$

$$\mathbf{A}_{2k1123} = -\frac{2}{3}P_{12}^{k+1},$$

$$\mathbf{A}_{2k1133} = -P_{22}^{k+1},$$

$$\mathbf{A}_{2k2211} = -\frac{R_{k-1}^2}{9m_k^2}P_{33}^k,$$

$$\mathbf{A}_{2k2212} = -\frac{R_{k-1}^2}{6m_k^2}P_{34}^k,$$

$$\mathbf{A}_{2k2213} = 0,$$

$$\mathbf{A}_{2k2222} = \frac{1}{9} \left( \frac{R_{k+1}^2}{m_{k+1}^2}P_{33}^{k+1} - \frac{R_{k-1}^2}{m_k^2}P_{44}^k \right),$$

$$\mathbf{A}_{2k2223} = \frac{R_{k+1}^2}{6m_{k+1}^2}P_{34}^{k+1},$$

$$\mathbf{A}_{2k2233} = \frac{R_k^2}{9m_{k+1}^2}P_{44}^{k+1},$$

$$\mathbf{A}_{2k12ab} = 0,$$

Convém agora definir a matriz  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B}_{\alpha k \theta \mu ab} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_{\alpha k \theta \mu ab} - \mathbf{A}_{\theta, k-2+a, \alpha, \mu, 4-a, 2-a+b}. \quad (4.63)$$

E então podemos, finalmente, escrever as equações de movimento como:

$$\hat{\mathbf{T}}_{\alpha \mu \tilde{k} j} \ddot{\mathbf{Q}}_{\mu j} = \dot{\mathbf{Q}}_{\theta, \tilde{k}-2+a} \{ \mathbf{B}_{\alpha k \theta \mu ab} \} \dot{\mathbf{Q}}_{\mu, \tilde{k}-2+b} - \frac{5}{3} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{Q}_{\alpha \tilde{k}}}, \quad (4.64)$$

onde o *til* em  $\tilde{k}$ , indica que para este índice não vale a regra de soma de índices repetidos.

### IV-3 A EQUAÇÃO DA ENERGIA.

Nosso modelo básico presuppõe a hipótese aproximativa de Chandrasekhar de que os efeitos térmicos são desprezíveis frente á energia de Fermi. Em concordância, a equação de estado utilizada nos cálculos foi desenvolvida supondo a completa degenerescência tanto do gás de elétrons como do gás de neutrons. A idéia consiste em se isolar os efeitos dinâmicos globais dos outros processos relacionados à micro-física da matéria estelar. Pelas mesmas razões, também não foram consideradas quaisquer perdas ou produção de energia.

Devido ás condições físicas, que se acredita, predominantes no interior de uma supernova tipo II, não se pode esperar que processos termonucleares exerçam um papel relevãnte no mecanismo explosivo. Dessa forma, desprezar a nucleossíntese de energia é uma boa aproximação e é usualmente adotada na literatura.

Nossa equação de estado reflete as propriedades da matéria estelar durante a transição de um gás de elétrons para um gás de nêutrons como resultado dos processos de captura eletrônica e foto-dissociação dos núcleos de ferro. Ambos os processos implicam em grande produção de nêutrons que, em geral, serão capazes de escapar livremente para o espaço exterior. No entanto, nos estágios mais críticos do processo de inversão do colapso, uma parcela considerável desses nêutrons poderá ainda vir a ser recapturada pelo meio.

Realisticamente, os mecanismos de transporte por nêutrons não podem ser ignorados na dinâmica de explosão de supernovas. Essa aproximação só se justifica como uma simplificação adotada em concordância com os objetivos acima expostos.

Todo o desenvolvimento analítico feito até aqui tirou proveito dessas aproximações e foi o que permitiu escrever uma lagrangiana efetiva que contém um termo de energia potencial. Essa foi a forma encontrada para se obter as leis de evolução das variáveis hidrodinâmicas e da própria rede de integração (eq. 4.64).

Assim, o modelo desenvolvido até aqui é totalmente mecanicista e isento de efeitos dissipativos. Esta é a razão pela qual pudemos escrever uma lagrangiana que não depende explicitamente do tempo, e que contém um termo de energia potencial conservativo.

No entanto, para que se possa considerar corretamente o papel das ondas de choque é necessário levar em conta devidamente os aspectos termodinâmicos da física em questão.

As leis de evolução (4.64), que foram deduzidas para um sistema mecânico não dissipativo, estabelecem a conservação do momento para as variáveis  $R_i$  e a conservação do momento canonicamente associado às variáveis  $M_i$ , que tem dimensão de energia por unidade de massa.

Nosso objetivo aqui é encontrar uma generalização do sistema de equações (4.64) de maneira a descrever um fluido real qualquer, sujeito as leis termodinâmicas gerais e no qual possam estar presentes fontes ou sorvedouros de energia.

Em primeiro lugar, mais por uma questão de conveniência de conceitos, do que de precisão dos cálculos, será necessário reintroduzir os efeitos térmicos na equação de estado, de forma a termos:

$$\rho = \rho(p, T). \quad (4.65)$$

As propriedades do meio, para a sua completa definição dependem ainda da expressão da energia interna:

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T). \quad (4.66)$$

A hipótese que aqui, então, se faz é a de que aquelas leis de evolução (4.64), deduzidas para um sistema mecânico conservativo, continuam válidas para descrever um sistema dissipativo e irreversível.

O sistema deve, além disso, satisfazer a Primeira Lei da Termodinâmica — que não pode ser deduzida da Mecânica bf — e dessa forma garantir a conservação da energia total que se expressa na equação:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \dot{q}. \quad (4.65)$$

Os efeitos dissipativos necessários à transformação de energia mecânica em energia interna serão, então, ditados pelo fluxo de energia interna associado á transferência de massa entre camadas e, eventualmente, por sorvedouros representados em  $\dot{q}$ .

Em conclusão, será necessário abandonar a hipótese, muito útil até aqui, de que o meio é descrito por uma equação de estado de um gás totalmente degenerado, porque, como tal, evoluirá sempre como um sistema termodinamicamente reversível.

## CAPÍTULO V — RESULTADOS

Discussão

Conclusões Finais

## V-1 DISCUSSÃO

A profundidade do problema da Hidrodinâmica se torna evidente quando se tenta integrar as equações diferenciais parciais de Navier-Stokes para obter a descrição de um determinado fenômeno físico. Mesmo que estejamos usando as equações hidrodinâmicas nas suas formas mais exatas e completas, de maneira a incluir toda a Física pertinente, e mesmo que possamos utilizar um número de células de integração tão grande quanto o desejarmos, ainda assim, todos os esforços redundarão num surpreendente fracasso. Isto porque teremos, como resultado, uma evolução irrealística e totalmente caótica. Logo após os primeiros passos de integração as várias variáveis do problema começarão a manifestar um inesperado movimento oscilatório que rapidamente levará à desorganização e colapso de todo o cálculo. O que pode parecer mais estranho é que aumentar a densidade de células de integração só fará agravar ainda mais o quadro.

Vamos inicialmente tentar descrever o colapso e explosão de uma supernova através da integração numérica das equações da Hidrodinâmica. Resulta que toda a fase do colapso é perfeitamente representada, a energia total do sistema é conservada, e os resultados estão em boa concordância com as previsões da teoria analítica de Yahil para o colapso homólogo, válida para esta etapa do fenômeno.

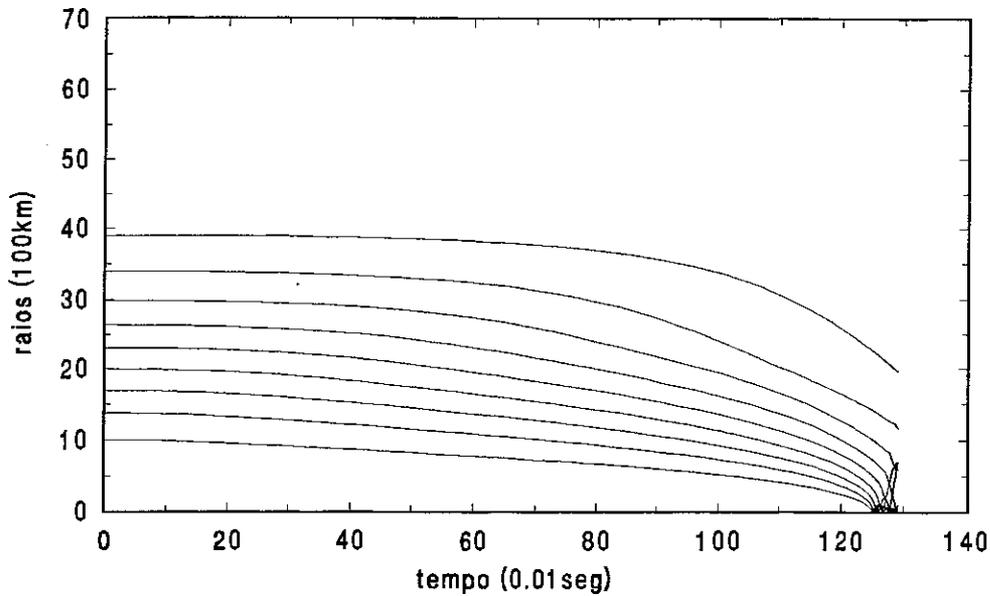


Figura: 5.1-a. Evolução dos raios x tempo. Dinâmica geral do colapso de uma supernova até o ponto que pode ser descrito pela hidrodinâmica convencional.

A Figura (5.1-a) exibe uma evolução típica para o colapso de um núcleo estelar conforme prescrito pela Hidrodinâmica convencional. Tratamos esse problema com o mecanismo lagrangiano sem transferência de massa sendo que os resultados foram obtidos, com o código numérico do formalismo hidrodinâmico de poucas variáveis com

transferência de massa, porém, impondo  $\dot{M}_i \equiv 0$  para todas as camadas. O cálculo, dessa forma limitado, se torna equivalente à integração hidrodinâmica convencional.

Partimos de uma condição inicial consistindo de um núcleo estelar com uma massa solar e constituído de um gás de eletrons degenerados e núcleos de ferro. As massas e raios de cada camada são obtidos através da minimização da energia para o equilíbrio hidrostático da estrela.

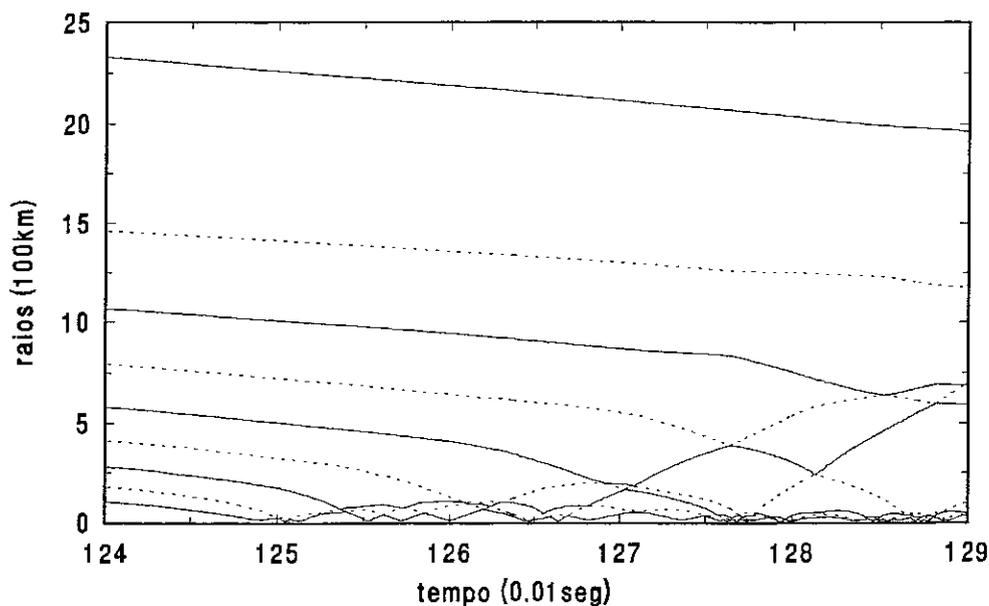
Conforme descrito no capítulo III, aqui também o processo de colapso é disparado pela introdução na equação de estado do mecanismo de captura eletrônica e formação de um gás de neutrons livres não relativísticos.

Somente nos estágios finais do colapso, quando do início do processo de inversão, é que toda a abordagem física até então utilizada é colocada em questão, pois, a evolução coerente dá lugar, abruptamente, a uma completa desorganização de todo o cálculo, a energia total deixando de se conservar, com as várias coordenadas exibindo um inusitado comportamento oscilatório.

Essa evolução absolutamente irrealística e não-física não pode ser atribuída a qualquer falha numérica simples, como propagação de erros, erros de truncamento, etc. De acordo com o discutido no capítulo II, a causa é mais profunda.

Por essa razão, não é possível traçar uma evolução hidrodinâmica convencional para as fases pós-colapso. Além das oscilações espúrias e da não conservação da energia, o passo temporal de integração tende a se tornar tão pequeno, que impede qualquer progresso prático. Isto decorre das exigências de precisão numérica e do grau de complexidade da evolução anômala que se manifesta nas fases finais do cálculo.

Na Figura (5.1-b) apresentamos o detalhe dos instantes finais do colapso aonde é evidente o resultado não-físico obtido, com as várias camadas entrechocando-se vio-



**Figura: 5.1-b.** Evolução dos raios x tempo. Vista ampliada da evolução geral da dinâmica do colapso de uma supernova de até o ponto que pode ser descrito pela hidrodinâmica convencional.

lentamente. Usamos traços diferentes para camadas sucessivas por uma questão de clareza. Cada entrechoque representa um considerável esforço computacional e é isto que virtualmente impede a progressão do cálculo, pois o número de colisões aumenta quanto mais próximo estivermos do instante de inversão. Pode-se observar no gráfico que durante um entrechoque todo o material contido em uma camada passa a ocupar uma região de largura quase zero. A dificuldade tende a aumentar com o número de camadas utilizadas para representar o fenômeno.

O formalismo hidrodinâmico de poucas variáveis é capaz de descrever todo o processo de inversão do colapso e formação da onda de choque para as mesmas condições iniciais. Nas Figuras (5.2-a) e (5.2-b), podemos observar os instantes finais do colapso

homólogo ( $t < 1.25$  seg) a partir do qual toda a dinâmica é dominada por uma evolução fortemente não-adiabática. A não-linearidade das equações deixa aqui de impor maiores dificuldades e, conforme de vê dos gráficos, torna-se possível a plena integração do problema.

Nossa abordagem determina completamente as equações diferenciais que especificam a dinâmica de um fluido prescrito por um número finito de variáveis. Essas equações foram obtidas do Princípio de Hamilton sem qualquer outra hipótese que o reconhecimento de nossas reais limitações para o conhecimento e descrição de um sistema físico.

Vale ressaltar que chegamos a esses resultados sem recorrer a qualquer parâmetro livre de ajuste e que as equações foram integralmente deduzidas sem nenhuma aproximação.

É a partir do instante da inversão que as vantagens da abordagem aqui proposta ficam evidentes. Em primeiro lugar, podemos verificar (Figura (5.2-b)) a formação espontânea de um núcleo estelar remanescente com uma dinâmica própria que, com o passar do tempo, se torna cada vez mais desacoplada do restante da estrela. Essa região central, delimitada no gráfico pela camada 1, a mais próxima do eixo das ordenadas, apresenta uma densidade média da ordem da densidade nuclear, o que permite identificá-la como a estrela de neutrons remanescente da explosão da supernova.

As oscilações desse corpo central são, na verdade, rapidamente atenuadas em uns poucos períodos devido aos mecanismos dissipativos, tais como de emissão de neutrinos, etc. Entretanto, uma vez que o núcleo central fica dinamicamente desacoplado, sua evolução não afeta mais o comportamento geral. A introdução dos processos de dissipação de energia deverá fazer com que essa estrela de neutrons central atinja quase que de pronto o equilíbrio hidrostático, com isso tornando o cálculo numérico mais rápido.

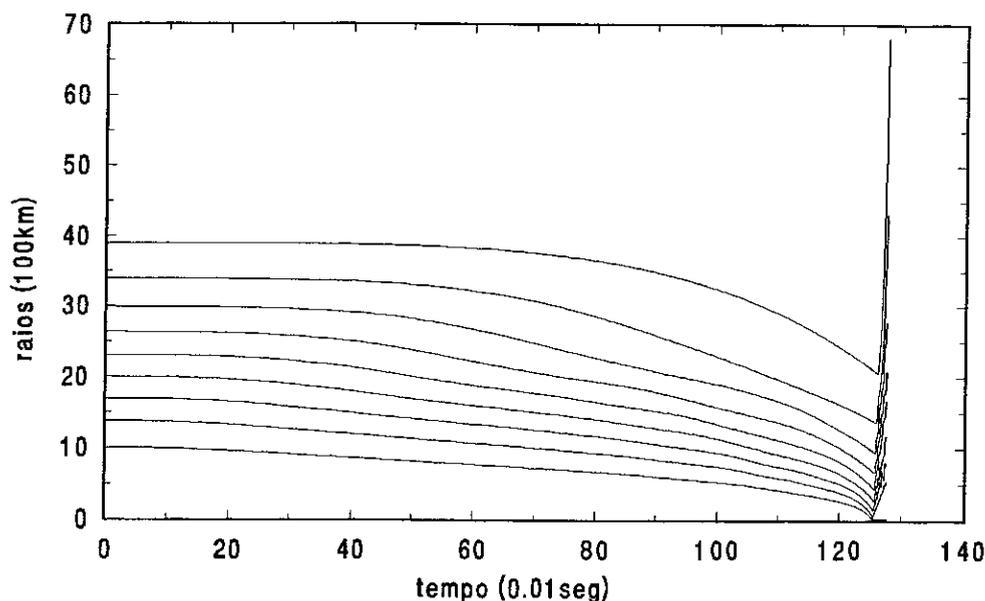
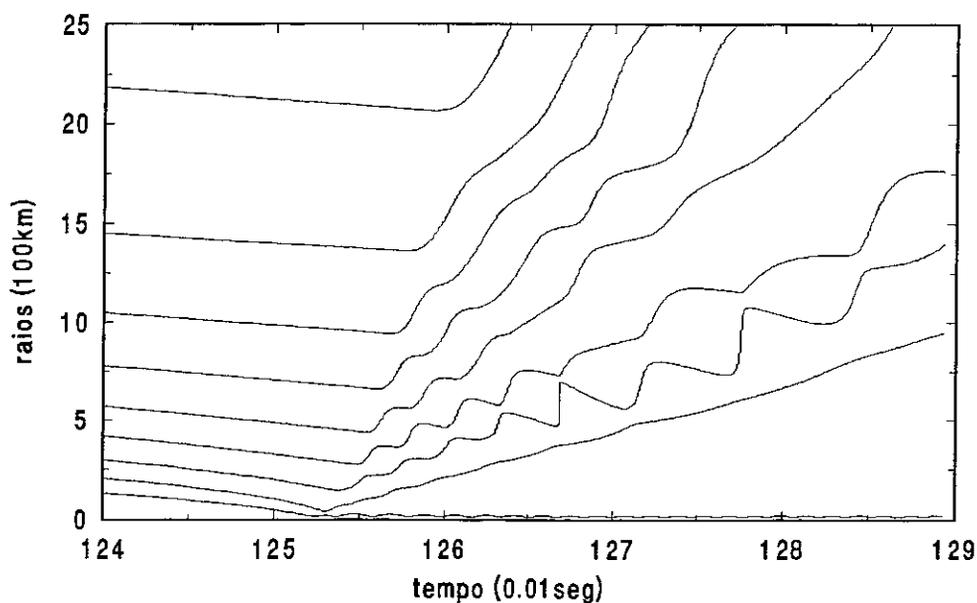


Figura: 5.2-a. Evolução dos raios x tempo. Descrição geral da dinâmica do colapso e explosão de uma supernova de acordo com a hidrodinâmica de poucas variáveis.

A descontinuidade da frente de onda de choque é descrita pela evolução da segunda camada, cuja densidade e massa contida apresentam valores muito maiores do que aquelas das demais camadas superiores. Assim como a estrela de neutrons, o choque surge também no instante de inversão.

A identificação da onda de choque com a segunda camada se torna evidente quando superpomos as trajetórias de algumas partículas de prova ao gráfico e seu desenvolvimento pode ser claramente acompanhado na Figura (5.2-b).

Essas trajetórias são traçadas através da integração da equação (4.9) do campo de velocidades  $\mathbf{v}_i(\mathbf{r})$ , e foram obtidas simultaneamente com todo o cálculo.



**Figura: 5.2-b.** Evolução dos raios x tempo. Vista ampliada da dinâmica do colapso e explosão de uma supernova de acordo com a hidrodinâmica de poucas variáveis.

Observamos que, conforme podíamos esperar, devido ao mecanismo de transferência de massa, o movimento do material é, de fato, bastante distinto daquele descrito pelas camadas de igual densidade. Já no início da inversão o fluido em geral transpassa as camadas e, ao fazê-lo, é pouco perturbado.

A equação da continuidade (4.10) mostra que isto se deve ao fato de que pequenas diferenças de densidades entre camadas implicam em uma, também pequena, mudança na velocidade das partículas ao passar de uma camada para outra.

O mesmo não ocorre quando as partículas atingem a segunda camada, pois nessa ocasião encontram uma grande diferença de densidade e, em consequência, sofrem uma sensível alteração na velocidade. O conjunto das partículas do meio que incidem sobre

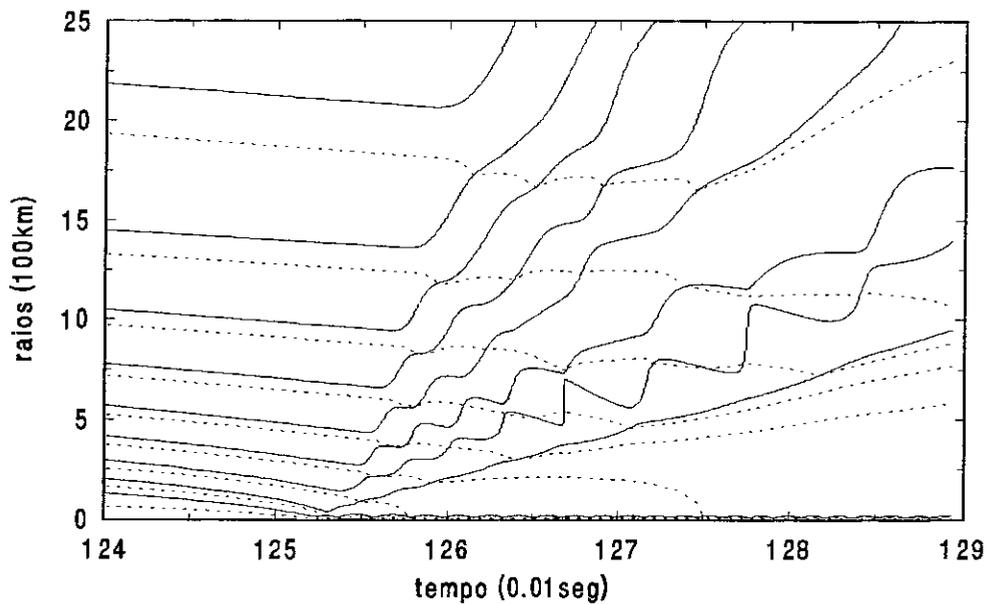


Figura: 5.2-c. Superposição do gráfico da figura 2-b com as trajetórias das partículas de prova (em linhas pontilhadas).

a segunda camada acabam por formar um feixe em movimento radial para fora, com um alto conteúdo energético, dando origem à onda de choque que provocará a explosão final da estrela.

A partir da inversão, a evolução física fica dominada pela dicotomia de um núcleo central e um envelope ejetado. Na figura 2-d, estão traçadas as trajetórias de partículas de teste de forma a retratar a evolução do meio material. É bem evidente a divisão da estrela em dois objetos independentes. A formação da frente de onda de choque aparece de forma nítida logo após o colapso. Neste exemplo, das 9 partículas de prova, inicialmente uma para cada camada, terminamos com 4 no núcleo central, 4 na segunda camada, e apenas 1 na terceira camada.

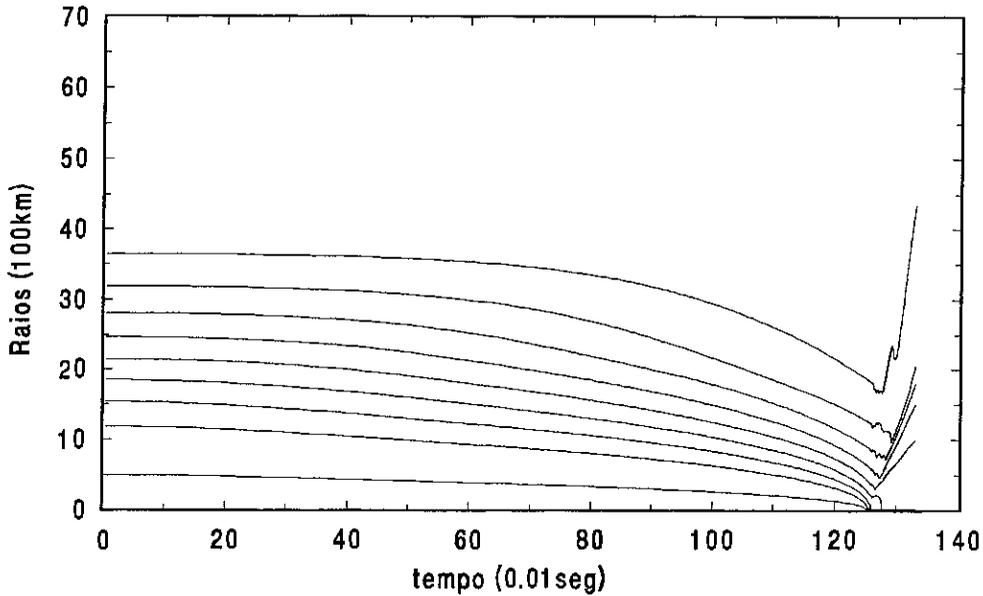


Figura: 5.2-d. Descrição geral das trajetórias de partículas de teste. O material das camadas superiores da estrela passa gradativamente para as camadas de baixo, terminando por se concentrar no núcleo central ou no material ejetado pela onda de choque representada pela segunda camada.

As camadas superiores, para as quais, nesse exemplo, não restou qualquer partícula, não exercem, aparentemente, um papel relevante para a descrição da dinâmica depois da inversão. A massa contida nessas camadas é inicialmente da mesma ordem das duas camadas mais internas porém, conforme se depreende do gráfico da Figura (5.2-e), logo após a explosão, rapidamente o seu conteúdo é esgotado pela transferência para as camadas inferiores.

Na figura 5.3 apresentamos a energia total do material ejetado com a explosão. Em todos esses experimentos, a massa expelida ficou sempre sensivelmente em torno de 20% da massa total. Os cálculos foram feitos com o modelo de núcleo estelar de duas camadas. Verifica-se uma propensão para o crescimento da energia da explosão

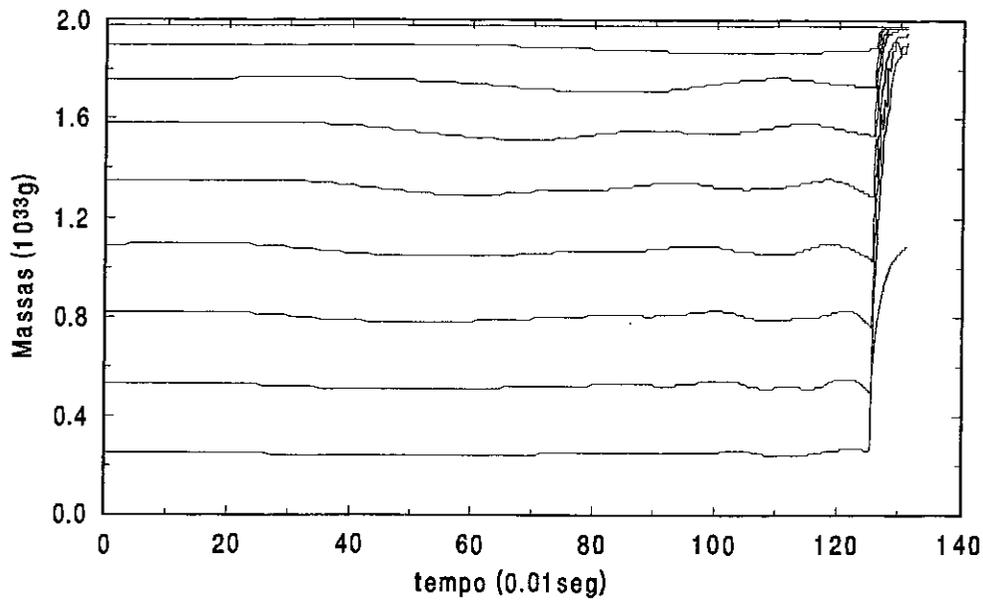


Figura: 5.2-e. Massa contida no interior de cada camada em função do tempo. Durante toda a fase de colapso homólogo não há uma significativa transferência de massa entre as camadas. Isto corresponde à etapa adiabática do fenômeno e as massas, como variáveis lagrangeanas, não chegam a exercer um papel relevante na dinâmica do sistema. Somente quando da inversão, e após, é que o caracter irreversível do processo se manifesta integralmente e o mecanismo de troca de material entre camadas se torna espontaneamente importante.

com a massa total. Superposto a isto, pode-se notar uma tendência oscilatória com uma frequência que decresce para a direita. Estas características são comuns às três equações de estado.

O ponto mais importante nesses resultados é que, apesar de estarmos usando equações de estado muito simples, as energias finais para as explosões estão em bom acordo com os resultados observacionais, os quais estabelecem energias da ordem de alguns poucos *foes* para supernovas tipo II.

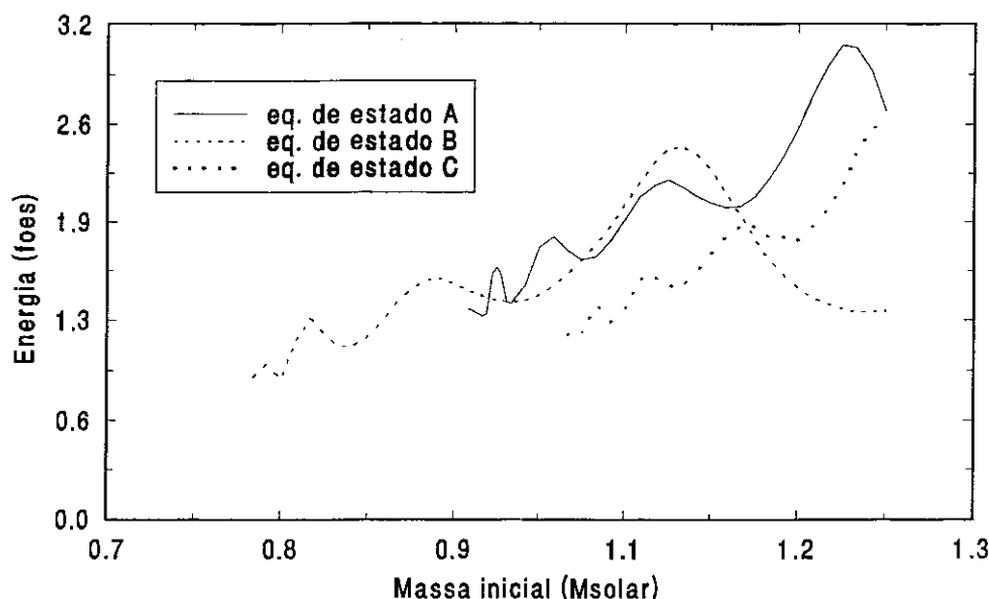


Figura: 5.3. Energia cinética da explosão em função da massa inicial do núcleo da estrela e da equação de estado.

As massas estão limitadas à direita pelo limite de Chandrasekhar apropriado para a configuração inicial adotada. Pelo lado esquerdo, verificamos que não ocorrem explosões abaixo de uma certa massa limite para cada equação de estado. Os experimentos realizados abaixo desse limite mostraram que o sistema exibe um movimento oscilatório anarmônico, que pode se prolongar indefinidamente sem nunca chegar a se repetir.

O comportamento de uma configuração estável (no sentido de que não chega a explodir), exibe certas peculiaridades interessantes. Segundo se observa na figura 4, quando a massa da estrela é inferior ao limite para ocorrência de explosão, ela passa a exibir um complexo movimento oscilatório que, por aparentemente não se repetir, sugere um padrão caótico de evolução.

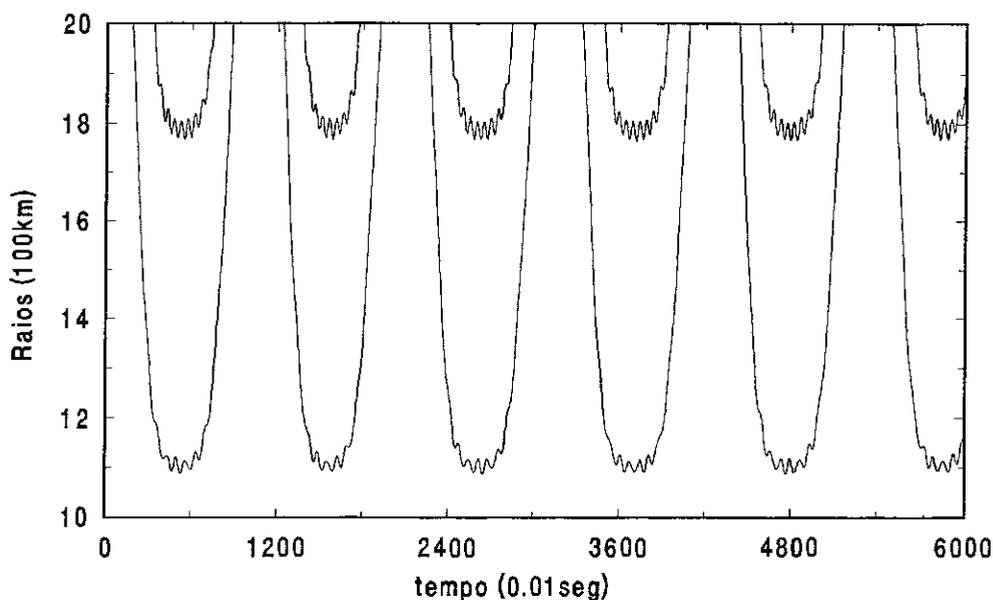


Figura: 5.4. Padrão de evolução caótico de uma estrela com massa abaixo do limite para desencadear o mecanismo hidrodinâmico de explosão. Limite inferior das trajetórias de uma simulação com duas camadas.

Consideramos aqui somente as explosões que ocorrem de pronto, logo após a primeira implosão, pois são estas evoluções que apresentam interesse astrofísico.

Sob o ponto de vista matemático, no entanto, é conveniente chamar a atenção para o fato de quando permitimos que o cálculo se prolongasse por tempo suficiente, aconteceu algumas vezes de a estrela acabar chegando, depois de muitas oscilações a uma condição de explosão. Isto parece se dar com massas do núcleo estelar inferiores e bem próximas desse limite inferior com que nos deparamos.

Um outro aspecto fundamental que se manifesta nesse limite inferior de massa está em que percebemos não existir transição entre a situação de explosão bem sucedida e a não explosão. Aparentemente, estamos aqui frente a uma situação de dependência

crítica das condições iniciais. Constatamos que basta o acréscimo de uma fração de massa muito pequena, menor mesmo do que milionésimos da massa do Sol para alterar completamente toda a evolução futura. Jamais observamos a ocorrência de uma meia explosão. Não há, pelo visto, uma região intermediária para a qual, com determinadas massas, possamos obter como resultado uma quase ou fraca explosão.

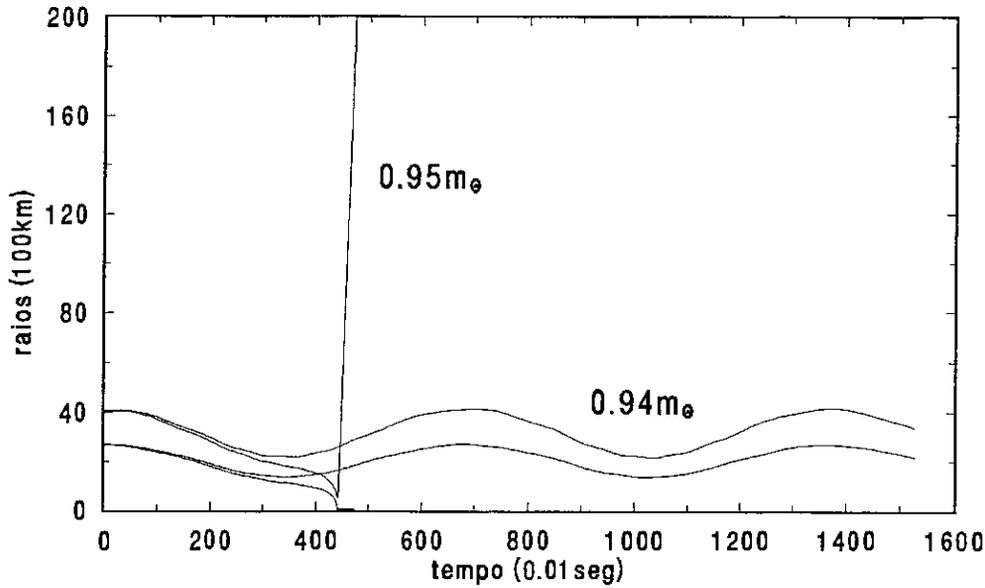


Figura: 5.5. Dependência crítica das condições iniciais conforme se pode inferir da comparação de duas evoluções que diferem na massa total de apenas  $0.01m_{\odot}$ . Em ambos os cálculos foi adotada a equação de estado A. A segunda camada do núcleo que explode atinge uma velocidade de  $\sim 7.10^9$  cm/s

Tal característica está exposta na Figura (5.5) onde até mesmo uma variação menor que  $10^{-6}m_{\odot}$  na massa total levaria ao mesmo resultado, sendo capaz portanto de alterar completamente a evolução futura. Isto suscita que, pelo menos sob certas circunstâncias,

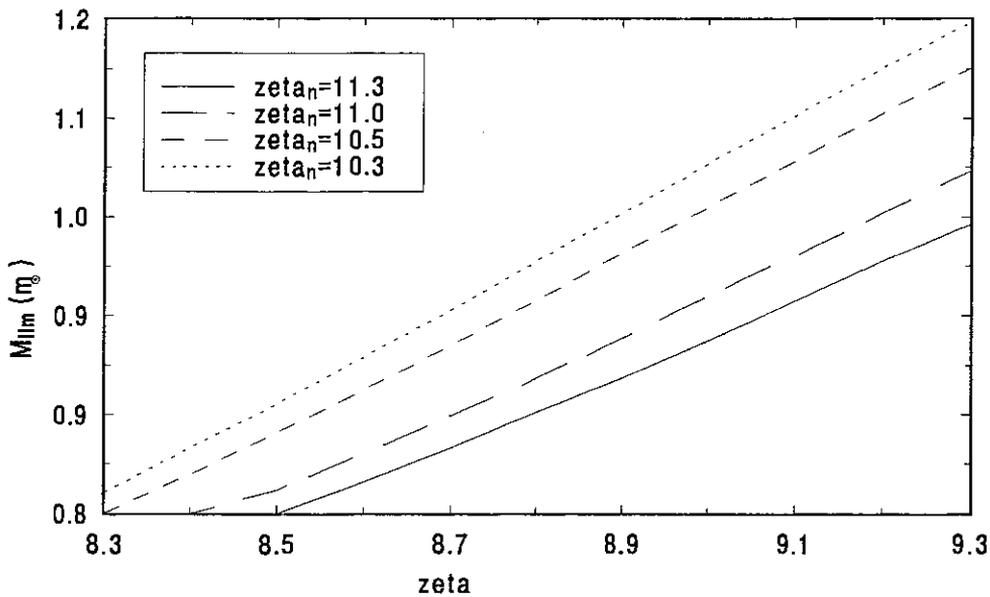
nossas equações não são estáveis para pequenas mudanças nas condições iniciais, o que deve ser mantido em mente para uma futura análise matemática da questão.

A existência de um limite inferior para a massa do núcleo central é por si mesmo um resultado que merece um detalhado exame. Uma observação semelhante resultou de um trabalho de Baron e Cooperstein de 1990, no qual os autores investigavam um limite superior da ordem de  $1.1 - 1.2m_{\odot}$  para a massa do núcleo central de ferro. Nas condições reinantes no centro da estrela a onda de choque se propaga sobre um meio constituído de átomos de ferro. A grande temperatura gerada pela própria passagem da onda dispara processos altamente dissipativos com produção abundante de neutrinos e foto-desintegração dos núcleos de ferro. Esses mecanismos dissipadores são eficientes a ponto de atenuar rapidamente a intensidade da onda de choque, e mesmo levá-la ao completo esmorecimento. Cerca de  $1foe$  de perda de energia para cada  $10^{-1}m_{\odot}$  percorrida impede que núcleos estelares muito massivos possam dar origem a supernovas. Entretanto, aqueles autores encontram que, surpreendentemente, para um modelo com massa menor do que  $1m_{\odot}$  a explosão deixou de ocorrer. Não foi possível dar então uma explicação plausível a este resultado.

Analisamos aqui a dependência desse limite inferior de massa com a equação de estado utilizada para representar o meio .

As propriedades gerais da matéria estelar nas suas fases de gás de eletrons, no início, e de gás de neutrons, no estágio final são bem conhecidas. Nossas incertezas se concentram na descrição da transição correspondente aos processos de captura eletrônica, foto-desintegração dos núcleos de ferro que provocam a neutronização geral do meio. Realizamos, então, uma extensa série de experimentos visando estabelecer o relacionamento entre a massa limite inferior e os parâmetros  $\zeta_n$  e  $\bar{\zeta}$  que definem essa transição.

Os resultados estão apresentados no gráfico da figura 6, no qual se pode perceber que a massa limite inferior  $M_{inf}$  apresenta uma dependência quase linear de seus parâmetros, sendo que cresce com  $\bar{\zeta}$ , mas decresce com  $\zeta_n$ . Como  $\bar{\zeta}$  determina a densidade típica em que os processos de captura eletrônica começam a se tornar proeminentes, se pode esperar que para disparar esse processo seja necessário uma certa massa, abaixo da qual, a captura eletrônica não chegará mesmo a se tornar efetiva. Quanto mais alto  $\bar{\zeta}$ , maior deverá ser a densidade para a captura eletrônica e conseqüentemente maior também deverá ser a massa inicial do núcleo estelar.



**Figura: 5.6.** Dependência da massa limite inferior com a equação de estado. No gráfico,  $zeta_n = \zeta_n$ , e  $zeta = \bar{\zeta}$ . A explosão é deflagrada mais facilmente quando a neutronização tem início em densidades menores e o endurecimento da matéria se dá em densidades mais altas.

Para o parâmetro  $\zeta_n$ , no entanto, a dependência deve ser a inversa, pois com uma tardia neutronização da matéria, o endurecimento será protelado, o que faz com que a inversão se dê numa região mais profunda do poço de potencial de forma a aumentar ainda mais a violência do golpe hidrodinâmico e assim favorecer a explosão.

Quando a região central da estrela atinge, ou mesmo excede, a densidade nuclear, o meio material se torna extremamente duro de maneira a impedir uma posterior compressão. O material que estava caindo em direção ao centro é então abruptamente freiado, levando a velocidade a zero e a um conseqüente aumento na pressão dado por:

$$\delta p = \rho c \delta v. \quad (5.1)$$

aonde  $\delta v$  é a mudança de velocidade, nesse caso igual à própria velocidade de queda do material;  $\rho$  é a densidade do meio e  $\delta p$  é a variação de pressão associada. Essa expressão é válida somente para o limite acústico em que  $c$ , a velocidade do som, é menor do que  $\delta v$ . Ainda no limite acústico, então, a mudança de densidade é dada por

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{\delta v}{c}. \quad (5.2)$$

Como  $\delta v = 0$  no centro da estrela, podemos ver que nessa região, necessariamente, prevalece o regime sônico e as variações da pressão serão de pequena monta. Conforme nos afastamos do centro, no entanto, a razão  $\delta v/c$  tende a crescer até o ponto em que a acústica deixa de valer. Nesta altura a onda de pressão dá origem a uma onda de choque na qual as variáveis hidrodinâmicas sofrem variações abruptas e toda a evolução deixa de ser adiabática.

Isto explica porque a onda de choque deve necessariamente ser originada a uma certa distância do centro da estrela, precisamente no ponto em que a velocidade de queda se aproxima da velocidade do som no meio.

A figura 7, extraída de Cooperstein e Baron (1990) ilustra bem essa situação. Neste gráfico estão traçadas as curvas de velocidade do meio para alguns instantes nas proximidades do momento da inversão.

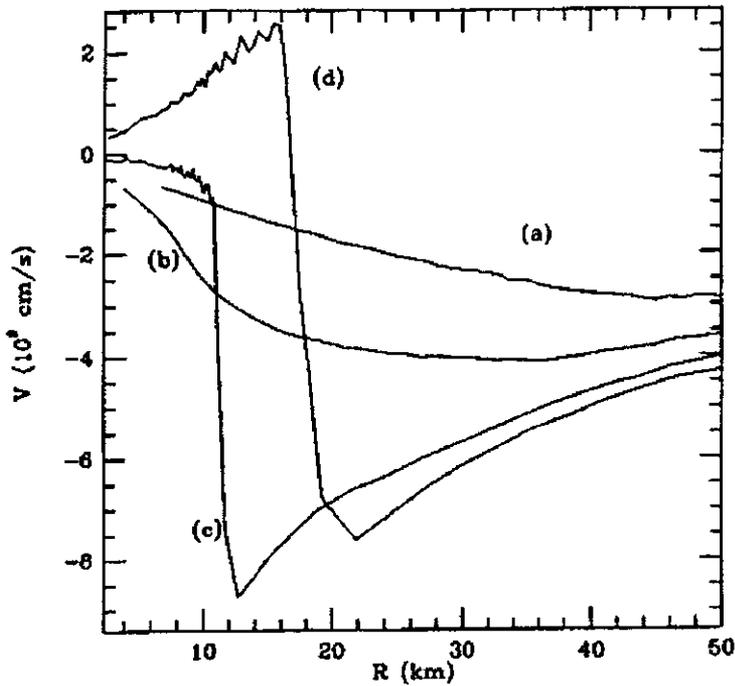


Figura: 5.7. O início do choque. Reproduzido de Cooperstein e Baron (1990).  
 (a) Os últimos instantes do colapso homólogo no qual a velocidade de queda é aproximadamente proporcional ao raio. (b) O centro da estrela atinge a densidade nuclear. (c) O núcleo central é momentaneamente elevado ao repouso. (d) Tem início o choque.

Durante toda a fase de implosão adiabática o campo de velocidade é aproximadamente linear com o raio, o que aparece representado na figura pela curva (a), correspondente a um instante imediatamente anterior ao processo de inversão.

Quando a densidade no centro da estrela se aproxima da densidade nuclear o material começa a oferecer resistência às compressões e o índice adiabático cresce rapidamente, curva (b).

No instante de máximo esmagamento, curva (c), o núcleo central consegue conter o colapso e as velocidades vão a zero. A partir da superfície, no entanto, as partículas continuam a cair em alta velocidade, dando origem à descontinuidade e formação da onda de choque.

Finalmente, como forma de liberar o alto conteúdo de energia interna acumulado, o núcleo estelar dá início ao processo de expansão e lança a onda de choque, curva (d), que eventualmente levará a explosão da estrela na forma de uma supernova.

Temos assim, do ponto de vista astrofísico, uma descrição bastante detalhada do processo catastrófico de colapso e explosão estelar.

Vale no entanto, no que diz respeito aos aspectos hidrodinâmicos do problema, fazer algumas observações.

Podemos ver que, nas curvas (c) e (d), aonde deveria haver a descontinuidade da frente de onda de choque (na realidade uma estreita faixa de transição da ordem de um livre caminho médio das partículas do meio de aproximadamente  $10^{-13}$  cm), encontramos, de fato, uma região de variação das variáveis com cerca de 4km de largura.

Essa atenuação da descontinuidade é devida à introdução da viscosidade de Von-Neumann nas equações hidrodinâmicas utilizadas por Cooperstein e Baron. Conforme discutido nos capítulos II e III, essa viscosidade artificial tem sido usada amplamente

nos cálculos hidrodinâmicos com a função explícita de atenuar as oscilações numéricas espúrias que sempre surgem quando se integram quaisquer das equações de diferenças finitas associadas às equações hidrodinâmicas.

O método de VonNeumann depende de um parâmetro arbitrário de ajuste da intensidade da pseudo-viscosidade para cada caso. Procura-se com ele um compromisso entre a deformação da frente de choque e a atenuação das oscilações numéricas que ocorrem na fase pós-choque.

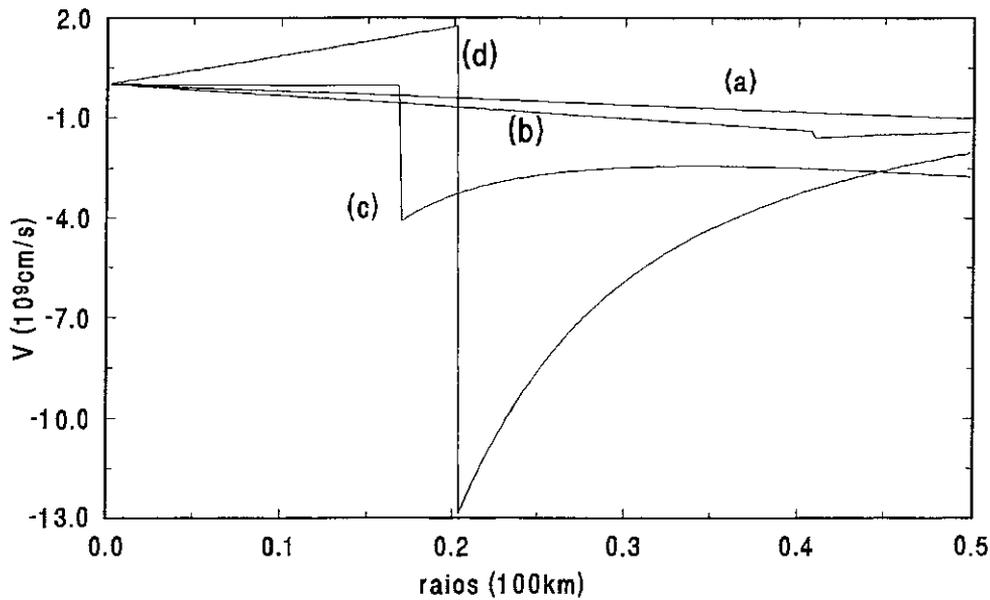
Comparando a Figura (5.7) com o gráfico (2.9), referente à teoria da pseudo-viscosidade de VonNeumann e Ritchmeyer, podemos ver que o padrão oscilatório que se manifesta na parte superior das curvas (c) e (d) é, de fato, originário de oscilações numéricas que ainda subsistem, a despeito do efeito atenuador da viscosidade artificial.

Com o objetivo de avaliar nosso modelo de colapso estelar baseado em uma lagrangiana efetiva apresentamos na figura (5.8) a descrição das mesmas etapas de formação da onda de choque no núcleo da estrela. Apesar de nosso formalismo hidrodinâmico depender de um pequeno número de variáveis para a descrição do sistema, veremos que ele é capaz de reproduzir com grande riqueza de detalhes o momento em se forma a onda de choque no interior do núcleo de ferro. Usualmente, para se chegar a esses resultados são necessárias semanas de tempo de computação em super computadores Cray.

Enquanto o meio puder ser descrito por um índice adiabático, ou seja, a equação de estado puder ser escrita como uma simples lei de potência:

$$P = k\rho^\gamma, \quad (5.3)$$

a dinâmica não oferece condições de determinar qualquer escala de comprimento e a solução das equações, necessariamente deve corresponder a uma evolução homóloga.



**Figura: 5.8.** O início do choque de acordo com a hidrodinâmica de poucas variáveis. (a), (b), (c) e (d) correspondem a instantes semelhantes ao da Figura (5.7).

Consequentemente, durante a fase adiabática do processo de implosão, o núcleo estelar descreve um colapso homólogo no qual o campo de velocidades, nas proximidades do centro, apresenta uma evolução dada por:  $v \propto r$ .

O processo de inversão tem início quando a densidade se aproxima da densidade nuclear e o material passa a oferecer resistência a posteriores compressões. O índice adiabático cresce e a equação de estado, deixando de ser descrita por uma lei de potência, faz com que a homologia seja rompida.

Na figura 8, a curva (a) descreve o campo de velocidades, aproximadamente proporcional a  $R$ , e correspondente aos últimos instantes em que o índice adiabático é  $4/3$ , quando ainda existe homologia no colapso.

Em uns poucos milésimos de segundo após a densidade do centro chegar a um valor comparável ao da densidade nuclear, instante (b) na figura, o colapso começa a ser estancado e uma onda de alta pressão surge no centro. Com a deposição de mais material no centro, a onda acústica de alta pressão começa a se acumular.

Conforme a informação for se afastando do centro, ela vai encontrando material com densidade mais baixa e ainda em queda. Na altura em que a velocidade de propagação da onda acústica for igual a velocidade de queda do material haverá um acúmulo de sinal. A onda não poderá mais avançar e haverá um abrupto aumento da pressão nesse região.

No ponto de máximo compressão, curva (c) no gráfico, a densidade central chega a superar a densidade nuclear, o colapso é estancado e todo o núcleo da estrela, concentrado numa região de uns poucos quilômetros atinge o repouso momentâneo. Na sua superfície, a velocidade, pressão e densidade apresentam agora descontinuidades, precipitando a formação da onda de choque.

Alguns milisegundos após, a onda de choque já se manifesta plenamente. O material do centro da estrela reage ao esmagamento com uma fraca expansão, e por isso as velocidades tornam-se positivas na região central, porém mantêm-se negativas na parte mais externa. É o início da explosão, curva (d).

No formalismo hidrodinâmico de poucas variáveis, aqui proposto, não há espaço para a existência desse tipo de oscilação e portanto, não nos defrontamos com tal problema em nossa descrição do colapso (figura (5.8)).

## V-2 CONCLUSÕES FINAIS.

Nosso objetivo, nesse trabalho, foi o de apresentar o modelo de descrição de onda de choque com transferência de massa não mais como um artifício particular ao problema básico de explosões de supernovas, mais sim, como uma terceira possibilidade aos formalismos de Euler e Lagrange.

De acordo com esse enfoque, os fenômenos hidrodinâmicos seriam descritos por equações que determinariam, não só a evolução das variáveis hidrodinâmicas, mas também, os pontos do espaço onde tais variáveis seriam especificadas.

Nas abordagens de Euler e Lagrange, as equações de evolução das variáveis são obtidas do Princípio de Mínima Ação de Hamilton, enquanto que os pontos onde as variáveis serão especificadas são determinados por regras relacionadas a questões de simplicidade.

Essa arbitrariedade nas abordagens de Euler e Lagrange, naturalmente, não implica em qualquer limitação se pudermos supor a existência de um número suficiente de pontos à completa descrição do problema.

Porém, em análises numéricas, existem ocasiões em que não dispomos do número necessário de células de integração, quando então o formalismo aqui proposto pode se mostrar muito útil. Isto pode se dar nas seguintes situações:

- 1)- Limitações relacionadas ao número de pontos armazenáveis e tratáveis pelo computador.
- 2)- Mesmo dispondo de um número suficientemente grande de elementos na malha, com a evolução dinâmica do problema, surgem regiões em que as variáveis são bem comportadas, de fácil descrição, mas nas quais pode haver mais pontos do que o realmente necessário, e, por outro lado, regiões aonde as variáveis apresentam acentuados gradientes, chegando mesmo a se aproximar de descontinuidades, mas nas quais não se irá encontrar uma densidade de pontos da malha em correspondência à sua importância dinâmica.
- 3)- Na análise de fenômenos críticos, como ondas de choque, onde não mais se pode presumir a continuidade das variáveis, e onde nenhum refinamento da rede de integração será suficiente para a descrição do fenômeno.
- 4)- No estudo de fenômenos no qual o grau de incerteza nas condições reinantes é muito alto. Nessas situações, o número de elementos da malha para a descrição do problema tem sido, até agora, determinado por questões de consistência numérica das soluções. Esse número, em geral, supera em muito a nossa verdadeira capacidade de descrição da realidade física em questão.

O método surge como uma forma nova de tratar os fenômenos críticos, particularmente aqueles associados às ondas de choque, e na qual, como vimos, deixamos à cargo do Princípio de Hamilton a especificação, não só da evolução das variáveis, como também, das posições em que serão especificadas tais variáveis.

Os resultados numéricos mostram que o modelo é capaz de descrever o processo de colapso gravitacional, os detalhes do mecanismo de inversão e formação da onda de choque, bem como, a ruptura em uma estrela de neutrons com violenta ejeção das camadas externas.

- Chiu, H. Y., *Stellar Physics*, Blaisdel Publishing Company, Vol.I, 1968.
- Colgate, S. A. e Johnson H. J., Phys. Rev. Letter ,” Hydronynamical Origin of Cosmic Rays” **5**, 235, 1960.
- Colgate , S. A. e White R. H.,” The Hydrodynamic Behavior Of Supernovae Explosions”, *Astrophys. J.* **143**, 626-681, 1966.
- Collela, P. e Glaz, H., M., ”Efficient Solution Algorithms for the Riemann Problem for Real Gases”, *J. Comp. Phys.*, **59**, 264-289, (1985).
- Cooperstein, J. e Baron, E.A., ”Supernovae: The Direct Mechanism and the Equation of State”, em *Supernovae*, editado por A. Petschek (Springer, Berlin), 213-266, 1990.
- Courant e Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Pub.,1956.
- Fuller, G. M. and Meyer, B. S., *Astrophys. J.*, **376**, 376, 1991.
- Goldreich P. e Weber S. V.,” Homologously Collapsing Stellar Cores”, *Ap. J.*,**238**,991-997,1980.
- Herant, M., Benz, W., Hix, W. R., Fryer, C. L., Colgate, S. A., ”Inside the Supernova: A Powerful Convective Engine”, *ApJ*, **435**, 339-361, 1994.
- Hoyle, F., e W. A. Fowler, *Astrophys. J.*, **132**, 565,1960.
- Janka, H. Th., Zweger, Th., e Mönchmeyer, R., ”Does Artificial Viscosity Destroy Prompt Type-II Supernova Explosions?”, *AA* **268**, 360-368,1993.
- Landau, L., *Phys. Z. Sowjetunion*, **1**, 285, 1932.
- Leer, B. V. ”Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov’s Method.”, *J. Comp. Phys.*, **32**, 101-136, (1979).

## REFERÊNCIAS

- Baade, W., e Zwicky, F., Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **20**, 254, 1934.
- Baron, E. and Cooperstein, J.: "The Effect of Iron Core Structure on Supernovae", *Astrophys. J.*, **353**, 597, 1990.
- Baumgarte, T. W., Shapiro, S. L., e Teukolsky, S. A., "Computing Supernova Collapse to Neutron Stars and Black Holes", *si Astrophys. J.*, **443**, 717-734, 1995.
- Bethe, H. A.: "Supernovae Mechanisms", *Rev. Mod. Phys.*, **62**, 801-865, 1990.
- Bethe, H. A. and Pizzochero, P., *Astrophys. J.*, **350**, L33, 1990.
- Bethe, H. and Wilson, J. R., *Astrophys. J.*, **295**, 14, 1985.
- Boris, J. P. e Book, D. L., "Flux-Corrected Transport", *J. Comput. Phys.*, **11**, 38-69, 1973.
- Bowers, R. L., e J. R. Wilson, *Astrphys. J.*, **263**, 366, 1982.
- Brown, G. E., *Phys. Rep.*, **163**, 1, 1988.
- Bruenn, S. W. and Haxton W. C., *Astrophys. J.*, **376**, 678, 1991.
- Burrows, A. and Lattimer, J. M., *Astrophys. J.*, **299**, L19, 1985.

- Martí J. Ma., Ibañez J. Ma., Mirales J. A., "Godunov-Type Methods for Stellar Collapse", *AA* **235**, 535-542, 1990.
- Noh W. F., "Errors for Calculations of Strong Shocks Using an Artificial Viscosity and an Artificial Heat Flux", *J. Comp. Phys.* **72**, 78, 1987.
- Lax, P. D., "Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **7**, 159-193, 1954.
- Lax, P. D., e Wendroff, B., "Difference schemes for hyperbolic equations with high order of accuracy", *Comm. Pure Appl. Math.*, **17**, 381-398, 1964.
- Pizzochero, P. M., *Phys. Rep.*, L, **206**, 99, 1991.
- Richtmyer, R. D., *Difference methods for Initial-Value Problems*, Interscience Publishers, Inc., 1957.
- H. Rodrigues, "Formulação Lagrangeana para o Mecanismo de *Bounce* em Explosão de Supernovas", Tese, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, DNE, 1989.
- Rodrigues H., Duarte, S. e Kodama, T., d'Avila, V. "An Effective Lagrangian Description of Supernova-Core Bounce", *Astroph. and Space Science*, **194**, 313-326, 1992.
- Saha, D. and Chattopadhyay, G., *Astrophys. Space Sci.*, **178**, 209, 1990.
- Tammann, G. A., Em "*Supernovae. A Survey of Current Research*", ed. Ree, M. J., e Stoneham, R. J., Dordrecht: Reidel, 1982.
- Wheeler, J. C., *Rep. Prog. Phys.*, **44**, 6, 1981.
- Wilson, J. R. and Mayle, R. W., *Phys. Rep.*, **163**, 63, 1988.
- Woosley S. E., e Weaver T. A., "The Physics of Supernova Explosions", *Ann. Rev. Astrophys.*, **24**, 205-253, 1986.

Yahil, A., Ap. J., "Self-Similar Collapse", **265**, 1047, 1983.

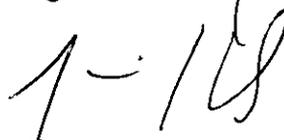
**"HIDRODINÂMICA DE ONDAS DE CHOQUE EM SUPERNOVAS"**

*Victor de Amorim D'Ávila*

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Sérgio José Barbosa Duarte - Presidente



Jair Koiller



Vladimir Garrido Ortega



Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira

Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira



Luiz Alberto Rezende de Oliveira

Rio de Janeiro, 30 de agosto de 1995